

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

ANNO CCCXXXV

1938 (XVI)

---

SERIE SESTA

---

RENDICONTI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XXVIII



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1938 (XVI)



Digitized by the Internet Archive  
in 2023

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1938 (Anno XVI)*

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

**Matematica.** — *Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare.* Nota di M. VILLA, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. La ricerca delle varietà  $V_k$ , a  $k$  dimensioni, che posseggono  $\infty^\delta$  «  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  » <sup>(2)</sup>, a cui sono dedicati alcuni miei lavori recenti, viene esaurita, in modo suggestivo, per tutti i possibili valori di  $k$  e di  $\delta$  e nell'ipotesi che  $V_k$  soddisfi al numero *minimo* di equazioni di Laplace (lin. indep.), dal teorema seguente:

*L'unica  $V_k$ , che possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $k > 1$ ;  $2k - 1 \leq \delta \leq 3k - 3$ ), e che soddisfa al minimo numero di equazioni di Laplace (lin. indep.) compa-*

(1) Nella seduta del 3 giugno 1938.

(2) Com'è ben noto una curva di una varietà  $V_k$  chiamasi, con BOMPIANI, quasi-asintotica  $\gamma_{1,3}$  quando l' $S_k$  tangente a  $V_k$  in un punto generico della curva e l' $S_3$  ivi osculatore alla curva stanno in un  $S_{k+1}$  (in particolare quando l' $S_3$  è indeterminato, cioè quando la curva è piana). Si chiama poi brevemente «  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  » un elemento del 2° ordine (cioè punto, tangente e piano osculatore) di curva di  $V_k$  che ha, nel punto, carattere di curva quasi-asintotica  $\gamma_{1,3}$  ossia un  $E_2$  contenuto in  $E_3$  il cui  $S_3$  osculatore sta in  $S_{k+1}$  coll' $S_k$  tangente nel punto alla  $V_k$  (oppure è indeterminato).

Se sopra una  $V_k$  si hanno  $\infty^d$  curve ( $d \geq 2k - 2$ ), per un punto e tangente generici ve ne sono  $\infty^{d-2k+2}$ ; se si hanno  $\infty^\delta E_2$  appartenenti a curve di  $V_k$  ( $\delta \geq 2k - 1$ ), ve ne sono  $\infty^{\delta-2k+1}$  aventi in comune il punto e la tangente, genericamente prefissati.



tibile con tale ipotesi, è il cono dell'  $S_{\frac{(3k-\delta-1)(3k-\delta+2)}{2} + \delta - 2k + 1}$  che proietta da un  $S_{\delta-2k}$  la  $V_{\frac{2^{3k-\delta-1}}{3k-\delta-1}}$  di  $S_{\frac{(3k-\delta-1)(3k-\delta+2)}{2}}$  rappresentante le quadriche di  $S_{3k-\delta-1}$ .

Questa varietà si indicherà con  $C_k^{\delta-2k}$ .

Per  $\delta$  minimo,  $\delta = 2k - 1$ , è questo un risultato già noto del Bompiani sulla  $V_k^{2k}$  di  $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$  rappresentante le quadriche di  $S_k^{(1)}$ , che servirà di base nella dimostrazione per  $\delta > 2k - 1$  (n. 8).

Per  $\delta$  massimo,  $\delta = 3k - 3$ , si ha una proprietà differenziale caratteristica dei coni di Veronese che, ulteriormente completata, costituisce un teorema a cui ero già pervenuto <sup>(2)</sup> e che viene riesposto nel n. 9.

Il teorema, per  $\delta > 2k - 1$ , assegna una proprietà differenziale caratteristica per i coni che proiettano la  $V_n^{2n}$ , che rappresenta le quadriche di  $S_n$ , da uno spazio lineare (sghebbato con l'  $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$  ambiente della  $V_n^{2n}$ ), che si può interpretare anche come una nuova proprietà della  $V_n^{2n}$  stessa.

S'avvertirà che il cono  $C_k^{\delta-2k}$  è caratterizzato solo dalla dimensione del sistema degli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  che esso possiede (oltre che dalla dimensione del sistema delle equazioni di Laplace a cui soddisfa) e che è algebrico, mentre le proprietà suddette non lasciavano certo prevedere l'algebricità della soluzione.

(1) Il teorema di Bompiani afferma: Se una  $V_k$  non soddisfa ad equazioni di Laplace (ha cioè  $S(2)$  osculatore regolare) e possiede  $\infty^{2k-2} \gamma_{1,3}$  è necessariamente la  $V_k^{2k}$  di  $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$  rappresentante le quadriche di  $S_k$  (BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*. «Memorie dell'Accademia dei Lincei», vol. XIII, ser. 5<sup>a</sup>, 1922, p. 474). Per  $k = 2$  si ha la superficie di Veronese (BOMPIANI, *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine*. Questi «Rendiconti», vol. XXX, ser. 5<sup>a</sup>, 1921, p. 248).

Ma il ragionamento fatto dal BOMPIANI nella Memoria citata, dimostra anche il teorema del testo per  $\delta = 2k - 1$ , cioè che: la  $V_k^{2k}$  di  $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$ , rappresentante le quadriche di  $S_k$ , è pure l'unica  $V_k$  che non soddisfa ad equazioni di Laplace e possiede  $\infty^{2k-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ . Infatti, come si deduce dalle condizioni del n. 5, se una  $V_k$  possiede  $\infty^{2k-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , questi sono ordinabili in curve  $\gamma_{1,3}$ . Con BOMPIANI (Mem. cit., pp. 468-469) si dimostra poi che queste  $\gamma_{1,3}$  sono piane (i loro piani sono i piani degli  $\infty^{2k-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ ), da cui segue senz'altro che esse non dipendono da funzioni arbitrarie. Le  $\gamma_{1,3}$  sono quindi  $\infty^{2k-2}$  e ci si riconduce alla dimostrazione del Bompiani.

(2) M. VILLA, *Proprietà differenziale dei coni di Veronese*. Questi «Rendiconti», vol. XXV, ser. 6<sup>a</sup>, 1937, p. 691. In questa Nota va letto « $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ » in luogo di «curve  $\gamma_{1,3}$ » dipendendo le  $\gamma_{1,3}$  della  $V_k$  (per  $k > 2$ ) da funzioni arbitrarie (e non soltanto da un numero finito di parametri).



Gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-3$ ), come si vedrà nel numero seguente, sono ordinabili in curve  $\gamma_{1,3}$  e queste quando  $\delta = 2k-1$  sono  $\infty^{2k-2}$ , mentre se  $\delta > 2k-1$  dipendono da  $\delta-2k+1$  funzioni arbitrarie (quant'è la dimensione del sistema degli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  aventi in comune il punto e la tangente). Dal teorema precedente segue quindi che una  $V_k$ , che soddisfi esattamente a  $\frac{(4k-d-1)(d-2k+2)}{2}$  equazioni di Laplace lin. indep. (n. 6), se  $d > 2k-2$ , non può possedere  $\infty^d \gamma_{1,3}$  esattamente.

Aggiungerò, a questo proposito, che, come risulta dal n. 4, non si conoscono  $V_k$  che posseggono  $\infty^d \gamma_{1,3}$  ( $d > 2k-2$ ) senza che le  $\gamma_{1,3}$  della  $V_k$  dipendano addirittura da funzioni arbitrarie. Sarebbe perciò assai interessante trovare una  $V_k$  che possieda  $\infty^d \gamma_{1,3}$  ( $d > 2k-2$ ) esattamente oppure dimostrare che una  $V_k$  siffatta non esiste. E per  $k < 5$  ho già potuto dimostrare che effettivamente una tale  $V_k$  non esiste.

2. Per  $\delta = 2k-1$ , le curve  $\gamma_{1,3}$  della  $V_k^k (\equiv C_k^{-1})$  sono le  $\infty^{2k-2}$  coniche di essa, immagini delle rette di  $S_k^{(1)}$ . Gli  $\infty^{2k-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  sono gli  $E_2$  di queste coniche: l' $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  relativo ad un punto  $P$  e tangente  $t$  è cioè quello costituito da  $P$ , dalla  $t$  e dal piano della conica che passa per  $P$  ed è tangente ivi a  $t$ .

Per  $\delta > 2k-1$ , come si è preannunciato, le  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  dipendono invece da  $\delta-2k+1$  funzioni arbitrarie. Si ha infatti:

Le curve  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  ( $\delta > 2k-1$ ) sono tutte e sole le curve tracciate sopra i coni quadrici (di vertice  $S_{\delta-2k}$ ) situati su  $C_k^{\delta-2k}$ .

Infatti proiettando  $C_k^{\delta-2k}$  dal suo  $S_{\delta-2k}$  singolare sopra un  $S_{\frac{(3k-\delta-1)(3k-\delta+2)}{2}}$  (sghebbato con l' $S_{\delta-2k}$ ) si ottiene una  $V_{\frac{3k-\delta-1}{2}}^{2^{3k-\delta-1}}$  che rappresenta le quadriche di  $S_{\frac{3k-\delta-1}{2}}$ . Siccome una  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  si proietta in una  $\gamma'_{1,3}$  di  $V_{\frac{3k-\delta-1}{2}}^{2^{3k-\delta-1}}$ , cioè in una conica di essa,  $\gamma_{1,3}$  apparterrà ad un cono  $V_{\delta-2k+2}^2$ .

E inversamente: ogni curva tracciata sopra  $V_{\delta-2k+2}^2$  è  $\gamma_{1,3}$  per  $C_k^{\delta-2k}$ . Invero l' $S_{\delta-2k+3}$  a cui appartiene  $V_{\delta-2k+2}^2$  (che contiene l' $S_3$  osculatore di qualunque curva di  $V_{\delta-2k+2}^2$ ) e l' $S_k$  tangente, in un punto  $P$  di  $V_{\delta-2k+2}^2$ , a  $C_k^{\delta-2k}$  stanno in un  $S_{k+1}$  avendo in comune l' $S_{\delta-2k+2}$  tangente in  $P$  a  $V_{\delta-2k+2}^2$ .

Segue che: gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  ( $\delta > 2k-1$ ) relativi ad un punto  $P$  e tangente  $t$  sono costituiti, oltre che da  $P$  e dalla  $t$ , dagli  $\infty^{\delta-2k+1}$  piani, per  $t$ , che appartengono all' $S_{\delta-2k+3}$  ambiente del cono quadrico, situato su  $C_k^{\delta-2k}$  e di vertice  $S_{\delta-2k}$ , che passa per  $P$  ed è tangente ivi alla  $t$ .

OSSERVAZIONE. — Se consideriamo sopra  $C_k^{\delta-2k}$  ( $\delta > 2k-1$ ) un sistema  $\Sigma$  (dipendente da un numero finito di parametri) di curve che siano  $\gamma_{1,3}$  per  $C_k^{\delta-2k}$ , siccome gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  sono  $\infty^\delta$ , i piani osculatori in un punto  $P$  alle curve di  $\Sigma$ , che passano per  $P$  e hanno ivi una data tangente, sono al più  $\infty^{\delta-2k+1}$ , qualunque sia la dimensione di  $\Sigma$ .

3. Se, sopra una  $V_k$ , un sistema  $\Sigma$  di curve è  $\infty^l$ , cioè se vi sono  $\infty^{l-2(k-1)}$  curve di  $\Sigma$  per ogni punto  $P$  e tangente  $t$  [ $l \geq 2(k-1)$ ], avviene, in generale, che i piani osculatori in  $P$  alle curve di  $\Sigma$  passanti per  $P$  e aventi ivi la tangente  $t$  sono appunto  $\infty^{l-2(k-1)}$ . Converremo di chiamare *regolare* il sistema  $\Sigma$  quando, per  $P$  e  $t$  generici, i suddetti piani osculatori sono proprio  $\infty^{l-2(k-1)}$ , e non meno <sup>(1)</sup>.

Ciò posto, si ha:

La  $C_k^{\delta-2k}$  è l'unica  $V_k$  che possiede un sistema regolare  $\infty^{\delta-1}$  di  $\gamma_{1,3}$  (e non un sistema analogo  $\infty^\delta$ ) e che soddisfa al minimo numero di equazioni di Laplace (lin. indep.) compatibile con tale ipotesi ( $k > 1$ ;  $2k-2 \leq \delta-1 \leq 3k-4$ ).

Se  $V_k$  possiede un sistema regolare  $\infty^{\delta-1}$  di  $\gamma_{1,3}$  possiede infatti  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  e quindi per il teorema del n. 1 è la  $C_k^{\delta-2k}$ . La  $C_k^{\delta-2k}$  non può poi possedere un sistema regolare  $\infty^\delta$  di  $\gamma_{1,3}$  perchè gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  sarebbero  $\infty^{\delta+1}$  mentre sono esattamente  $\infty^\delta$ .

Si ha poi:

Sopra  $C_k^{\delta-2k}$ , un sistema regolare di  $\gamma_{1,3}$  di dimensione massima,  $\delta-1$ , (l'unico se  $\delta = 2k-1$ ) è quello formato dalle coniche.

Sopra ogni cono  $V_{\delta-2k+2}^2$  (n. 2) vi sono  $\infty^3(\delta-2k+1)$  coniche (quanti sono i piani di  $S_{\delta-2k+3}$ ) e i coni  $V_{\delta-2k+2}^2$  sono  $\infty^2(3k-\delta-2)$ : le coniche di  $C_k^{\delta-2k}$  sono quindi appunto  $\infty^{\delta-1}$ .

OSSERVAZIONE. — Anche per  $\delta > 2k-1$ , come già per  $\delta = 2k-1$ , gli  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  sono gli  $E_2$  delle coniche di essa, ma, per  $\delta > 2k-1$ , contrariamente a quanto avviene per  $\delta = 2k-1$ , gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{\delta-2k}$  si possono ordinare in curve  $\gamma_{1,3}$  anche in altri infiniti modi (dipendenti da  $\delta-2k+1$  funzioni arbitrarie).

4. Le  $C_k^{\delta-2k}$  offrono, per tutti i valori di  $\delta$ , cioè per

$$2k-1 \leq \delta \leq 3k-3^{(2)},$$

(1)  $\Sigma$  è sempre regolare quand'è definito da proprietà differenziali del 3° ordine (come accade per le  $\gamma_{1,3}$ ). Infatti allora gli  $E_2$  delle curve di  $\Sigma$  aventi in un punto una tangente assegnata sono appunto  $\infty^{l-2(k-1)}$ .  $\Sigma$  è poi senz'altro regolare se  $l = 2(k-1)$ .

(2) Le  $V_k$  dell' $S_{k+1}$ , ed esse sole (come si deduce dalle condizioni del n. 5), posseggono  $\infty^{3k-2} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ . Tutte le curve di una tale  $V_k$  sono  $\gamma_{1,3}$  per essa.



un esempio di  $V_k (k > 1)$  che possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  [l'unico, se  $V_k$  soddisfa esattamente a  $\frac{(4^k - \delta)(\delta - 2k + 1)}{2}$  equazioni di Laplace, lin. indep. (n. 6)].

Per valutare meglio l'interesse di questo contributo esporrò qui gli altri risultati noti sull'argomento, che verranno poi seguiti da una « Osservazione ».

Le uniche  $V_k$  che posseggono  $\infty^{3k-3} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $\delta = 3k - 3$ ) sono, oltre ai coni  $C_k^{k-3}$  di Veronese, le  $V_k$  dell' $S_{k+2}$  (che non siano sviluppabili ordinarie)<sup>(1)</sup>.  $V_k$  dotate di  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $\delta = 2k$ ) sono le  $V_k$  di Segre (varietà delle coppie di punti di due spazi  $S_p, S_q$ ;  $p, q > 0, p + q = k$ )<sup>(2)</sup>, mentre le  $V_k$  sezioni iperpiane delle  $V_{k+1}$  di Segre posseggono  $\infty^{2k-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ .  $V_k$  che posseggono  $\infty^{3k-4} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $\delta = 3k - 4, k > 2$ ) sono invece le varietà  $\Phi_k$ , situate sopra i coni di Veronese, che ho considerate in una mia Nota recente<sup>(3)</sup>.

In un lavoro di prossima pubblicazione nelle « Memorie » di questa Accademia ho poi dimostrato, fra l'altro, che:

*Le uniche  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta (2k - 1 \leq \delta \leq 3k - 2) E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  e che soddisfano al massimo numero di equazioni di Laplace (lin. indep.) compatibile con tale ipotesi, sono le  $V_k$  dell' $S_{4k-\delta-1}$  i cui  $S_k$  tangenti riempiono l' $S_{4k-\delta-1}$  ambiente.*

L'esistenza sopra queste  $V_k$  di  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  dipende unicamente dalla dimensione dello spazio lineare a cui la  $V_k$  appartiene<sup>(4)</sup>. L'interesse che presentano le  $C_k^{\delta-2k}$ , le varietà di Segre e le loro sezioni iperpiane, le  $\Phi_k$ , sta appunto nel fatto che quest'ultime varietà non rientrano nelle precedenti.

Nella Memoria preannunciata si è pure dimostrato che i coni  $V_k$  che proiettano da un  $S_{\delta-2k}$  una  $V_{3k-\delta-1}$  che possiede  $\infty^{2(3k-\delta-1)-2} \gamma_{1,3}$  (che

(1) M. VILLA, la Nota citata. Cfr. anche il n. 9.

(2) Sopra una  $V_k$  di Segre vi sono  $\infty^{2k-1}$  coniche provenienti dalle proiettività fra le coppie di rette dei due spazi: gli  $E_2$  di queste coniche sono gli  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  della varietà. Ma le coniche non sono le uniche  $\gamma_{1,3}$  della  $V_k$ . Infatti ogni curva tracciata sopra una quadrica dell' $S_3$  (immagine delle coppie di punti di due rette di  $S_p, S_q$ ), o sopra un  $S_p$  o  $S_q$  di  $V_k$ , è  $\gamma_{1,3}$  per  $V_k$ . Gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $V_k$  sono dunque organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$ , anche in altri infiniti modi (dipendenti da 1 funzione arbitraria). Le  $\infty^{2k-1}$  coniche costituiscono un sistema di  $\gamma_{1,3}$  regolare (n. 3) di dimensione massima per  $V_k$ .

(3) M. VILLA, *Sopra una classe di  $V_k$  situate sui coni di Veronese*. Questi « Rendiconti », vol. XXVI, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 217.

(4) Gli  $\infty^{3k-m-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_k$  dell' $S_{k+m}$ , i cui  $S_k$  tangenti riempiono l' $S_{k+m}$ , per  $m < k$ , sono organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$  in infiniti modi (dipendenti da  $k - m$  funzioni arbitrarie). Ad esempio, per una  $V_3$  dell' $S_5$  ( $k = 3, m = 2$ ), che non sia sviluppabile ordinaria, si può infatti osservare che sono  $\gamma_{1,3}$  di essa tutte le  $\gamma_{1,3}$  delle superficie in cui è segata da un  $S_4$  generico (su ciascuna di queste superficie vi sono  $\infty^2 \gamma_{1,3}$ ).

comprendono, come caso particolare, i coni  $C_k^{\delta-2k}$ , l' $S_{\delta-2k}$  e lo spazio ambiente di  $V_{3k-\delta-1}$  essendo sghembi, posseggono sempre  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ .

E per  $k=4$ , ho dimostrato in tale Memoria che le  $V_4$  dotate di  $\infty^8 E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $k=4, \delta=8$ ) rientrano tutte in uno dei tipi precedenti. Esse sono cioè: La  $V_4$  di  $S_8$  di Segre (rappresentante le coppie di punti di due piani); la  $\Phi_4$ ; le  $V_4$  dell' $S_7$  (i cui  $S_4$  tangenti riempiono l' $S_7$  ambiente) e i coni che proiettano da un punto una  $V_3$  che possiede  $\infty^4 \gamma_{1,3}$  (il punto essendo fuori dello spazio ambiente della  $V_3$ )<sup>(1)</sup>.

OSSERVAZIONE. — In tutti i casi suddetti, che comprendono tutti i casi noti, gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  della  $V_k$  sono ordinabili in curve  $\gamma_{1,3}$  e queste, se sono  $\infty^p$  gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $V_k$  per ogni punto e tangente, quando  $p=0$  sono  $\infty^{2k-2}$ , mentre se  $p>0$  dipendono da  $p$  funzioni arbitrarie.

Segue, in particolare:

Una varietà di dimensione  $k$  minore di 5 può possedere  $\infty^{2k-2} \gamma_{1,3}$ , ma non può mai possederne  $\infty^d$ , dove  $d > 2k-2$ , senza che le  $\gamma_{1,3}$  dipendano da funzioni arbitrarie.

5. Premettiamo alcuni risultati sulle  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , dai quali discenderà poi la dimostrazione del teorema enunciato nel n. 1.

Determiniamo intanto le condizioni necessarie e sufficienti perchè  $V_k$  possegga  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ .

L' $S_k$  tangente in un punto  $x(\tau_1, \dots, \tau_k)$  a  $V_k$  è individuato dai punti  $x, x_1, x_2, \dots, x_k$  (avendo posto  $x_i = \frac{\partial x}{\partial \tau_i}$ ; si porrà analogamente  $x_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_i \partial \tau_j}, \dots$ ); l' $S_3$  osculatore ad una curva di  $V_k$  in  $x$  è individuato dai punti

$$x, \quad dx = \sum x_i d\tau_i, \quad d^2 x = \sum x_{ij} d\tau_i d\tau_j + \sum x_i d^2 \tau_i,$$

$$d^3 x = \sum x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l + 3 \sum x_{ij} d\tau_i d^2 \tau_j + \dots \quad (i, j, l = 1, 2, \dots, k).$$

Affinchè l' $S_k$  e l' $S_3$  precedenti abbiano un  $S_{k+1}$  congiungente deve essere la matrice

$$(I) \quad \begin{vmatrix} S(I) \\ \sum x_{ij} d\tau_i d\tau_j \\ \sum x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l + 3 \sum x_{ij} d\tau_i d^2 \tau_j \end{vmatrix} = 0,$$

(1) La via per cui sono pervenuto a questo risultato è già esposta nella Nota: VILLA, *Le varietà, a quattro dimensioni, che posseggono  $\infty^7$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$* . Questi «Rendiconti», vol. XXV, ser. 6<sup>a</sup>, 1937, p. 434; nella quale si deve leggere « $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ » in luogo di «curve  $\gamma_{1,3}$ ».



dove  $S(1)$  sta ad indicare le orizzontali formate con le coordinate di  $x$  e di  $x_1, \dots, x_k$ .

Perchè le (1) siano compatibili considerate come equazioni lineari nei differenziali  $d^2 \tau_j$ , deve essere

$$(2) \quad \begin{vmatrix} S(1) \\ \sum x_{1i} d\tau_i \\ \sum x_{2i} d\tau_i \\ \vdots \\ \sum x_{ki} d\tau_i \\ \sum x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l \end{vmatrix} = 0.$$

Affinchè  $V_k$  possenga  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  esattamente (cioè  $\infty^{\delta-2k+1}$  esattamente, fissandone ad arbitrio un punto e la direzione in esso) ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-2$ ) è necessario e sufficiente che siano nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , le matrici che si ottengono dalla (2) sopprimendo  $\delta-2k+1$  delle ultime  $k+1$  orizzontali (e che non siano tutte nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , le matrici che si ottengono dalla

$$(3) \quad \begin{vmatrix} S(1) \\ \sum x_{1i} d\tau_i \\ \sum x_{2i} d\tau_i \\ \vdots \\ \sum x_{ki} d\tau_i \end{vmatrix}$$

sopprimendo  $\delta-2k+1$  delle ultime  $k$  orizzontali).

6. Dalle condizioni precedenti segue, in particolare, che, per  $\delta = 2k-1$ , la matrice (3) è  $\neq 0$ , e, per  $\delta > 2k-1$ , che sono tutte nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , le matrici che s'ottengono dalla (3) sopprimendo  $\delta-2k$  delle ultime  $k$  orizzontali mentre non sono tutte nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , quelle che si ottengono sopprimendo  $\delta-2k+1$  delle ultime  $k$  orizzontali.

Si perviene così al risultato importante:

Se una  $V_k$  ( $k > 1$ ) possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  esattamente ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-2$ ), la varietà  $W$  formata dagli  $S_k$  tangenti ad essa ha esattamente la dimensione

$$2k - (\delta - 2k + 1)^{(1)}.$$

(1) La dimensione della varietà degli  $S_k$  tangenti a una  $V_k$ , in generale, è  $2k$ , ma può anche essere inferiore. Vedi BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*. «Atti dell'Accademia di Torino», vol. 49, 1913, p. 98; TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*. «Atti dell'Accademia di Torino», vol. 49, 1913.

È noto<sup>(1)</sup> che se la  $W$  di una  $V_k$  ha dimensione  $2k - (\delta - 2k + 1)$  la  $V_k$  soddisfa almeno a

$$k(\delta - 2k + 1) - \frac{(\delta - 2k)(\delta - 2k + 1)}{2} = \frac{(4k - \delta)(\delta - 2k + 1)}{2}$$

equazioni di Laplace (lin. indep.).

Si conclude:

*Se una  $V_k$  ( $k > 1$ ) possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  esattamente ( $2k - 1 \leq \delta \leq 3k - 2$ ), essa soddisfa almeno a*

$$\mu = \frac{(4k - \delta)(\delta - 2k + 1)}{2}$$

*equazioni di Laplace (lin. indep.).*

7. Supponiamo ora che  $V_k$  soddisfi esattamente a  $\mu$  equazioni di Laplace (lin. indep.), e dimostriamo il teorema del n. 1.

Basterà dimostrarlo per  $\delta > 2k - 1$ , avendosi, come già si è detto, per  $\delta = 2k - 1$  il teorema di Bompiani, che applicheremo anzi più tardi.

È noto<sup>(2)</sup> che se la  $W$  di una  $V_k$  ha dimensione  $2k - (\delta - 2k + 1)$  e la  $V_k$  verifica il sistema di minima dimensione di equazioni di Laplace compatibile con tale ipotesi, la  $V_k$  è un cono proiettante da un  $S_{\delta-2k}$  una  $V_{3k-\delta-1}$  che verifica nessuna equazione di Laplace ( $2k - 1 < \delta \leq 3k - 3$ ). Ora, una  $V_k$  che possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  e che soddisfa esattamente a  $\mu$  equazioni di Laplace è proprio in queste condizioni (n. 6), e quindi essa è necessariamente un cono proiettante da un  $S_{\delta-2k}$  una  $V_{3k-\delta-1}$  che verifica nessuna equazione di Laplace.

8. Avendo già visto (n. 2) che  $C_k^{\delta-2k}$  possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , per dimostrare completamente il teorema del n. 1 occorre ancora provare che:

*Se un cono  $V_k$ , proiettante da un  $S_{\delta-2k}$  una  $V_{3k-\delta-1}$  non soddisfacente ad equazioni di Laplace (l' $S_{\delta-2k}$  essendo sghembo con lo spazio ambiente di  $V_{3k-\delta-1}$ ), possiede esattamente  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  esso è necessariamente il cono  $C_k^{\delta-2k}$  ( $k > 2$ ,  $2k - 1 < \delta \leq 3k - 3$ ).*

Sia infatti  $P$  un punto del cono  $V_k$  e  $t$  una tangente in esso. Siccome, per ipotesi,  $V_k$  possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , ne possiede  $\infty^{\delta-2k+1}$  per ogni punto  $P$  e direzione  $t$ . Sia  $L$  una curva di  $V_k$  che passa per  $P$ , che è ivi tangente alla  $t$  e tale che il suo  $S_3$  osculatore in  $P$  e l' $S_k$  tangente in  $P$  alla  $V_k$  stiano in un  $S_{k+1}$ : l' $E_2$  in  $P$  di  $L$  è quindi uno degli  $\infty^{\delta-2k+1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  precedenti.

Proiettiamo dall' $S_{\delta-2k}$  singolare di  $V_k$  sopra  $V_{3k-\delta-1}$  il punto  $P$  e la curva  $L$ : siano  $P'$  e  $L'$  le proiezioni. L' $S_3$  osculatore a  $L'$  in  $P'$  e

(1) TERRACINI, op. cit., p. 223.

(2) TERRACINI, op. cit., p. 234.



$l'S_{3k-\delta-1}$  tangente in  $P'$  a  $V_{3k-\delta-1}$  stanno nell' $S_{3k-\delta}$  in cui  $l'S_{k+1}$  precedente (che contiene  $l'S_{\delta-2k}$ ) sega lo spazio ambiente di  $V_{3k-\delta-1}$ :  $l'E_2$  in  $P'$  a  $L'$  è quindi un  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  per  $V_{3k-\delta-1}$ .  $V_{3k-\delta-1}$  possiede dunque per ogni punto e direzione un  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , cioè possiede  $\infty^{2(3k-\delta-1)-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ : siccome  $V_{3k-\delta-1}$  non soddisfa ad alcuna equazione di Laplace, per il teorema di Bompiani, essa è la  $V_{3k-\delta-1}^{2(3k-\delta-1)-1}$  di  $S_{(3k-\delta-1)(3k-\delta+2)}$  rappresentante le quadriche di  $S_{3k-\delta-1}$ . E  $V_k$  è quindi il cono  $C_{k-2}^{\delta-2k(1)}$ .

9. Il teorema del n. 1, per  $\delta$  massimo, cioè  $\delta = 3k - 3$ , si può completare notevolmente cercando tutte le  $V_k$  che posseggono  $\infty^{3k-3} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , prescindendo quindi dall'ipotesi che  $V_k$  soddisfi esattamente a  $\mu = \frac{(k+3)(k-2)}{2}$  equazioni di Laplace (lin. indep.) (n. 6).

La conclusione a cui s'arriva è la seguente:

*Se una  $V_k$  ( $k > 1$ ) possiede  $\infty^{3k-3} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  è il cono di Veronese dell' $S_{k+3}$  oppure una  $V_k$  dell' $S_{k+2}$ , che non sia una sviluppabile ordinaria.*

Infatti se  $V_k$  soddisfa esattamente a  $\mu$  equazioni di Laplace (lin. indep.) per il teorema del n. 1 si ha che  $V_k$  è il cono di Veronese dell' $S_{k+3}$  (cono che proietta da un  $S_{k-3}$  una superficie di Veronese), ossia, per  $k = 2$ , la superficie di Veronese.

Se invece  $V_k$  soddisfa esattamente a  $\mu + 1$  equazioni di Laplace (lin. indep.),  $l'S(2)$  osculatore a  $V_k$  (cioè lo spazio di  $x$  e di tutti i punti derivati d'ordine  $\leq 2$ ) è un  $S_{k+2}$ , essendo appunto  $k + 2$  la differenza fra il massimo

(1) Dal teorema enunciato nel n. 1, ed ora dimostrato, segue il noto teorema, che viene così dimostrato in altro modo:

Una  $V_{k+i}$  tale che le sue sezioni con  $S_{\frac{k(k+3)}{2}}$  dello spazio ambiente siano  $V_k^{2k}$ , rappresentabili su uno  $S_k$  mediante il sistema di tutte le quadriche di questo spazio, è necessariamente il cono  $C_{k+i}^{i-1}$ .

Infatti (ad es. per  $i = 1$ ) siccome la  $V_k^{2k}$  non soddisfa ad equazioni di Laplace,  $V_{k+1}$  non soddisfa a più di  $k + 1$  equazioni di Laplace (cfr. TERRACINI, loc. cit., p. 227). D'altra parte  $V_{k+1}$  possiede, per ogni punto e tangente, almeno  $\infty^1 E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  perchè le  $V_k^{2k}$  sue sezioni iperpiane posseggono, per ogni punto e tangente, un  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  e ogni  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di una  $V_k^{2k}$  lo è pure per  $V_{k+1}$ .  $V_{k+1}$ , per il teorema del n. 1, è quindi il cono  $C_{k+1}^0$  (cfr. il teorema del n. 5 che assegna il numero minimo di equazioni di Laplace a cui soddisfa una  $V_k$  dotata di  $\infty^0 E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ ).

Per  $k = 2$ , cfr.: C. SEGRE, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*. «Atti dell'Accademia di Torino», vol. 21, 1885, p. 95; e BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Messina, 1923, p. 400. Per  $k$  qualunque, cfr.: TANTURRI, *Sopra una proprietà della superficie di Steiner e sue estensioni agli spazî superiori*. «Giornale di Matematiche», vol. 45, 1907, p. 291; SCORZA, *Sopra una certa classe di varietà razionali*. «Rend. del Circolo Matematico di Palermo», to. 28, 1909, p. 400; e TERRACINI, loc. cit.

possibile  $\frac{k(k+3)}{2}$  della dimensione di un  $S(2)$  osculatore ad una  $V_k$  e

$$\mu + 1 = \frac{(k+3)(k-2)}{2} + 1.$$

Dovendo  $V_k$  possedere  $\infty^{3k-3} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , per il n. 5 saranno tutte nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , le matrici che s'ottengono dalla (2) sopprimendo  $k-2$  delle ultime  $k+1$  orizzontali e non saranno tutte nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , quelle che s'ottengono dalla (3) sopprimendo  $k-2$  delle ultime  $k$  orizzontali.

L'annullarsi delle prime porge:

$$\begin{vmatrix} S(2) \\ \Sigma x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l \end{vmatrix} = 0$$

(dove  $S(2)$  sta ad indicare le orizzontali costruite con le coordinate dei punti che lo determinano), identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ . Quindi tutti i punti derivati terzi stanno in  $S(2)$  e perciò anche  $V_k$  sta in un  $S_{k+2}$ .

Per il non annullarsi di tutte le seconde, gli  $S_k$  tangenti a  $V_k$  devono riempire l' $S_{k+2}$  ambiente:  $V_k$  deve cioè non essere sviluppabile ordinaria <sup>(1)</sup>. Inversamente: ogni  $V_k$  dell' $S_{k+2}$ , non sviluppabile ordinaria, soddisfa alle condizioni precedenti.

$V_k$  non può poi soddisfare a  $\mu+2$  equazioni di Laplace (lin. indep.) perchè sarebbero tutte nulle le matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo  $k-2$  delle ultime  $k$  orizzontali.

10. Dai risultati dei nn. 2, 3 ricaviamo, in particolare, per i coni di Veronese  $C_k^{k-3}$ :

Gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di un cono di Veronese  $C_k^{k-3}$  ( $k > 2$ ) relativi ad un punto  $P$  e tangente  $t$  sono costituiti, oltre che da  $P$  e da  $t$ , dagli  $\infty^{k-2}$  piani, per  $t$ , che appartengono all' $S_k$  ambiente del cono quadrico (situato su  $C_k^{k-3}$  e di vertice  $S_{k-3}$ ) che passa per  $P$  ed è tangente ivi alla  $t$ .

Le  $\gamma_{1,3}$  di  $C_k^{k-3}$  per  $k=2$  sono le coniche di essa e per  $k > 2$  sono tutte e sole le curve tracciate sopra i coni quadrici (di vertice  $S_{k-3}$ ) situati su  $C_k^{k-3}$ , e dipendono quindi da  $k-2$  funzioni arbitrarie.

Su  $C_k^{k-3}$ , un sistema regolare di  $\gamma_{1,3}$  di dimensione massima,  $3k-4$ , (l'unico se  $k=2$ ) è quello formato dalle coniche ( $k \geq 2$ ).

Dai nn. 3, 9, si ha poi ( $k \geq 2$ ):

Escluse le  $V_k$  dell' $S_{k+2}$ , l'unica  $V_k$  che possiede un sistema regolare  $\infty^{3k-4}$  di  $\gamma_{1,3}$  (e non un sistema analogo  $\infty^{3k-3}$ ) è il cono di Veronese dell' $S_{k+3}$ .

(1) Le  $V_k$  per le quali la  $W$  degli  $S_k$  tangenti ha dimensione  $k+1$  sono le  $V_k$  dell' $S_{k+1}$  e le  $V_k$  sviluppabili ordinarie (cioè formate da  $\infty^1 S_{k-1}$  con  $S_k$  tangente fisso lungo ogni  $S_{k-1}$  generatore). Quindi, gli  $S_k$  tangenti di una  $V_k$  dell' $S_{k+2}$  non riempiono l' $S_{k+2}$  ambiente solo quando la  $V_k$  è una sviluppabile ordinaria, appunto come s'è affermato nel testo.



**Meccanica.** — *Equilibrio dei solidi e trasformazioni affini.*

Nota <sup>(1)</sup> di C. TOLOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In un suo lavoro di alcuni anni or sono <sup>(2)</sup>, il Sauer, studiando le proprietà delle trasformazioni omografiche dei sistemi di vettori applicati, metteva in rilievo un risultato che, nel caso delle omografie affini (alle quali noi qui esclusivamente ci limiteremo), assume una forma particolarmente espressiva, e cioè:

*Un sistema di vettori applicati in equilibrio si conserva tale anche dopo una qualsiasi trasformazione affine.*

La dimostrazione che il Sauer dà di questa proprietà invariantiva è una dimostrazione analitica. Noi vogliamo mostrare in questa breve Nota come a detto risultato si possa pervenire più suggestivamente con considerazioni sintetiche.

2. Ricordiamo <sup>(3)</sup> che un sistema di vettori applicati è in equilibrio se (e solo se) esso si può ridurre al vettore nullo mediante le sole operazioni elementari: 1° composizione o decomposizione di vettori applicati in un medesimo punto; 2° aggiunta o soppressione di due vettori direttamente opposti.

Ne segue che il risultato che si vuol dimostrare, e cioè che le trasformazioni affini mutano sistemi in equilibrio in sistemi in equilibrio, resterà stabilito ove si mostri che le operazioni elementari sono operazioni invarianti rispetto a dette trasformazioni.

Ora, per quanto riguarda la prima operazione elementare, ciò è conseguenza immediata del fatto che le affinità mutano parallelogrammi in parallelogrammi; e, per quanto riguarda la seconda operazione elementare, la sua invarianza dipende dal fatto che punteggiate corrispondenti sono simili.

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1938.

(2) R. SAUER, *Projektive Sätze in der Statik des starren Körpers*. «Math. Annalen», 110, 1934, pp. 464-472.

(3) Cfr., ad es., T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1930, p. 33.

**Meccanica.** — *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico*<sup>(1)</sup>. Nota I<sup>(2)</sup> di L. GIALANELLA, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

I. INTRODUZIONE E GENERALITÀ. — Il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato nel campo generato da un dipolo magnetico può schematizzare — com'è noto — il problema analitico delle aurore polari, o, più generalmente quello delle radiazioni cosmiche.

Questo problema è stato completamente risoluto nell'ipotesi che il campo magnetico provenga da un solo polo, nel qual caso le equazioni del moto del corpuscolo elettrizzato sono state integrate dal Darboux nel 1878<sup>(3)</sup>. Il risultato è però generalmente attribuito al Poincaré, il quale l'ha ritrovato nel 1896<sup>(4)</sup>; ed esso — com'è noto — spiega completamente il fenomeno dell'aspirazione dei raggi catodici da parte di un polo magnetico, fenomeno scoperto da Birkeland nel 1895<sup>(5)</sup>.

Il problema del dipolo magnetico è stato studiato da C. Stoermer<sup>(6)</sup> nell'intento, appunto, di spiegare il fenomeno delle aurore polari e delle radiazioni cosmiche. Lo Stoermer, però, dopo aver tentato una riduzione delle equazioni differenziali del moto ad una forma particolare, simile a quella di Lagrange, ed esaminati alcuni casi di riduzione delle equazioni differenziali delle traiettorie<sup>(7)</sup>, ha portato la sua attenzione sul caso particolare (di gran lunga più semplice) che si ha supponendo il corpuscolo molto lontano dalla Terra, a più di un milione di Km. per es.; in tal caso si può riguardare il campo magnetico della Terra come generato da un *magnete elementare* posto al centro di essa e avente per asse l'asse magnetico terrestre. Analiticamente, questo importa che delle due distanze  $r_1$  e  $r_2$  tra il corpuscolo elettrizzato in moto e i due poli del magnete, il prodotto  $r_1 r_2$  possa essere sostituito dall'unica distanza  $r^2$  del corpuscolo dal centro del magnete elementare.

Mettendosi appunto in questa ipotesi semplificatrice, pur senza integrare le equazioni differenziali del moto, lo Stoermer, nell'ormai trentennale lavoro

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario).

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1938.

(3) « Bulletin des Sciences Mathématiques », 1878, p. 433.

(4) « Comptes-Rendus », to. CXXIII, 1896, p. 930.

(5) « Archives des Sciences physiques et naturelles », to. VI, 1898, p. 205. Cfr. anche:

APPEL, *Mec. Rat.*, 3<sup>a</sup> ed., 1909, to. I, p. 370.

(6) Ved. Bibliografia completa in fondo.

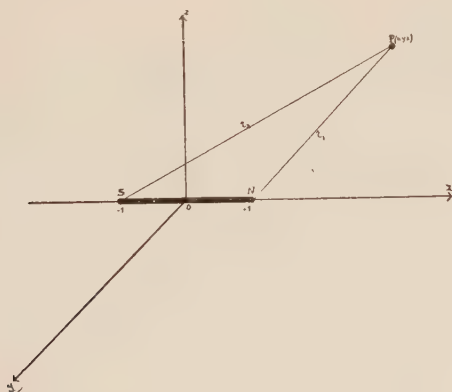
(7) « Comptes-Rendus », to. CXLVI e CXLVII, 1908.

suo e dei suoi assistenti, è riuscito ad ottenere risultati molto importanti, determinando — a mezzo di integrazioni numeriche e meccaniche — numerose traiettorie dei corpuscoli elettrizzati, e portando in tal guisa una buona spiegazione ai tratti essenziali delle esperienze di Birkeland<sup>(1)</sup> e ad alcuni dei fenomeni più cospicui connessi con le aurore polari e le radiazioni cosmiche (ved. Bibliografia completa in fondo).

Io ho voluto riprendere lo studio del problema analitico del dipolo mettendomi nel caso generale, cioè esaminando il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato nel campo generato da un *magnete di dimensioni finite*, magnete schematizzato dal dipolo. In questo caso, com'è noto, le equazioni differenziali del moto non sono state integrate, e di esse si conosce un solo integrale primo che indica la velocità essere costante<sup>(2)</sup>.

In questo mio studio sono partito da una soluzione particolare rigorosa delle equazioni del moto e ho applicato il metodo di Poincaré per la ricerca e lo studio delle traiettorie prossime a questa soluzione particolare (*soluzione generatrice*)<sup>(3)</sup>. In tal maniera son riuscito a trovare un secondo integrale primo, che mi ha permesso, insieme con quello già noto, di ridurre il sistema delle equazioni differenziali al primo ordine, di arrivare ad integrarlo in qualche caso particolare, e a studiare in generale qualitativamente le traiettorie, deducendone interessanti proprietà (comportamento asintotico, schematizzazione del moto, ecc.).

2. LE EQUAZIONI DEL MOTO. — Supponiamo di disporre il magnete lungo l'asse  $x$  di una terna cartesiana trirettangola, in modo che il dipolo NS si disponga nei punti  $+1$  e  $-1$ , e diciamo  $r_1$  e  $r_2$  le distanze rispettive del



(1) « Comptes-Rendus », to. CXLVII, 1908.

(2) Cfr. G. ARMELLINI, *Le aurore boreali* in « Scienza e Tecnica », rivista della S. I. P. S. Roma, vol. 2<sup>o</sup>, fasc. 3<sup>o</sup>, 1938, p. 93.

(3) Naturalmente ho potuto, del metodo di Poincaré, usare soltanto le prime cose poichè le soluzioni del nostro problema non sono *periodiche*.



corpuscolo elettrizzato mobile  $P(xyz)$  da N e da S. Siano poi  $m$  la massa materiale del corpuscolo,  $\varepsilon$  la sua carica elettrica (positiva o negativa), ed  $\mathbf{H}$  il vettore rappresentativo del campo magnetico prodotto dal dipolo. Come si sa dalla fisica, la forza elettromagnetica  $\mathbf{F}$  è normale al vettore  $\mathbf{H}$  ed al vettore rappresentante la velocità del corpuscolo elettrizzato, e precisamente è uguale al loro prodotto vettoriale moltiplicato per la carica elettrica del corpuscolo. Avremo dunque:

$$(1) \quad \mathbf{F} = \varepsilon [\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}] = m\mathbf{a}$$

dove  $\mathbf{v}$  ed  $\mathbf{a}$  denotano la velocità e l'accelerazione del corpuscolo <sup>(1)</sup>.

Dette poi  $X, Y, Z$  le componenti di  $\mathbf{H}$  lungo i tre assi, alla equazione vettoriale (1) si possono sostituire le tre equazioni scalari seguenti:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon \left[ Y \frac{dz}{dt} - Z \frac{dy}{dt} \right] \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon \left[ Z \frac{dx}{dt} - X \frac{dz}{dt} \right] \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon \left[ X \frac{dy}{dt} - Y \frac{dx}{dt} \right]. \end{array} \right.$$

Moltiplicando ordinatamente le tre equazioni per  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ , e sommando si ha:

$$d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = 0$$

ossia:

$$v^2 = v_0^2$$

che è l'unico integrale primo noto, esprimente che il corpuscolo elettrizzato si muove con velocità costante. Questo integrale permetterebbe quindi — come fa sempre lo Stoermer — di eliminare dalle equazioni del moto il tempo  $t$  introducendovi l'arco  $s$  di traiettoria, mediante la relazione  $ds = v_0 dt$ . Ma noi preferiamo continuare a far uso esplicito del tempo.

Ciò posto, le componenti della forza magnetica sono ovviamente date da:

$$X = -k \left[ \frac{x+1}{r_2^3} - \frac{x-1}{r_1^3} \right]$$

$$Y = -ky \left[ \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right]$$

$$Z = -kz \left[ \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right]$$

(1) Cfr. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Mec. Raz.*, vol. II, parte I, p. 205.

dove indichiamo con  $+k$  e  $-k$  la massa magnetica di ciascuno dei poli ed è:

$$r_1^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad r_2^2 = (x + 1)^2 + y^2 + z^2.$$

Posto poi:

$$\mu = -\frac{m}{ek},$$

le equazioni differenziali del movimento assumono la forma definitiva:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} &= \left[ \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right] \left[ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right] \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} &= \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) z \frac{dx}{dt} - \left( \frac{x+1}{r_2^3} - \frac{x-1}{r_1^3} \right) \frac{dz}{dt} \\ \mu \frac{d^2 z}{dt^2} &= \left( \frac{x+1}{r_2^3} - \frac{x-1}{r_1^3} \right) \frac{dy}{dt} - \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) y \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \right.$$

3. LE EQUAZIONI ALLE VARIAZIONI. — Una soluzione particolare delle equazioni del moto (3) si trova facilmente, ed è la seguente:

$$(4) \quad x_0 = at + b \quad , \quad y_0 = 0 \quad , \quad z_0 = 0$$

ossia: l'asse delle  $x$  che contiene il dipolo può essere una traiettoria possibile per il corpuscolo elettrizzato. Si può osservare che vi è la presenza del dipolo lungo questa traiettoria rettilinea. In conseguenza, per precisare il problema, noi considereremo il corpuscolo elettrizzato come *proveniente dall'infinito*, e quindi esamineremo soltanto l'arco di traiettoria prossimo al segmento esterno al dipolo. Su questo fatto dovremo ritornare tra breve; possiamo però aggiungere fin da ora che siffatta limitazione, dal punto di vista fisico, — quando si identifichi il corpuscolo elettrizzato in moto con un corpuscolo cosmico e il dipolo con il magnete terrestre — corrisponde al considerare la traiettoria percorsa dal corpuscolo cosmico *prima* del suo arrivo sulla superficie terrestre. E questo è appunto il problema che *effettivamente interessa nella teoria delle radiazioni cosmiche*.

Ciò detto, assumiamo questa soluzione particolare rigorosa come *soluzione generatrice* nel senso di Poincaré<sup>(1)</sup>; onde, dette  $\xi, \eta, \zeta$  le *variazioni o scarti*, le soluzioni prossime ad essa (*soluzioni variate*) saranno date da:

$$(5) \quad x = x_0 + \xi \quad , \quad y = y_0 + \eta \quad , \quad z = z_0 + \zeta,$$

essendo le  $\xi, \eta, \zeta$  funzioni incognite del tempo da determinare opportunamente. L'unica ipotesi che si fa su di esse (oltre, naturalmente, alla rego-

(1) Cfr. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique celeste*, to. I, 1892, p. 162.



larità) è che siano abbastanza piccole da poterne trascurare i termini di 2° grado. Le equazioni differenziali cui soddisfano le  $\xi, \eta, \zeta$  sono state chiamate da Poincaré *equazioni alle variazioni* <sup>(1)</sup>. Ed esse andranno a sostituirsi, nel nostro problema, alle equazioni differenziali del moto (3). Tali equazioni alle variazioni si scrivono facilmente, partendo dalle (3) e tenendo presenti (4) e (5), nonchè l'ipotesi fatta sulle  $\xi, \eta, \zeta$ . Esse sono le seguenti:

$$(6) \quad \begin{cases} \mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0 \\ \mu \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \left[ \frac{1}{(x_0 + 1)^2} - \frac{1}{(x_0 - 1)^2} \right] \frac{d\zeta}{dt} - \left[ \frac{1}{(x_0 + 1)^3} - \frac{1}{(x_0 - 1)^3} \right] a\zeta \\ \mu \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \left[ \frac{1}{(x_0 + 1)^3} - \frac{1}{(x_0 - 1)^3} \right] a\eta - \left[ \frac{1}{(x_0 + 1)^2} - \frac{1}{(x_0 - 1)^2} \right] \frac{d\eta}{dt} \end{cases}$$

Di queste, la prima  $\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$ , e quindi  $\xi = \alpha t + \beta$ , ci dice subito che la  $x = x_0 + \xi$  ha un moto uniforme lungo l'asse del dipolo; questo fatto ci permetterà di studiare il moto del corpuscolo elettrizzato lungo la traiettoria *variata* svolgentesi sopra un piano ( $\eta\zeta$ ), il quale a sua volta si sposta parallelamente a se stesso di moto uniforme mantenendosi sempre perpendicolare all'asse  $x$  contenente il dipolo.

4. IL SECONDO INTEGRALE PRIMO. — Le equazioni di cui dobbiamo occuparci sono, adunque, soltanto la seconda e la terza delle (6). Esse, ponendo:

$$\begin{cases} at + b = \tau \\ \mu a = \lambda \end{cases}$$

diventano, quando si facciano alcuni semplici passaggi:

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = -4 \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} \frac{d\zeta}{d\tau} + 2 \frac{3\tau^2 + 1}{(\tau^2 - 1)^3} \zeta \\ \lambda \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = 4 \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} \frac{d\eta}{d\tau} - 2 \frac{3\tau^2 + 1}{(\tau^2 - 1)^3} \eta \end{cases}$$

(1) In generale, dato il sistema differenziale:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e trovatane una soluzione particolare (*generatrice*):  $x_i = x_i^0(t)$ , ogni soluzione prossima sarà data da:  $x_i = x_i^0 + \xi_i$ , dove le *variazioni*  $\xi_i$  soddisfano al seguente sistema di *equazioni alle variazioni*:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \right)^0 \xi_1 + \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_2} \right)^0 \xi_2 + \dots + \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_n} \right)^0 \xi_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Per un momento poniamo ancora:

$$w = \frac{1}{\lambda(\tau^2 - 1)}$$

talchè le (7) diventano, quando le derivate rispetto a  $\tau$  si indichino per semplicità con apici:

$$(8) \quad \begin{cases} \eta'' = 2w'\zeta' + w''\zeta \\ \zeta'' = -(2w'\eta' + w''\eta) \end{cases}$$

Ciò posto, moltiplichiamo la prima equazione per  $\zeta$  e la seconda per  $\eta$ , ottenendo:

$$\begin{cases} \eta''\zeta = 2w'\zeta'\zeta + w''\zeta^2 \\ \zeta''\eta = -(2w'\eta'\eta + w''\eta^2) \end{cases}$$

ossia:

$$(9) \quad \begin{cases} \eta''\zeta = \frac{d}{d\tau}(w'\zeta^2) \\ \zeta''\eta = -\frac{d}{d\tau}(w'\eta^2) \end{cases}$$

da cui, sottraendo membro a membro ed integrando, si ottiene ulteriormente:

$$(10) \quad \boxed{\zeta\eta' - \zeta'\eta + \frac{2}{\lambda} \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} (\zeta^2 + \eta^2) = c_2}$$

che è il nuovo integrale primo a cui accennavamo. La  $c_2$  è la costante d'integrazione.

5. IL SISTEMA SI ABBASSA DI ORDINE. INTRODUZIONE DELLE COORDINATE POLARI. — Diciamo adesso  $v_0$  la velocità (costante) del corpuscolo lungo la traiettoria variata; dal teorema delle forze vive si ricava:

$$\left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = v_0^2$$

e quindi, colle posizioni e notazioni già introdotte:

$$(a + \alpha)^2 + a^2 \eta'^2 + a^2 \zeta'^2 = v_0^2$$

dove gli apici denotano, al solito, derivazioni rispetto alla variabile  $\tau$  (proporzionale al tempo). Sicchè l'altro integrale primo, già noto, porge:

$$(11) \quad \eta'^2 + \zeta'^2 = \frac{v_0^2 - (a + \alpha)^2}{a^2};$$



onde le ulteriori equazioni del moto nel piano ( $\eta\zeta$ ) sono le seguenti:

$$(12) \quad \begin{cases} \eta'^2 + \zeta'^2 = c_1 \\ \zeta\eta' - \zeta'\eta + \frac{2}{\lambda} \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} (\zeta^2 + \eta^2) = c_2 \end{cases}$$

avendo chiamato:

$$c_1 = \frac{v_0^2 - (a + \alpha)^2}{a^2}.$$

Introducendo adesso un sistema di coordinate polari ( $\rho, \theta$ ) nel piano ( $\eta\zeta$ ), avente per polo la posizione del corpuscolo lungo la traiettoria generatrice, di guisa che  $\rho$  denota la distanza del corpuscolo dall'asse del dipolo, le equazioni (12) si trasformano nelle seguenti:

$$(13) \quad \begin{cases} \rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 = c_1 \\ \rho^2 \theta' = \frac{2}{\lambda} \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} \cdot \rho^2 - c_2. \end{cases}$$

Ricavando  $\theta'$  dalla seconda si ha:

$$\theta' = \frac{2}{\lambda} \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} - \frac{c_2}{\rho^2}$$

e sostituendo nella prima:

$$(14) \quad \rho'^2 + \frac{4}{\lambda^2} \frac{\tau^2}{(\tau^2 - 1)^4} \cdot \rho^2 - \frac{4}{\lambda} c_2 \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} + c_2^2 \frac{1}{\rho^2} = c_1.$$

Come abbiamo già accennato, i punti per cui la variabile indipendente  $\tau$  (proporzionale al tempo) assume i valori  $\pm 1$ , corrispondenti cioè ai due poli magnetici, sono, per quanto non diano fastidio alla soluzione generatrice, certamente *punti singolari*. E cercheremo di studiarli; intanto possiamo cominciare con l'escluderli, considerando quindi il corpuscolo proveniente dall'infinito e la parte di traiettoria esterna all'intervallo del dipolo, parte in cui la funzione  $F(\rho, \theta) = 0$ , per cui sono valide le equazioni alle variazioni di Poincaré, è certamente regolare.

Cominceremo allora a studiare il comportamento *asintotico* della  $\rho$ , e quindi della  $\theta$ , quando  $\tau$ , supposto  $> 1$ , tenda all' $\infty$ . Ma prima vogliamo fare delle considerazioni sopra alcuni casi particolari.

6. CASI PARTICOLARI. — a) Supponiamo che nelle equazioni (13) sia la costante  $c_1 = 0$ , ossia  $v_0 = a + \alpha$  [dove, ricordiamo,  $a$  è la velocità, costante,

del corpuscolo nella soluzione generatrice lungo l'asse del dipolo e  $\alpha$  è la velocità, anch'essa costante, con cui si muove il piano delle  $(\rho\theta)$ ; allora l'equazione (14) diventa:

$$(15) \quad \rho'^2 + \rho^2 \left[ \frac{2}{\lambda} \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} - \frac{c_1}{\rho^2} \right] = 0$$

e questa, evidentemente, non ammette soluzioni nel campo reale. Sicchè nelle equazioni (13) *deve essere sempre*  $c_1 \neq 0$ , ossia  $v_0 \neq a + \alpha$ . Vedremo appresso che dovrà essere anche  $c_1 > 0$ .

b) Se invece è  $c_2 = 0$ , le equazioni (13) diventano:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho'^2 + \rho^2 \theta'^2 = c_1 \\ \theta' = \frac{2}{\lambda} \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^2} \end{array} \right.$$

e dalla seconda, integrando:

$$(17) \quad \theta - \theta_0 = - \frac{1}{\lambda (\tau^2 - 1)}$$

che, sostituita nella prima, dà:

$$(18) \quad \rho'^2 = c_1 - \frac{4}{\lambda^2} \frac{\tau^2}{(\tau^2 - 1)^4} \rho^2.$$

Sostituendo in quest'ultima a  $\tau$  il suo valore in funzione di  $\theta$ , otteniamo l'equazione differenziale della traiettoria nel piano mobile  $(\rho\theta)$ . Da (17) si ha:

$$\tau^2 = \frac{\lambda (\theta - \theta_0) - 1}{\lambda (\theta - \theta_0)}$$

ossia, chiamando per semplicità  $\theta - \theta_0 = \vartheta$ :

$$\tau^2 = \frac{\lambda \vartheta - 1}{\lambda \vartheta} \quad \text{e} \quad d\tau^2 = \frac{1}{4 \lambda (\lambda \vartheta - 1) \vartheta^3} d\vartheta^2$$

per cui, sostituendo in (18), otteniamo:

$$(19) \quad \left( \frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 + \rho^2 = \frac{c_1}{4 \lambda (\lambda \vartheta - 1) \vartheta^3}$$

che è la equazione differenziale della traiettoria.



Il secondo membro deve essere positivo. Ora la costante  $c_1$  — come mostreremo nel paragrafo seguente — deve essere sempre positiva; d'altra parte, se la carica elettrica del corpuscolo è negativa (com'è logico supporre), per le posizioni fatte risulta anche  $\lambda > 0$ ; quindi, affinché il 2° membro di (19) sia positivo, dovrà essere sempre:

$$\vartheta > \frac{1}{\lambda}$$

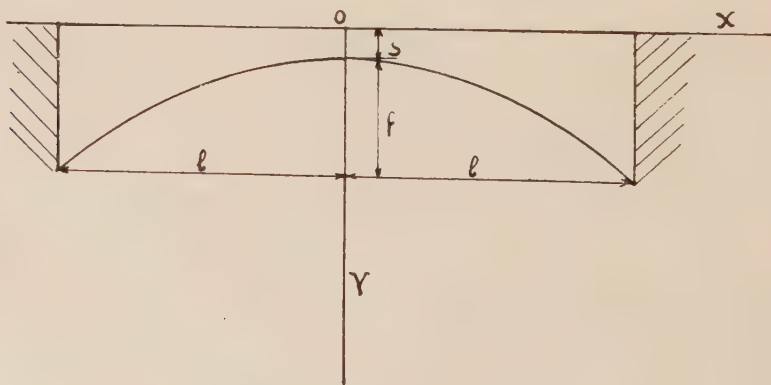
ossia:

$$(20) \quad \theta > \theta_0 + \frac{1}{\lambda}.$$

**Meccanica.** — *Ricerche sugli archi elastici: Risoluzione coi metodi dell'« elasticità vincolata » di uno speciale tipo di arco.* Nota <sup>(1)</sup> di E. VOLTERRA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In un seguito di Note pubblicate su questi « Rendiconti » <sup>(2)</sup> ho studiato coi metodi della « elasticità vincolata » le deformazioni dei solidi elastici allungati (a due dimensioni) ad asse sia rettilineo che curvilineo, di spessore costante o leggermente variabile.

Voglio ora mostrare come mediante i metodi della « elasticità vincolata » sia possibile studiare le deformazioni di una categoria di archi importantissima per la Tecnica. Tali archi risultano limitati superiormente da un piano orizzontale, inferiormente da una superficie cilindrica e lateralmente da due piani d'incastro (ved. figura).



(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1938.

(2) Ved. « Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei » degli anni 1932, 1934, 1935, 1936.

Se si suppone che vi sia identità di comportamento tra le singole sezioni del solido parallele al suo piano di simmetria, gioverà, onde semplificare i calcoli, studiare il problema in due dimensioni. Potremo in conformità limitarci al piano di simmetria dell'arco e indicheremo con la lettera  $x$  l'ascissa della linea che limita superiormente l'arco, con  $y$  l'asse normale nel punto di mezzo (ved. figura).

Supporremo al solito il vettore spostamento elastico del tipo  $u = \lambda y + v$  essendo  $\lambda$  e  $v$  due vettori infinitesimi funzioni *a priori* incognite della sola  $x$ . Indicando con  $u$  e  $v$  le componenti dello spostamento secondo gli assi  $x$  e  $y$ , con  $\lambda_x, \lambda_y, v_x, v_y$  le componenti dei vettori  $\lambda$  e  $v$  sui medesimi assi, otterremo:

$$(1) \quad \begin{cases} u = \lambda_x y + v_x \\ v = \lambda_y y + v_y; \end{cases}$$

saranno le componenti della deformazione

$$(2) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{dv_x}{dx} \\ \gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda_y \\ \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \lambda_x + y \frac{d\lambda_y}{dx} + \frac{dv_y}{dx}; \end{cases}$$

il lavoro di deformazione sarà espresso da:

$$\Phi = \int \left[ \frac{L}{2} \theta^2 + k\psi \right] dx dy dz,$$

essendo

$$(3) \quad \theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} = y \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{dv_x}{dx} + \lambda_y$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \psi = \gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{12}^2 = & y^2 \left( \frac{d\lambda_x}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv_x}{dx} \right)^2 + 2y \frac{d\lambda_x}{dx} \frac{dv_x}{dx} + \lambda_y^2 + \\ & + \frac{1}{2} \lambda_x^2 + \frac{1}{2} y^2 \left( \frac{d\lambda_y}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_y}{dx} \right)^2 + y\lambda_x \frac{d\lambda_y}{dx} + \lambda_x \frac{dv_y}{dx} + y \frac{d\lambda_y}{dx} \frac{dv_y}{dx}, \end{aligned}$$

ed integrando parzialmente rispetto alle variabili  $y$  e  $z$  ed indicando con  $A, S, I$ , rispettivamente l'area della sezione, il suo momento statico ed il suo momento d'inerzia rispetto all'asse delle  $x$  abbiamo:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \Phi = \int_0^x & \left\{ \frac{L}{2} I \left( \frac{d\lambda_x}{dx} \right)^2 + A \left( \frac{dv_x}{dx} \right)^2 + A (\lambda_y)^2 + 2S \frac{d\lambda_x}{dx} \frac{dv_x}{dx} + \right. \\
 & + 2S \frac{d\lambda_x}{dx} \lambda_y + 2A \frac{dv_x}{dx} \lambda_y \left. \right\} + k \left\{ I \left( \frac{d\lambda_x}{dx} \right)^2 + A \left( \frac{dv_x}{dx} \right)^2 + \right. \\
 & + 2S \frac{d\lambda_x}{dx} \frac{dv_x}{dx} + A (\lambda_y)^2 + \frac{1}{2} A \lambda_x^2 + \frac{1}{2} I \left( \frac{d\lambda_y}{dx} \right)^2 + \\
 & \left. + \frac{1}{2} A \left( \frac{dv_y}{dx} \right)^2 + S \lambda_x \frac{d\lambda_y}{dx} + A \lambda_x \frac{dv_y}{dx} + S \frac{d\lambda_y}{dx} \frac{dv_x}{dx} \right\} dx.
 \end{aligned}$$

Secondo il criterio generale della « elasticità vincolata », la condizione di equilibrio corrisponde al minimo del lavoro di deformazione. Abbiamo così le quattro equazioni seguenti determinatrici delle quattro funzioni incognite  $\lambda_x, \lambda_y, v_x, v_y$ :

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \left\{ \begin{aligned} & k A \lambda_x + (k - L) S \frac{d\lambda_y}{dx} + k A \frac{dv_y}{dx} - (L + 2k) I \frac{d^2 \lambda_x}{dx^2} - \\ & - (L + 2k) \frac{dI}{dx} \frac{d\lambda_x}{dx} - (L + 2k) S \frac{d^2 v_x}{dx^2} - \\ & - (L + 2k) \frac{dS}{dx} \frac{dv_x}{dx} - L \frac{dS}{dx} \lambda_y = 0 \\ & (L + 2k) A \lambda_y + (L - k) S \frac{d\lambda_x}{dx} + L A \frac{dv_x}{dx} - k \frac{dI}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} - \\ & - k I \frac{d^2 \lambda_y}{dx^2} - k \frac{dS}{dx} \lambda_x - k S \frac{d^2 v_y}{dx^2} - k \frac{dS}{dx} \frac{dv_y}{dx} = 0. \\ & (L + 2k) A \frac{d^2 v_x}{dx^2} + (L + 2k) \frac{dA}{dx} \frac{dv_x}{dx} + (L + 2k) S \frac{d^2 \lambda_x}{dx^2} + \\ & + (L + 2k) \frac{dS}{dx} \frac{d\lambda_x}{dx} + L \frac{dA}{dx} \lambda_y + L A \frac{d\lambda_y}{dx} = 0 \\ & k \frac{dA}{dx} \frac{dv_y}{dx} + k A \frac{d^2 v_y}{dx^2} + k \frac{dA}{dx} \lambda_x + k A \frac{d\lambda_x}{dx} + \\ & + k \frac{dS}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} + k S \frac{d^2 \lambda_y}{dx^2} = 0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Se agisce una forza verticale unitaria  $p(x)$  si dovrà introdurre nel principio variazionale anche il lavoro di tale forza. Tale lavoro è:

$$\begin{aligned}
 P = - \int_0^x p(x) v dV = - \int_0^x p(x) [\lambda_y y + v_y] dx dy dz = - \\
 - \int_0^x p(x) [\lambda_y S + A v_y] dx;
 \end{aligned}$$



le equazioni (6) diverranno perciò:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & kA\lambda_x + (k-L)S \frac{d\lambda_y}{dx} + kA \frac{dv_y}{dx} - (L+2k)I \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} - \\
 & - (L+2k) \frac{dI}{dx} \frac{d\lambda_x}{dx} - (L+2k)S \frac{d^2v_x}{dx^2} - \\
 & - (L+2k) \frac{dS}{dx} \frac{dv_x}{dx} - L \frac{dS}{dx} \lambda_y = 0 \\
 & (L+2k)A\lambda_y + (L-k)S \frac{d\lambda_x}{dx} + LA \frac{dv_x}{dx} - k \frac{dI}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} - \\
 & - kI \frac{d^2\lambda_y}{dx^2} - k \frac{dS}{dx} \lambda_x - kS \frac{d^2v_y}{dx^2} - \\
 & - k \frac{dS}{dx} \frac{dv_y}{dx} + p(x)S = 0 \\
 & (L-2k)A \frac{d^2v_x}{dx^2} + (L+2k) \frac{dA}{dx} \frac{dv_x}{dx} + (L+2k)S \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} + \\
 & + (L+2k) \frac{dS}{dx} \frac{d\lambda_x}{dx} + L \frac{dA}{dx} \lambda_y + LA \frac{d\lambda_y}{dx} = 0 \\
 & k \frac{dA}{dx} \frac{dv_y}{dx} + kA \frac{d^2v_y}{dx^2} + k \frac{dA}{dx} \lambda_x + kA \frac{d\lambda_x}{dx} + k \frac{dS}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} + \\
 & + kS \frac{d^2\lambda_y}{dx^2} + p(x)A = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Se risolviamo ora le (7) rispetto alle derivate seconde delle funzioni  $\lambda_x, \lambda_y, v_x$  e  $v_y$  ricaviamo:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} = \frac{12}{(L+2k)} \left[ \frac{k}{y^2} \lambda_x + \frac{k}{2y} \frac{d\lambda_y}{dx} + \frac{k}{y^2} \frac{dv_y}{dx} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2y} \frac{dy}{dx} (L+2k) \frac{d\lambda_x}{dx} - \frac{1}{2y^2} (L+2k) \frac{dy}{dx} \frac{dv_x}{dx} - \frac{L}{2y^2} \frac{dy}{dx} \lambda_y \right] \\
 & \frac{d^2\lambda_y}{dx^2} = \frac{12}{k} \left[ -\frac{k}{2y^2} \lambda_x \frac{dy}{dx} - \frac{k}{2y^2} \frac{dy}{dx} \frac{dv_y}{dx} - \frac{k}{2y} \frac{dy}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} + \right. \\
 & \left. + \frac{L}{2y} \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{L}{y^2} \frac{dv_x}{dx} + \frac{L+2k}{y^2} \lambda_y \right] \\
 & \frac{d^2v_x}{dx^2} = \frac{12}{(L+2k)} \left[ \frac{L+2k}{6y} \frac{dy}{dx} \frac{dv_x}{dx} + \frac{L}{6y} \frac{dy}{dx} \lambda_y + \right. \\
 & \left. + \frac{L+2k}{6} \frac{dy}{dx} \frac{d\lambda_x}{dx} - \frac{L+3k}{12} \frac{d\lambda_y}{dx} - \frac{k}{2y} \lambda_x - \frac{k}{2y} \frac{dv_y}{dx} \right] \\
 & \frac{d^2v_y}{dx^2} = \frac{12}{k} \left[ \frac{k}{6y} \frac{dy}{dx} \frac{dv_y}{dx} + \frac{k}{6y} \frac{dy}{dx} \lambda_x - \frac{3L+k}{12} \frac{d\lambda_x}{dx} + \right. \\
 & \left. + \frac{k}{6} \frac{dy}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} - \frac{L+2k}{2y} \lambda_y - \frac{L}{2y} \frac{dv_x}{dx} - \frac{p(x)}{12} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

La funzione  $y(x)$  che compare nelle equazioni (8) rappresenta l'ordinata della curva che limita inferiormente il solido elastico (direttrice dell'intradosso) misurata a partire dall'asse delle  $x$ .

Il problema dello studio delle deformazioni e delle sollecitazioni dell'arco è ricondotto all'integrazione delle quattro equazioni differenziali ordinarie (8).

Particolare interesse presenta per le applicazioni della Tecnica il caso in cui la curva che limita l'arco sia una parabola di equazione (ved. figura):

$$y = s + f \frac{x^2}{l^2}.$$

Il prof. Picone mi ha promesso la collaborazione dell'Istituto per le Applicazioni di Calcolo da lui diretto per la risoluzione numerica delle equazioni (8) per differenti condizioni di carico: carico uniformemente ripartito, carico concentrato in determinate sezioni, peso proprio e per valori dei rapporti  $\frac{f}{l}$  e  $\frac{s}{f}$  compresi negli intervalli:

$$\frac{1}{3} \geq \frac{f}{l} \geq \frac{1}{6} \quad ; \quad \frac{1}{8} \geq \frac{s}{f} \geq \frac{1}{12}.$$

**Geologia.** — *Contributo alla conoscenza della costituzione geologica del ciglione dell'altipiano Etiopico.* Nota <sup>(1)</sup> di A. FRANCAVIGLIA, presentata dal Corrisp. M. GORTANI.

Ho avuto agio di percorrere il ciglione dell'altipiano Etiopico nella zona di Balci.

Balci siede al confine fra le due regioni dello Scionkorà e del Mingiara; queste due regioni costituiscono due altipiani separati da un gradino alto circa 150 metri.

L'altipiano dello Scionkorà costituisce un grande bacino limitato ad ovest e nord-ovest dalla catena dei monti Boccam, a sud e sud-est dal gradino che la separa dal Mingiara, ad est e nord-est dalla profonda valle del Cassam, che più a monte assume il nome di Germama. Il fondo di questo grande bacino è attraversato da due corsi di acqua principali: il Gherbadì e lo Scionkorà, a corso perenne, che si riuniscono in una profonda incassatura scavata nel sottostante tavoliere del Mingiara, prendendo il nome di Burca e confluendo nel Cassam in località Cicca Colla.

Caratteristica comune a questi due corsi d'acqua è di incidere profondamente l'orlo dell'altipiano, mettendo in vista la struttura del sottosuolo,

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1938.

e di avere un profilo longitudinale formato a gradinata, perchè il loro letto incide una serie alternata di colate laviche e di banchi di tufo vulcanico.

L'altipiano del Mingiara si presenta come una larga gradinata composta di tre gradini: il superiore lievemente inclinato verso nord (infatti le acque scorrono verso il Burca), gli altri due inclinati verso sud; le loro acque sono raccolte dal Lago Tabo che va a perdersi nella pianura di Malca Gilo.

Il gradino inferiore costituisce la piana di Ualanchiti, ed è la continuazione del fondo della valle dell'Auasc, dalla quale è separato dalla catena dei M. Boseti.

Percorrendo la valle del Gherbadì si incontrano, dall'alto in basso, i seguenti elementi costitutivi:

- 1° una copertura di tufi vulcanici e frammenti di ossidiane;
- 2° un complesso di sabbie e arenarie gialle tenere, racchiudenti strati di argille, potente una cinquantina di metri;
- 3° una serie di tre colate acide (forse pantelleriti e trachiti) intramezzate da strati di tufi vulcanici, che nella parte inferiore assumono l'aspetto di una breccia;
- 4° una colata di basalto porfiroide;
- 5° un banco di arenarie variegata.

La stessa successione si incontra al limite fra il primo ed il secondo gradino del Mingiara, meno le arenarie variegata, e fra il secondo e la piana di Ualanchiti. Si deve perciò dedurre che l'altipiano del Mingiara è sprofondato rispetto lo Scionkorà dopo la deposizione delle colate laviche, e così la piana di Ualanchiti rispetto al Mingiara, e che perciò il ciglione dell'altipiano e gli orli dei gradini sottostanti rappresentano altrettanti piani di faglia.

Questi piani hanno in genere direzione est-ovest e sono inclinati verso sud.

Lo spaccato costruito in base a questi elementi si distacca da quello presentato da Arsandaux per la medesima località <sup>(1)</sup>, per il fatto che Arsandaux non menziona le sabbie e arenarie gialle che coprono la serie vulcanica, nè le arenarie variegata che sottostanno ai basalti.

Le arenarie variegata costituiscono le rocce più antiche che si incontrano in questa località. Sono durissime; si presentano nettamente stratificate, di colore grigio verdastro con sottili venature grigio azzurre.

Gli strati hanno, in generale, una direzione est-ovest, con una pendenza di circa 20° verso nord. Gli strati si presentano spesso piegati e contorti; questi piegamenti sono però dovuti alle ultime manifestazioni del vulcanesimo locale; infatti lungo la valle si notano splendidi esempi di dicchi che hanno attraversato tutta la formazione, e che, secondo il mio parere, rap-

(1) H. ARSANDAUX, *Contribution à l'étude des roches alcalines de l'Est africain*. « C. R. Scient. de la Mission Duchesne-Fournet ». Paris, 1906.



presentano i camini delle ultime eruzioni che hanno dato i tufi ricoprenti le arenarie e le sabbie gialle, ed i piegamenti sono accentuati in vicinanza di questi dicchi.

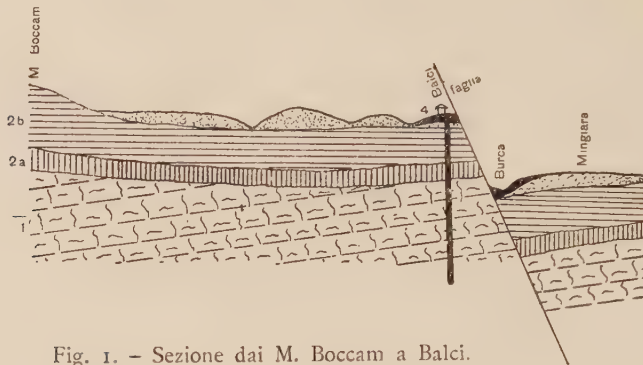


Fig. 1. - Sezione dai M. Boccam a Balci.

1 Arenarie variegata (arenarie superiori); 2 Vulcaniti della serie trappica (2 a basalti porfiroidi, 2 b Lave acide); 3 Arenarie e Sabbie gialle con lenti di argilla; 4 Vulcaniti recenti.

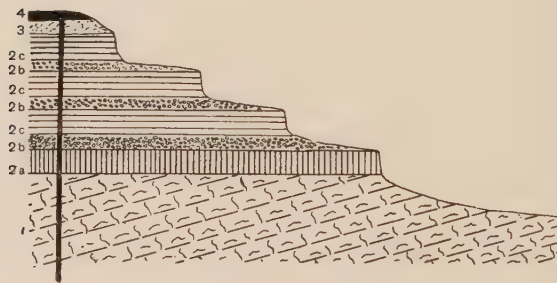


Fig. 2. - Sezione longitudinale della Valle del Gherbadi.

1 Arenarie variegata (arenarie superiori); 2 Vulcaniti della serie trappica (2 a basalti porfiroidi, 2 b tufi, 2 c lave acide); 3 Arenarie e sabbie gialle con lenti di argilla; 4 Vulcaniti recenti.

Le arenarie variegata non contengono fossili, per cui è impossibile attribuire loro un'età certa; si possono solo fare delle induzioni e delle ipotesi. Il Duparc, in uno spaccato ideale dell'altipiano e della fossa dell'Auasc<sup>(1)</sup>, ammette che sulle rocce cristalline del basamento riposino le arenarie di Adigrat, e su queste i calcari del Giura-lías. L'Aubry, in uno spaccato della valle dell'Abai<sup>(2)</sup>, in una zona, cioè, molto vicina a quella in esame, mostra

(1) L. DUPARC et E. MOLLY., *Sur la tectonique de l'Abyssinie*. «C. R. Soc. Phys. et Hist. Nat. Genève», 44, 1927.

(2) A. AUBRY, *Observations géologiques sur les Pays Danakils, Somalis, le Royaume du Choa et les Pays Gallas*. «Bull. Soc. Géol. Fr.», 14, 1886.

che i trappi dell'altipiano riposano direttamente sopra un complesso di strati che il Krenkel attribuisce al Cretaceo inferiore, costituiti da conglomerati ed arenarie, che formano il complesso chiamato delle arenarie superiori o sopracalcaree. Il Dreyfuss, nello spaccato Dire Daoua-Harrar <sup>(1)</sup>, pone le arenarie superiori anche sulle zolle di frattura verso l'orlo settentrionale dell'altipiano somalo.

Le arenarie in questione differiscono nell'aspetto dalle arenarie di Adigrat, e non credo che si possano attribuire alla serie di Adigrat, perchè in nessun posto affiorano gli scisti cristallini sui quali dovrebbero riposare, nè si hanno nella zona prove dell'esistenza di calcari giurassici che dovrebbero ricoprire le arenarie.

Si hanno invece prove indirette dell'esistenza di calcari soggiacenti alle arenarie in questione: infatti, ovunque, in rapporto a delle sorgenti, affioranti sempre al contatto fra le arenarie ed i basalti, o fra i basalti ed i tufi soprastanti, si hanno dei depositi di travertino; il che dimostra che le acque emergenti sono ricche di carbonato di calcio, arricchimento che può essere attribuito, in massima parte, allo scorrere delle acque stesse attraverso strati di rocce calcaree, poichè i basalti che potrebbero dare per disfacimento dei plagioclasti sodico-calcici un notevole apporto di carbonato di calcio, si presentano pressochè inalterati.

Credo perciò che queste arenarie possano attribuirsi alla facies arenacea del Cretaceo inferiore, ed essere considerate quindi come arenarie superiori o sopracalcaree.

A queste arenarie sono sovrapposte le vulcaniti. Lo Stefanini <sup>(2)</sup> è incerto a quale serie attribuirle. A me mancano gli elementi petrografici per tentare una distinzione di queste vulcaniti in trappi della serie di Magdala o di Ascianghi, e serie di Aden; debbo però accettare la distinzione di Lamare in due serie, una stratoide, costituita da una colata basaltica ed almeno tre colate di lave acide (e queste lave devono essere fluite anteriormente alla formazione delle fratture che hanno originato lo sprofondamento della fossa dell'Auasc); una seconda molto più recente, corrispondente alla serie di Aden, alla quale vanno attribuite le eruzioni che coprono le sabbie ed arenarie gialle giacenti sopra i trappi, eruzioni molto limitate sull'altipiano dello Scionkorà, estesissime sul Mingiara. Che queste eruzioni, eminentemente esplosive, siano posteriori alla deposizione delle sabbie ed arenarie gialle, è provato anche dal fatto che lungo la valle del Gherbadì si incontrano dei dicchi che traversano le arenarie sopracalcaree, i trappi e le arenarie gialle; nonchè dall'esistenza di un banco di ceneri giacente sulle arenarie gialle, racchiudente una ricca fauna di gasteropodi di acqua dolce, nel punto ove la valle del

(1) M. DREYFUSS, *Itinéraire géologique de Diré-Daoua à Harrar*. «Bull. Soc. Hist. nat. du Doubs», 1931.

(2) G. STEFANINI, *Saggio di una carta geologica dell'Eritrea, della Somalia e dell'Etiopia*. Note illustrative. Firenze, 1936.

Gherbadi, sboccando nel tavoliere del Mingiara, piega verso est; questa fauna è del tutto uguale a quella vivente nelle acque stagnanti della regione.

Una fauna identica l'ho rinvenuta nel fondo della valle dell'Auasc, a Metahara, racchiusa in un banco di pozzolana.

Non trovandosi in esse specie estinte, queste faune debbono essere attribuite al Quaternario.

In base a queste osservazioni mi sembra che si possa asserire che i fenomeni geologici nella regione si siano succeduti nel seguente ordine:

- 1° deposizione delle arenarie sopracalcaree (cretacee);
- 2° eruzione della serie stratoide;
- 3° sprofondamento della fossa dell'Auasc;
- 4° sedimentazione delle sabbie ed arenarie gialle, in ambiente almeno paludoso;
- 5° eruzioni della serie di Aden, localizzate nel fondo della fossa e lungo gli orli delle fratture.

Resta così confermato che lo sprofondamento della fossa dell'Auasc è avvenuto in tempi recenti, forse nell'Oligocene come ritiene il Krenkel<sup>(1)</sup>, il quale ammette ancora che la valle dell'Auasc rappresenti un termine di unione incompleto ed ancora in procinto di sviluppo fra la depressione eritrea e quella est-africana, ipotesi confermata anche dall'esistenza di numerose sorgenti termali lungo le faglie, e di fenomeni post-vulcanici nella zona del Fantalè e dei M. Boseti.

(1) E. KRENKEL, *Abessomalien*. « Handbuch der Regionalen Geologie », VII, Heidelberg, 1926.



**Fisiologia.** — *Di una possibilità di sintesi della vitamina antiscorbutica nella cavia* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di M. MITOLO, presentata dal Socio S. BAGLIONI.

La questione di una sintesi delle vitamine nell'organismo animale è oggi una delle più controverse. Ho avuto, di recente, occasione di esporne lo stato attuale <sup>(3)</sup>; in questa Nota riferisco i risultati di alcune prove *in vitro*, che sono la conseguenza di un mio precedente studio sulle correlazioni intervitaminiche <sup>(4)</sup>; in esso ripetutamente osservai che, se a cavie tenute a dieta scorbutogena (*ad libitum*) si somministrava una larga dose quotidiana di complesso vitaminico B, sotto forma di lievito di birra secco (gr. 10, *pro die* e per animale), in modo da realizzare le condizioni di avitaminosi C e contemporanea ipervitaminosi B, la durata di sopravvivenza delle cavie era più lunga (36-39 giorni) di quella degli animali in stato di semplice avitaminosi C (23-29 giorni). La perdita di peso era scarsa, il pelame si manteneva sempre in buone condizioni, gli altri sintomi scorbutici (dolori articolari e nicali alla pressione), assai lievi, comparivano con ritardo. Gli animali giungevano a morte, dopo aver avvertito, negli ultimi tempi, soltanto lieve dolenzia alla pressione in corrispondenza delle giunture, non tumefatte. All'autopsia le emorragie, di scarsa entità, erano visibili solo negli organi interni e sotto la cute, non nelle articolazioni. Sicchè un ritardo ed una evidente attenuazione dei sintomi, un discreto prolungamento della sopravvivenza, la mancanza di dolori veri e propri alla pressione sulle giunture e di emorragie articolari sono le caratteristiche della cavia a vitto scorbutogeno, ma ricco di complesso B. Non sembra facile dare una spiegazione di questo fatto; la più semplice sarebbe che l'animale, posto nelle speciali condizioni di esperimento, sia in grado di elaborare per suo conto una certa quantità di vitamina C, utilizzando materiali più semplici ricavati dallo stesso vitto scorbutogeno e dall'eccesso di lievito di birra.

Intanto è certo che il lievito di birra secco non contiene il fattore vitaminico C, come risulta dalle prove biologiche di Hess <sup>(5)</sup>; lo stesso stato di secchezza del lievito di birra esclude il fatto che esso possa contenere la vitamina antiscorbutica. Per il lievito di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1938.

(3) M. MITOLO, *Vitamine*. — *Odierni aspetti del problema*. Rosenberg e Sellier, Torino, 1937.

(4) *Id.*, « Il Problema Alimentare », VI, 1936, 47.

(5) A. F. HESS, « Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med. », XIII, 1916, p. 145.

birra la prova biologica è di fondamentale importanza, perchè, con i metodi chimici di dosaggio del fattore C, basati sulla sua proprietà ossido-riducente, si ottengono valori di riduzione degli indicatori che non sono da attribuire alla presenza di vitamina antiscorbutica nel lievito stesso. Ricorderò che il lievito di birra è stato uno dei materiali più usati negli studi sul meccanismo dei processi di ossidazione: Thunberg, Ahlgren, Harden, Meyerhof, von Euler, Nilsson, Lipmann e specialmente Wieland e Collaboratori hanno stabilito che i lieviti posseggono reductasi (deidrogenasi) atte, fra l'altro, a ridurre (scolorare) il bleu di metilene. Anche la tionina, l'indigodisulfonato, il bleu Nilo, il bleu di cresile, il verde Janus sono totalmente o parzialmente ridotti dal lievito, a pH 7.2, in presenza di Ringer glucosato; mentre altri indicatori di ossido-riduzione, che hanno un rH al disotto di 6, restano immutati (Aubel e Genevois, (1)). Gli stessi effetti si hanno per la presenza, nei lieviti, del glutatione, ivi scoperto da Hopkins, e che oggi si prepara, con tecniche sempre più perfezionate, dai lieviti stessi (Pirie, (2); Régnier, (3); Kozłowski, (4)). Secondo Lebedew (5), l'autolisato di lievito fresco scolora, anche dopo ebollizione, il bleu di metilene, proprio per opera del glutatione. Fabre e Simonnet (6), in una serie di ricerche sul lievito di birra in rapporto ai fenomeni di ossido-riduzione, hanno visto che il lievito fresco, quand'è lavato, non cede all'acqua di lavaggio alcun legame sulfidrilico; ciò, invece, avviene o per estrazione del lievito fresco con ac. tricloracetico, oppure dopo distruzione della sua struttura cellulare mediante disseccamento (o aggiunta di cloroformio); in tal caso il lievito di birra cede all'acqua di lavaggio legami sulfidrilici, e contemporaneamente sostanze capaci di ridurre la cistina a cisteina.

Abbiamo voluto controllare la giustezza, o meno, dell'ipotesi di una elaborazione endogena del fattore vitaminico C, indagando con esperienze *in vitro* quali siano eventualmente gli organi deputati alla sintesi. All'uopo si sono impiegati organi sia di cavie tenute (nello stabulario) a vitto normale (foglie fresche di cavolo), sia di cavie a regime scorbutogeno (tutte di sesso maschile); queste ultime ricevevano l'alimento di Lomba e Randoin (7), consistente (per 100 gr.) di 84 gr. di farina di fagioli, cotta per un'ora in poca acqua, raffreddata ed impastata con lievito di birra medicinale, secco polverato (Merck) gr. 3, burro gr. 4.5, lattato di calcio (Merck) gr. 5, cloruro di sodio (Merck) gr. 1.5, agar-agar polverato (Merck) gr. 2. Le cavie in avitaminosi sono state sacrificate rispettivamente dopo 3, 5, 7, 11, 15, 19, 23 giorni di dieta scorbutogena; la sintomatologia da esse presentata è stata sempre quella ben nota. Appena ucciso (per compressione alla nuca) l'animale sia normale, sia in avitaminosi C, si prelevavano rapidamente alcuni organi, dopo averli privati, per quanto era possibile, del sangue. Gli organi adoperati sono stati l'encefalo, i reni, il fegato, l'intestino tenue, i surreni, la milza; il lume del tenue è stato aperto, privato del contenuto e lavato abbondantemente con acqua distillata; dato il loro piccolo peso, surreni e milza sono stati spesso adoperati insieme. Per ogni organo la disposizione sperimentale (in grosse provette da centrifuga a fondo conico) è stata la seguente:

1<sup>a</sup> provetta: organo parte aliquota, finemente tagliuzzata, + sabbia silicea purificata (lavata con acido e arroventata; Merck) gr. 0.5 + sol. Ringer-Locke (preparata con pro-

(1) E. AUBEL e L. GENEVOIS, «Compt. Rend. Ac. Sc.», CLXXXIV, 1927, p. 1676.

(2) N. W. PIRIE, «Biochem. Journ.», XXIV, 1930, p. 51.

(3) M. TH. REGNIER, «Compt. Rend. Soc. Biol.», CXII, 1933, p. 526.

(4) A. KOZŁOWSKI, «Science», 1934-I, p. 388.

(5) A. LEBEDEV, «Fermentforsch.», IX, 1926, p. 74.

(6) R. FABRE e H. SIMONNET, «Compt. Rend. Ac. Sc.», CXCI, 1930, p. 1075; CXCI, 1931, p. 852; «Bull. Soc. Chim. Biol.», XIII, 1931, p. 923.

(7) J. L. LOMBA e L. RANDOIN, «Compt. Rend. Ac. Sc.», CLXXVI, 1923, p. 1003.

dotti chimici Merck) cc. 6 + sol. smorzatrice di fosfati (Fraenkel e Landau) secondo Sörensen a pH 7.38, cc. 4; con bacchettina di vetro, a estremità ottusa e smerigliata, si sminuzzava il tessuto; indi si aggiungevano lievito di birra medicinale, secco polverato (Merck) gr. 1 + alimento scorbutogeno di Lomba e Randoin (preparato di fresco) gr. 3; si mescolava, e sopra si stratificavano 2 cc. di toluolo (Merck).

2<sup>a</sup> provetta (I controllo): sabbia silicea purificata gr. 0.5 + sol. Ringer-Locke cc. 6 + sol. smorzatrice cc. 4 + lievito di birra secco polverato gr. 1 + alimento scorbutogeno di Lomba e Randoin gr. 3; si mescolava, e sopra si stratificavano 2 cc. di toluolo (Merck). Questo I controllo si faceva in doppio.

3<sup>a</sup> provetta (II controllo): organo parte aliquota (quantità uguale a quella della 1<sup>a</sup> provetta) finemente tagliuzzata, + sabbia silicea purificata gr. 0.5 + sol. Ringer-Locke cc. 6 + sol. smorzatrice cc. 4; con bacchettina di vetro, a estremità ottusa e smerigliata, si sminuzzava il tessuto, mescolando e stratificando 2 cc. di toluolo (Merck).

Le tre provette venivano incubate in termostato a 37° C. per un numero d'ore variabile (da 3 a 23). Indi a ciascuna provetta si aggiungevano 5 cc. di sol. di ac. tricloracetico (Merck) al 10% (raffreddata in ghiacciaia), e si centrifugava per 10'. Il liquido sopranatante (generalmente opalescente) era decantato in un bicchierino; dopo aver posto nel tubo da centrifuga altri 5 cc. di acqua bidistillata fredda, si ricentrifugava per altri 5'; il nuovo liquido sopranatante (anch'esso opalescente) era decantato e mescolato col precedente nel bicchierino; un terzo lavaggio non si dimostrò necessario. Si procedeva poi al dosaggio della capacità riducente dell'estratto, adoperando una sol. madre (1 : 500) dell'indicatore di ossido-riduzione 2 : 6-diclorofenoloindofenolo (della Ditta B. D. H. di Londra) diluita però 20 volte prima dell'uso. L'estratto in esame (in tutto 20 cc.) era aspirato frazionatamente in una microburetta (graduata in centesimi) e si faceva cadere, goccia a goccia, in un bicchierino contenente cc. 1 della sol. diluita di indicatore. Pur essendo gli estratti generalmente opalescenti, il viraggio del colore si distingueva abbastanza bene.

Nelle esperienze, il II controllo (cioè il contenuto della 3<sup>a</sup> provetta) esprimeva il valore riducente dell'organo in esame; aggiungendo a questo il valore riducente del I controllo (cioè del contenuto della 2<sup>a</sup> provetta: lievito di birra + alimento scorbutogeno) si sarebbe dovuto avere il valore riducente della 1<sup>a</sup> provetta (organo + lievito di birra + alimento scorbutogeno). Nel caso che il valore riducente del contenuto della 1<sup>a</sup> provetta fosse stato inferiore alla somma dei valori riducenti del contenuto delle altre due provette, si poteva dedurre che una certa quantità di sostanza riducente, dosabile col 2 : 6-diclorofenoloindofenolo, fosse andata distrutta o trasformata, oppure che i fenomeni di distruzione o trasformazione avessero la prevalenza sui processi di sintesi; mentre, nel caso che il valore riducente della 1<sup>a</sup> provetta fosse stato superiore, si poteva pensare o alla formazione *ex novo* di una certa quantità di sostanza riducente, oppure al prevalere dei processi di sintesi su quelli di distruzione o trasformazione della sostanza stessa.

Pur negando ogni specificità all'indicatore per la vitamina antiscorbutica<sup>(1)</sup>, anche se impiegato secondo Birch, Harris, e Ray<sup>(2)</sup>, nelle presenti esperienze abbiamo presupposto che l'eccesso di sostanza riducente, eventualmente sintetizzatasi, fosse acido ascorbico (vitamina C) in base ai risultati delle prove biologiche dianzi ricordate<sup>(3)</sup>. Pertanto i valori di riduzione, esprimenti la differenza ( $\pm$ ) tra le cifre della 1<sup>a</sup> provetta e quelle della 2<sup>a</sup> + 3<sup>a</sup> provetta, sono stati convertiti in  $\gamma$  di ac. ascorbico; abbiamo per-

(1) M. MITOLO, « Boll. Soc. Ital. Biol. speriment. », IX, 1934, p. 518.

(2) T. W. BIRCH, L. J. HARRIS e S. N. RAY, « Biochem. Journ. », XXVII, 1933, p. 590.

(3) Loc. cit.



ciò standardizzato la sol. dell'indicatore contro una soluzione di acido l-ascorbico (Hoffmann-La Roche), sciogliendo gr. 0,05 di ac. l-ascorbico in 250 cc. di sol. di ac. tricloracetico al 10% e portando la soluzione a 1 litro con H<sub>2</sub>O. In 1 cc. di questa soluzione sono contenuti γ 50 di acido l-ascorbico. Titolando contro soluzione diluita di indicatore, abbiamo trovato, come media di 5 prove, che 1 cc. di indicatore è scolorato (ridotto) da cc. 0,734 della soluzione, ossia da γ 36,7 di acido l-ascorbico. È stato quindi facile calcolare il valore in acido ascorbico dei 20 cc. dell'estratto ricavato da ciascun organo di cavia.

I risultati delle esperienze sono riassunti nelle due tabelle.

Dalle tabelle risulta che la possibilità di sintesi della vitamina C da parte di alcuni organi di cavia (a dieta normale o scorbutogena) è messa in evidenza soltanto prolungando fino a 20-23<sup>h</sup> il contatto tra organo e dieta scorbutogena + eccesso di lievito di birra, in termostato a 37° C. Per tale durata, mentre una parte della sostanza riducente va distrutta (come risulta dalle cifre della 3<sup>a</sup> provetta - Il controllo), i processi di sintesi prevalgono su quelli di scissione; se invece il tempo di contatto si riduce a 3-4<sup>h</sup>, i valori ottenuti sono generalmente negativi, cioè o non si è neoformata vitamina C, oppure per questa i fenomeni catabolici sono più attivi di quelli anabolici.

Concludendo:

1° In *cavie a dieta normale* il fegato, la milza e i surreni, l'intestino tenue, i reni, l'encefalo, nelle condizioni sperimentali anzidette, sono in grado di sintetizzare *in vitro* una certa quantità di sostanza riducente l'indicatore 2:6-diclorofenoloindofenolo, quando sono incubati (in termostato a 37° C.) per un tempo sufficiente, in presenza di alimento scorbutogeno (di Lomba e Randoïn) ed un eccesso di lievito di birra secco.

2° Nelle stesse condizioni di esperimento, il fegato e l'intestino tenue di *cavie carenzate di fattore antiscorbutico* dimostrano (*in vitro*) ancora dopo 19 giorni di avitaminosi la capacità di sintetizzare una certa quantità di sostanza riducente. Invece, dopo il quinto giorno di dieta scorbutogena, l'encefalo, i surreni e la milza perdono il potere di sintesi (o comunque questa non appare dalle cifre di riduzione); per i reni tale proprietà cessa dopo il terzo giorno di avitaminosi.

3° In base ai risultati delle precedenti ricerche biologiche<sup>(1)</sup>, secondo cui cavie in avitaminosi C e contemporanea ipervitaminosi B sopravvivono costantemente 10-13 giorni in più di quelle in semplice avitaminosi C, e sono colpite con ritardo da una sindrome scorbutica attenuata, è presumibile che la sostanza riducente, elaborata dai vari organi di cavia normale o in avitaminosi C (a partire da materiali più semplici contenuti nel vitto scorbutogeno e nell'eccesso di lievito di birra secco), sia il fattore antiscorbutico (ac. ascorbico).

(1) Loc. cit.

A) *Animali a dieta normale.*

— 55 —

N. Cavia	Peso dell'animale gr.	Organo	Aliquota pel dosaggio gr.	Permanenza in termostato a 37° C. per ore	cc. di indicatore scoloriti da 1 gr. di organo				Differenza (±) espressa in γ di ac. ascorbico
					1 <sup>a</sup> provetta	2 <sup>a</sup> provetta (1 con- trollo) (1)	3 <sup>a</sup> provetta (11 con- trollo)	2 <sup>a</sup> + 3 <sup>a</sup> provetta (I + II controllo)	
1	353	reni encefalo fegato	1 1 1	3 3 3	5.73	3.43	3.60	7.03	1.30
					5.84		3.22	6.65	— 0.81
					8.43		4.80	8.23	+ 0.20
2	320	encefalo reni fegato	1 1 2	3 3 3	6.25	3.12	4.04	7.16	0.91
					5.55		4.08	7.20	— 1.65
					9.89		6.49	9.61	+ 0.28
3	285	surreni reni fegato	0.125 1 2	3.30' 3.30' 3.30'	16.70	2.99	22.63	25.62	8.92
					5.17		3.26	6.25	1.08
					6.01		3.75	6.74	0.73
4	345	surreni + milza fegato intestino tenue	0.397 1 2	21 21 21	24.19	4.00	8.05	12.05	+ 12.14
					15.12		6.23	10.23	— 4.89
					8.51		2.23	6.23	+ 2.28
5	275	encefalo reni fegato	1 1 1	21.30' 21.30' 21.30'	8.11	4.98	1.55	6.53	+ 1.58
					8.05		2.34	7.32	+ 1.63
					15.97		8.59	13.57	+ 2.40
6	343	encefalo reni intestino tenue	1 1 1	22 22 22	8.68	4.49	1.33	5.82	+ 2.86
					9.06		2.07	6.56	+ 2.50
					9.98		2.04	6.53	+ 3.45

(1) Le differenze tra cifra e cifra dipendono dal grado di secchezza maggiore o minore della dieta.

TABELLA II.

B) *Animali a dieta scorbutogena.*

N. cavia	Dieta scorbutogena per giorni	Peso dell'animale		Organo	Aliquota impiegata per dosaggio gr.	Permanenza in termostato a 37° C. per ore	cc. di indicatore scolorati da 1 gr. di organo				Differenza (+) espressa in y di ac. ascorbico	
		iniziale gr.	finale gr.				1 <sup>a</sup> provetta	2 <sup>a</sup> provetta (I controllo) (1)	3 <sup>a</sup> provetta (II controllo)	2 <sup>a</sup> + 3 <sup>a</sup> provetta (I + II controllo)		differenza (+) tra la 1 <sup>a</sup> e la 2 <sup>a</sup> + 3 <sup>a</sup> provetta
1	3	236	228	surreni + milza reni fegato	0.19 1 1	5 5 5	12.46 5.65 7.45	3.32	9.71 2.12 3.07	13.03 5.44 6.39	— 0.57 + 0.21 + 1.06	— 20.92 + 7.70 + 38.90
2	3	250	225	encefalo reni intestino tenue	1 1.3 1	21.30' 21.30' 21.30'	4.98 6.43 7.14	4.24	1.58 1.18 2.12	5.82 5.42 6.36	— 0.84 (?) + 1.01 + 0.78	— 30.83 (?) + 37.07 + 28.63
3	5	230	173	surreni + milza reni fegato	0.16 1.45 1	21 21 21	13.02 4.19 8.98	4.00	6.47 0.77 2.67	10.47 4.77 6.67	+ 2.55 — 0.58 + 2.31	+ 93.58 — 21.28 + 84.78
4	5	280	252	encefalo fegato intestino tenue	1 1 1.3	22.30' 22.30' 22.30'	9.49 10.00 8.30	6.12	1.33 2.01 1.44	7.45 8.13 7.56	+ 2.04 + 1.87 + 0.74	+ 74.87 + 68.63 + 27.16
5	7	312	232	encefalo reni fegato	1 1.25 2	3 3 3	3.81 2.62 3.05	2.18	2.18 0.96 1.88	4.36 3.14 4.06	— 0.55 — 0.52 — 1.01	— 20.18 — 19.08 — 37.07
6	7	285	263	fegato reni intestino tenue	1.5 1.5 2	21 21 21	8.06 3.36 5.66	4.08	0.96 0.71 1.14	5.04 4.79 5.22	+ 3.02 — 1.43 + 0.44	+ 110.83 — 52.48 + 16.15

(1) Le differenze tra cifra e cifra dipendono dal grado di secchezza maggiore o minore della dieta.

Segue TABELLA II.

N. cavia	Dieta scorbutogena per giorni	Peso dell'animale		Organo	Aliquota impiegata per dosaggio gr.	Permanenza in termostato a 37° C. per ore	cc. di indicatore scolorati da 1 gr. di organo					Differenza espressa in y di ac. ascorbico
		iniziale gr.	finale gr.				1 <sup>a</sup> provetta	2 <sup>a</sup> provetta (I controllo) (1)	3 <sup>a</sup> provetta (II controllo)	2 <sup>a</sup> + 3 <sup>a</sup> provetta (I + II controllo)	diff. tra la 1 <sup>a</sup> e la 2 <sup>a</sup> + 3 <sup>a</sup> provetta	
7	11	323	222	encefalo reni fegato	1 1.3 2	3-30' 3-30' 3-30'	5.55 — 3.34	3.48	2.86 — 0.70	6.34 — 4.18	—0.79 — —0.84	—28.99 — —30.83
8	11	263	238	fegato encefalo surreni + milza	2.5 1 0.175	22.15' 22.15' 22.15'	5.81 4.96 —	4.00	0.53 1.77 —	4.53 5.77 —	+1.28 —0.81 —	+46.98 —29.73 —
9	15	302	255	intestino tenue milza surreni	5 0.135 0.07	4 4 4	4.22 — —	3.75	1.31 — —	5.06 — —	—0.84 — —	—30.83 — —
10	15	315	263	fegato intestino tenue surreni + milza	3.2 3 0.19	23 23 23	8.81 8.32 —	6.80	0.38 1.11 —	7.18 7.91 —	+1.63 +0.41 —	+59.82 +15.05 —
11	19	355	247	encefalo reni fegato	1.8 1.25 2.5	3 3 3	3.41 — 3.62	3.67	0.60 — 0.77	4.27 — 4.44	—0.86 — —0.82	—31.56 — —30.09
12	19	363	228	fegato intestino tenue	3.5 3	23 23	9.15 8.92	7.53	0.39 1.06	7.92 8.59	+1.23 +0.33	+45.14 +12.11
13	23	320	253	reni fegato intestino tenue	1.445 3.5 5	20-30' 20-30' 20-30'	— 4.52 5.03	4.51	— 0.28 0.52	— 4.79 5.03	— —0.27 0	— —9.91 0

(1) Le differenze tra cifra e cifra dipendono dal grado di secchezza maggiore o minore della dieta.



La quantità di vitamina C neoformata andrebbe ad accrescere le riserve tissulari di acido ascorbico, che si trovano sempre negli animali posti a dieta scorbutogena, agli inizi della carenza; e permetterebbe lo speciale comportamento delle cavie in avitaminosi C e contemporanea ipervitaminosi B, di fronte a quello delle cavie in semplice avitaminosi C. Tuttavia, col venire gradualmente meno, nel corso della carenza alimentare, della proprietà vitaminsintetica degli organi, e col consumarsi della riserva di fattore antiscorbutico e della quantità neoformata di esso, la cavia risente il danno causato dal *deficit* di acido ascorbico e soccombe con una sindrome di scorbuto attenuato.

**Fisiologia.** — *Sul comportamento del cuore nell'epilessia da faradizzazione corticale* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di E. FULCHIGNONI, presentata dal Corrisp. C. CIACCIO.

Le notizie sul comportamento degli organi interni durante l'accesso epilettico sono ancora molto scarse; solo alcune perturbazioni organiche — specie a carico dell'apparato respiratorio e circolatorio — sono state finora oggetto di analisi.

Fr. Franck esplorò il comportamento degli organi circolatori mercè la registrazione grafica della pressione arteriosa nel cane. Egli vide che all'inizio dell'accesso il numero delle pulsazioni cardiache diminuiva rapidamente; che all'inizio della fase clonica si aveva invece ripresa della frequenza primitiva e subito dopo tachicardia, la quale durava per tutta la fase clonica e andava a mano a mano decrescendo, con il diminuire delle scosse muscolari, fino a stabilizzarsi al termine dell'accesso. Mentre il comportamento del cuore appariva relativamente costante, la pressione arteriosa mostrava invece molte variazioni, specie nella fase tonica: in certi casi la si vedeva diminuire, in altri restare immutata o aumentare. Questo comportamento apparentemente paradossale, secondo il Lamy: « ... *s'explique très aisément par les modifications cardiaques concomitantes. Le cœur subit-il un ralentissement considerable, la pression tend de ce fait à baisser; si elle ne change pas, ou elle monte au contraire, c'est que l'influence cardiaque a été compensée ou même surpassée par le spasme des vaisseaux périphériques* » <sup>(3)</sup>.

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisiologia e di Radiologia della R. Università di Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1938.

(3) C. RICHTER, *Dictionnaire de Physiol.*, 1902, V, 487.

Oltre a queste vecchie (ed interessanti) osservazioni di Fr. Franck, per ciò che riguarda il comportamento del cuore nell'epilessia sperimentale, non mi risulta che altre ne siano state finora eseguite. È sembrato pertanto opportuno istituire ricerche sperimentali coll'ausilio dell'indagine radioscopica e radiografica (tanto a mezzo di fotogrammi isolati che in serie), così da potere esplorare il comportamento del muscolo cardiaco nelle condizioni più vicine alle ordinarie. Dapprima si eseguirono numerose ricerche orientative per studiare la posizione più adatta da fare assumere all'animale durante l'accesso: si prescelse quella dorso-ventrale, che oltre a dare una netta rappresentazione della corrispondenza di ogni singolo elemento cardiaco con le curve marginali dell'ombra cardiaca, permetteva di seguire con sufficiente chiarezza le singole contrazioni dei ventricoli e degli atri. Fu particolarmente curato il sistema di contenzione, poichè è noto come i più lievi spostamenti, sul piano longitudinale o trasversale, possono dare ombre artificiali e diametri diversi da quelli effettivi. Tanto più delicato si presentava il problema, in quanto lo scoppio dell'accesso non avrebbe consentito l'esame radioscopico del viscere se non in condizioni di assoluta immobilità del torace.

A tale riguardo si procedette così: si operava preliminarmente di craniectomia l'animale, mettendo a nudo la zona sensitivo-motrice di un emisfero. Successivamente lo si immobilizzava sul dorso, su di una sottile lista di legno (50 mm. di spessore) per mezzo di una sacca di tela forte, da cui fuoriuscivano la testa e gli arti. La tela era fissata al tavolo a mezzo di puntine da disegno ed aderiva strettamente a tutto il corpo dell'animale, consentendogli però le escursioni respiratorie. Quindi si portava l'animale su l'iposcopio; dopo di avere eseguito qualche radiogramma normale, si provocava l'accesso per mezzo della diretta faradizzazione di un centro sensitivo-motore (centro dell'orbicolare) precedentemente identificato. La faradizzazione avveniva a mezzo di un elettrodo stigmatico di S. Baglioni <sup>(1)</sup>; l'elettrodo indifferente veniva applicato ad un lembo della ferita cutanea; la corrente faradica era fornita da un induttorio a slitta del Du Bois-Réymond, alimentato dalla corrente stradale ridotta di voltaggio a mezzo di un comune reostato.

Procedendo nella stimolazione (intensa e prolungata) del centro, nella attesa delle prime manifestazioni epilettiformi, si aveva cura di interrompere frequentemente la faradizzazione per controllare il comportamento del cuore. La stimolazione cessava appena si manifestavano le prime reazioni evidenti (clono netto e frequente dell'orbicolare). Allora, durante l'evoluzione dell'accesso, si osservava con la massima attenzione il comportamento del volume e della frequenza del cuore in rapporto alla fase dell'accesso,

(1) L'elettrodo veniva preparato nella forma suggerita da M. OZORIO DE ALMEIDA e G. MARTINÓ, « Arch. di Fisiol. », 4, 1933, p. 593.

che era rivelata dal comportamento degli arti fuoruscenti dell'apparecchio di immobilizzazione.

Esauritosi questo primo accesso, si raccoglievano i dati radioscopici osservati e si lasciava l'animale in riposo per una diecina di minuti. Poi si provocava un altro accesso, sempre con la stessa tecnica (stimolazione faradica ritmica del centro dell'orbicolare), e durante questa seconda prova si procedeva alla documentazione radiografica. Si eseguivano sempre quattro radiogrammi in serie: il primo in condizioni normali, il secondo all'inizio della fase tonica, il terzo all'inizio della fase clonica finale, il quarto alla fine dell'accesso.

I risultati ottenuti si possono riassumere così:

All'inizio e per tutta la durata della fase tonica il torace si presenta in posizione espiratoria con conseguente ipodiafania polmonare; il diaframma è fortemente sollevato, con qualche scossa clonica iniziale che non è in rapporto con lo stato della muscolatura periferica. *Durante tutto questo periodo il cuore è immobile in forte diastole.*

Alla comparsa della fase clonica successiva sopravvengono respirazioni irregolari per ritmo; il polmone si illumina, il diaframma si abbassa, e nel cuore appaiono pulsazioni ampie e frequenti. *Il volume del cuore in questa fase appare nettamente rimpicciolito.*

Questi risultati, che furono regolari e costanti in tutti i numerosi esperimenti eseguiti, rivelavano l'esistenza di un arresto diastolico del cuore durante la fase tonica dell'accesso. La diastole in tali condizioni superava di gran lunga, per ampiezza dei diametri trasversali, ogni altra diastole osservabile durante la normale rivoluzione cardiaca (fig. 1); allo stesso modo come il rimpicciolimento che era possibile osservare all'inizio della fase clonica sembrava più accentuato di quello rilevabile durante un normale periodo sistolico. Queste osservazioni (perfettamente concordanti colle precedenti di Fr. Frank) imponevano naturalmente l'indagine diretta ad accertare se la dilatazione cardiaca (osservata durante la fase tonica) fosse dovuta all'aumento contemporaneo della pressione endotoracica, oppure rappresentasse una vera diastole attiva, nel senso di Luciani, cioè promossa e regolata da impulsi viaggianti per il vago. Pertanto eseguiamo nuove osservazioni, sperimentando (su uno stesso animale) prima e dopo la recisione dei vaghi. In questa seconda serie di ricerche si procedeva così: si scoprivano e si isolavano i due pneumogastrici al collo, prima ancora di eseguire la craniectomia e la ricerca del centro sensitivo-motore; si provocava un secondo accesso epilettiforme nell'animale a vaghi integri e si registrava con le solite modalità il comportamento del cuore; poi si ripeteva l'osservazione dopo recisi i due nervi.

Ecco i risultati ottenuti: nell'animale, vaghi recisi, il cuore non subisce l'arresto diastolico che si ha nelle ordinarie condizioni ed il volume del viscere non supera mai quello di una diastole ordinaria (figg. 2 e 3).



Prima dell'accesso



Durante l'accesso (fase tonica)

Fig. I



Prima dell'accesso



Durante l'accesso (fase tonica)

Fig. II

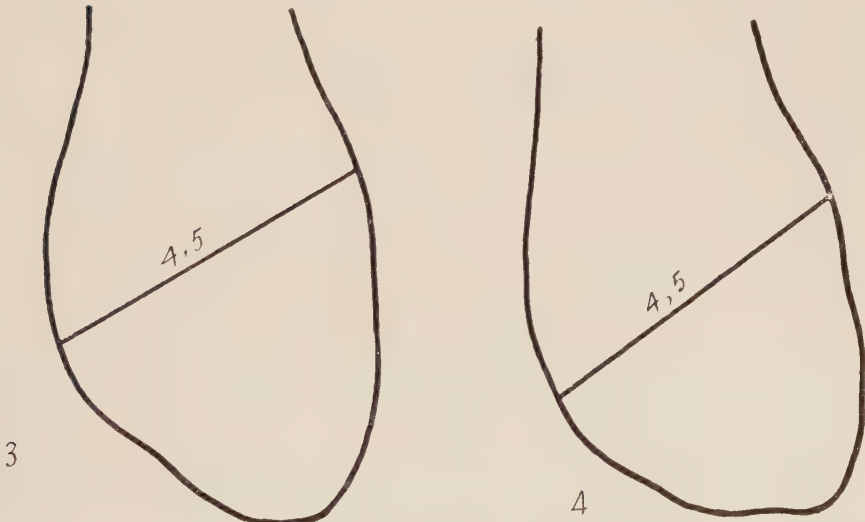
Cane vagotomizzato







1-2. — Prima della vagotomia (prima e durante l'accesso).



3-4. — Dopo della vagotomia (prima e durante l'accesso).

Fig. III.

Esso inoltre non diminuisce di volume durante la fase clonica finale come avviene nell'animale a vaghi integri.

Sembra dunque doversi ammettere che eccitamenti centrifughi, durante l'accesso epilettiforme, per la via dei vaghi pervengano al cuore e ne modifichino l'attività.

**Fisiologia** (Chimica biologica). — *Metodo per la determinazione volumetrica di piccole quantità di argento in tessuti e liquidi dell'organismo*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> di A. CURATOLO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Essendocisi presentata l'occasione di dover determinare piccolissime quantità di argento in organi di animali da esperimento, non abbiamo trovato, nella letteratura compulsata, nessun metodo adeguato, che ce lo consentisse.

Infatti i metodi finora descritti sono ponderali<sup>(3)</sup>; implicano estrazione dell'Ag come AgCl e successiva determinazione per pesata, e non permettono dosaggi con una approssimazione di apprezzamento dell'ordine di centesimi di milligrammo, come appunto a noi sarebbe stato necessario.

Abbiamo perciò studiato la possibilità di attuare un micrometodo di determinazione volumetrica; e, dopo superate non poche difficoltà, siamo riusciti ad elaborarne uno, che, in numerose e rigorose prove di accertamento, ci si è finora dimostrato bene adeguato allo scopo.

I punti principali, che è utile discutere, per rendersi esatto conto dei fondamenti del metodo sono due:

1° la possibilità di ottenere dal materiale in esame l'Ag, nelle condizioni più appropriate per evitare perdite;

2° la possibilità di pervenire a un'esatta determinazione volumetrica dell'Ag, così ottenuto.

Per ciò che riguarda la prima questione occorre rilevare, che la disorganizzazione delle sostanze organiche, nel caso dei metodi ponderali finora noti, era ottenuta mediante incenerimento in crogiuolo. Ma nelle prove da noi così eseguite non siamo riusciti a evitare una perdita di Ag relativamente notevole, che in seguito abbiamo avuto buone ragioni per mettere in rapporto con la presenza di cloruri nel materiale esaminato, e con la formazione di AgCl. Infatti addizionando al materiale in esame un eccesso di NaCl, costantemente abbiamo osservato, che, al termine della combustione, la piccola quantità di Ag, aggiunta a scopo sperimentale, era praticamente scomparsa. La spiegazione del fatto diviene ovvia tenendo presenti due asserzioni, che si possono leggere nella *Enciclopedia di Chimica* del Selmi<sup>(4)</sup>, dove

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1938.

(3) E. MENEGHETTI, « Bioch. e Ter. Sp. », XVII, 1930, p. 237.

(4) F. SELMI, *Enciclopedia di Chimica*, U. T. E. T., vol. II, 1874, p. 390.

a proposito dell'AgCl è detto, che « quando esso fonde ( $260^{\circ}$ ) comincia a volatilizzare », e che « quando è fuso passa attraverso il crogiuolo a somiglianza del litargirio ».

Davanti ad una tal causa di errore abbiamo creduto opportuno rinunciare all'incenerimento in crogiuolo, ed abbiamo provato ad ottenere la disintegrazione delle sostanze organiche per via umida.

Il miglior risultato, in tal senso, si è ottenuto colla combustione del materiale da esaminare in acido solforico, aggiungendo tracce di solfato di rame, come nel metodo di Kieldahl, più alcune gocce di acido nitrico.

Al termine della combustione, così eseguita, nel miscuglio tutto l'Ag si trova come solfato di argento, che, per aggiunta di HCl in eccesso, precipita completamente come AgCl, assolutamente separabile.

Risolto così in modo affatto soddisfacente il primo problema, rimaneva l'altro della determinazione volumetrica del AgCl.

A tal proposito nulla abbiamo trovato nella letteratura all'infuori di una proposta di G. A. O. Haslewood <sup>(1)</sup>, il quale, sciogliendo del AgCl in una soluzione N/20 di tiosolfato sodico, ottiene, per aggiunta di acido acetico glaciale, un precipitato, che sarebbe costituito da un tiosolfato doppio di Ag e Na, e che avrebbe la formula  $\text{Ag}_3\text{Na}_5(\text{S}_2\text{O}_3)_4$ . Egli ritiene possibile valutare quantitativamente l'Ag, attraverso la determinazione iodimetrica dello  $\text{S}_2\text{O}_3$ .

Senza addentrarci nei dettagli, che ci impegnerebbero in una lunga discussione, diciamo subito, che i risultati ottenuti dalle molteplici e scrupolose prove, eseguite per dare pratica attuazione al suggerimento di Haslewood, non ci hanno incoraggiato a persistere.

Non avendo pertanto potuto accogliere il suggerimento di Haslewood, abbiamo pensato alla possibilità, che, riducendo il AgCl ad Ag metallico, e quindi sciogliendo questo in acido nitrico, lo si sarebbe potuto determinare volumetricamente come  $\text{AgNO}_3$ , secondo il metodo di Volhard.

Seguendo tale concetto, abbiamo esplorato varie vie per ottenere in condizioni convenienti la trasformazione del AgCl in Ag metallico; e diciamo subito, che il procedimento più rapido e pratico, nelle nostre mani, si è rivelato quello, consistente nel trattare a caldo, in ambiente alcalino, con aldeide formica. L'Ag metallico così ottenuto viene lavato; e poichè ossido di Ag può, in tracce, formarsi durante il processo di riduzione, il lavaggio noi lo abbiamo praticato con una soluzione di KOH al 10 %, in cui l'ossido, al pari del metallo, è insolubile.

Dopo il processo di riduzione e dopo lavaggio il residuo viene disciolto in acido nitrico. Il  $\text{AgNO}_3$ , che si forma, può essere agevolmente dosato col metodo di Volhard.

Il nostro metodo, nella migliore forma, che finora abbiamo potuto dargli, può essere descritto esattamente come segue:

(1) G. A. O. HASLEWOOD, « J. Chem. Soc. », London, 1936, 1049 C.



Occorrono dei palloncini di Kieldahl da 100 cc., e dei tubi da centrifuga della capacità di circa 50 cc. di forma conica (sono da sconsigliare quelle di calibro uniforme, perchè espongono a perdite di Ag. durante le manipolazioni).

I reagenti necessari sono:

- 1° acido solforico concentrato puro;
- 2° soluzione satura di solfato di rame;
- 3° acido nitrico concentrato puro;
- 4° acido cloridrico concentrato puro;
- 5° Una soluzione preparata con 100 parti di formalina Schering in 900 di soluzione di KOH puro, esente da cloruri, al 10 %;
- 6° soluzione di KOH puro, esente da cloruri, al 10 %;
- 7° reattivo allume-ferrico-ammonico;
- 8° una soluzione N/200 di solfocianato di potassio esattamente titolata.

Il metodo si esegue in quattro tempi successivi:

1° *Combustione delle sostanze organiche.* — L'organo od il frammento di tessuto viene messo in un palloncino di Kjeldahl insieme con 10 cc. di acido solforico, con 0.5 cc. di soluzione satura di solfato di rame e con 0.5-1 cc. di acido nitrico concentrato. Il miscuglio viene quindi messo in combustione su fiamma a gas, sotto cappa.

2° *Estrazione dell'Ag come AgCl.* — Ultimata la combustione, la miscela si versa, dopo raffreddamento, in uno dei tubi da centrifuga a fondo conico. Il palloncino viene lavato, con piccole quantità di acqua, ripetute volte e l'acqua di lavaggio viene sempre versata nel tubo da centrifuga. Quindi, sempre nello stesso tubo, si aggiunge circa 1 cc. di HCl conc. Tutto l'Ag precipita allora come cloruro. Il tubo viene messo in centrifuga a circa 2000 giri per 15', dopo di che, aderendo il precipitato assai bene al fondo del tubo, il liquido soprastante viene cautamente decantato. Dopo la decantazione i bordi dei tubi vengono asciugati con carta da filtro onde allontanare il più possibile l'HCl in eccesso.

3° *Trasformazione del AgCl in Ag metallico.* — In un matraccio si mettono a bollire circa 10 cc. della soluzione riduttrice, e quando questa è bollente, rapidamente si versa nel tubo, sul cui fondo si trova il precipitato di AgCl. Si vedrà questo trasformarsi allora prontamente in Ag metallico, che rimane al fondo come polvere nera. Dopo aver centrifugato per 3'-5', il liquido riduttore viene aspirato cautamente, facendo bene attenzione di

non asportare particelle dell'Ag, che male aderisce al fondo della provetta. Asportato il liquido riduttore, si versano circa 10 cc. di soluzione 10 % di KOH nel tubo; si agita dolcemente, e si centrifuga ancora per altri 3'-5' minuti. Si aspira quindi, sempre con molta cautela, il liquido di lavaggio, e sul residuo metallico si versano alcune gocce di  $\text{HNO}_3$  purissimo, sino a completa soluzione del residuo stesso.

4° *Determinazione volumetrica dell'argento.* — Nel tubo da centrifuga contenente ora la soluzione di  $\text{AgNO}_3$ , si fanno cadere circa 5-10 gocce di reattivo allume ferrico ammonico, e quindi, da una microburetta tarata ad 1/100, contenente soluzione N/200 di solfocianato di potassio (o di ammonio), si fa gocciolare la soluzione sino al viraggio al rosa. Ogni cc. di soluzione N/200 di KCNS impiegato, corrisponde a mmgr. 0.539 di Ag metallico.

Il metodo così eseguito ci ha fornito finora i risultati che si desideravano. Ad attestarlo valgano i dati, che riassumiamo nel prospetto che segue, e che precisamente sono tutti quelli ottenuti in rigorose prove di controllo.

Ad alcuni cc. di acqua distillata, ovvero a frammenti di organi diversi (del peso vario da 1 a 5 gr.), nonchè a 5 cc. di sangue o di urina, il prof. Zagami, aiuto dell'Istituto, per incarico del nostro Direttore prof. Amantea, aggiungeva quantità determinate di Ag (sotto forma di una soluzione esattamente titolata di  $\text{AgNO}_3$ ).

Noi eravamo tenuti all'oscuro sulle quantità di Ag aggiunte. Eseguiamo i dosaggi seguendo scrupolosamente la tecnica descritta, ed infine comunicavamo i risultati ottenuti al prof. Zagami, che li confrontava con le cifre da lui esattamente annotate.

TABELLA.

Prova N.	Materiale cui è aggiunto l'Ag.	Ag aggiunto mmgr.	Ag determinato mmgr.	Ag sfuggito al dosaggio mmgr.
1	Acqua distillata	0.1070	0.1070	—
2	»	0.3210	0.3113	0.0097
3	»	0.1230	0.1177	0.0053
4	Urina	0.2461	0.2354	0.0107
5	»	0.0749	0.0588	0.0161
6	»	0.1070	0.1070	—
7	»	0.3210	0.3113	0.0097
8	»	0.1230	0.1177	0.0053
9	»	0.1444	0.1337	0.0107
10	»	0.3477	0.3317	0.0160
11	»	0.3477	0.3477	—
12	Sangue	0.1230	0.1177	0.0053
13	»	0.3477	0.3317	0.0160
14	»	0.1765	0.1605	0.0160
15	Fegato	0.2461	0.2407	0.0054
16	»	0.1337	0.1284	0.0053
17	»	0.4173	0.4066	0.0107
18	»	0.2675	0.2568	0.0107
19	Cervello	0.1575	0.1391	0.0184
20	»	0.2461	0.2407	0.0054
21	Testicolo	0.0000	0.0000	—
22	»	0.1498	0.1498	—
23	Cuore	0.2247	0.2247	—
24	Polmone	0.0642	0.0642	—
25	Milza	0.2705	0.2568	0.0137
26	Rene	0.3798	0.3798	—
27	Utero	0.3798	0.3798	—

**Fisiologia** (Chimica biologica). — *Sull'effetto di iniezioni endomuscolari di estratti acquosi di fegato, rene e intestino, sul tasso cloroemico del ratto albino*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> di A. SALVATORI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In seguito ai lavori di Duval<sup>(3)</sup>, di Leguen, Palazzoli, ecc.<sup>(4)</sup>, si è potuto accertare, che nei tessuti traumatizzati si osserva un notevole aumento di cloro, tanto che, mentre normalmente, per es. nel muscolo, il tasso di questo elemento si aggira intorno all'1 per mille, in caso di trauma il tasso stesso si eleva fino al 4 e anche al 5 per mille. Ciò vale, non solo per i traumi occasionali, ma anche per i traumi provocati sperimentalmente. Gli autori sopra citati, in una bella ricerca sul coniglio, hanno trovato differenze notevoli nei muscoli e in organi, per es. il rene, sui quali si erano provocati dei traumi chirurgici, rispetto al muscolo e al rene rispettivamente simmetrici non traumatizzati.

Questo risultato si completa, nel suo valore, con quanto noi abbiamo potuto osservare in una ricerca ancora inedita, e cioè che il contenuto in cloro di vari organi pari e simmetrici (reni, testicoli, polmone, ecc.), è uguale rigorosamente nei due simmetrici.

Contemporaneamente alla determinazione del cloro negli organi traumatizzati gli autori sopra citati, hanno determinato il tasso cloroemico prima e dopo il trauma, tenendo distinto il plasma dai globuli. Ne è risultata una ipocloremia plasmatica, mentre il tasso del cloro globulare non è variato. Anche l'ipocloremia plasmatica non è stata in tutti i casi notevole; ma è noto che il tasso cloroemico molto difficilmente subisce variazioni notevoli. Comunque, dalle ricerche ora illustrate, si può trarre con un certo fondamento la convinzione, che, per effetto di un trauma, certamente si ha un aumento di cloro nel tessuto traumatizzato, e molto probabilmente questo aumento si effettua a spese del cloro ematico.

Questo risultato porta un notevole appoggio sperimentale all'ipotesi di Chabannier e Lobo-Onnel sul meccanismo dell'ipocloremia post-operatoria. Questi autori pensano, infatti, che dai tessuti traumatizzati per l'atto operatorio si liberino delle sostanze tossiche, che vengono neutralizzate dal cloro

• (1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1938.

(3) DUVAL, « Soc. Nat. de Chir. », 1933, p. 975.

(4) LEGUEU, PALAZZOLI ecc., « Bull. Acc. Méd. », 1933, p. 879.



del sangue, d'onde l'ipocloremia che in genere si osserva dopo gli interventi.

Seguendo le conseguenze di questa ipotesi, noi fummo portati in un precedente lavoro <sup>(1)</sup>, a pensare, che, se l'ipotesi era giusta, iniettando direttamente un estratto di muscoli, o di fegato, o di reni, ecc., triturati, si sarebbe potuto osservare ipocloremia. In quel lavoro, noi abbiamo infatti iniettato in ratti adulti, estratto di muscoli della coscia, della gamba e della regione glutea del ratto, ed abbiamo ottenuto in effetti una ipocloremia in 7 ratti su 10. Nello stesso lavoro, abbiamo voluto tener presenti anche le ricerche di Quenu <sup>(2)</sup> e di Duval e Grigaut <sup>(3)</sup>, secondo le quali, le sostanze che producono l'ipocloremia, sono di natura azotata, e che probabilmente almeno una frazione di esse concorre a formare l'azoto non proteico dei tessuti. Abbiamo quindi determinato, oltre che il cloro, anche l'azoto non proteico del sangue, prima e dopo l'iniezione, onde formarci un'idea su una possibile relazione tra ipocloremia e azoto non proteico del sangue, in seguito ad iniezione di estratto muscolare.

Proseguendo ora, nel piano di lavoro enunciato ed illustrato nella predetta nostra Nota, abbiamo iniettato estratto acquoso di fegato, di intestino e rene, seguendo nel complesso la stessa tecnica, che riassumiamo brevemente.

Ratti adulti, sani, di taglia media, venivano sacrificati per dissanguamento. Si apriva poi l'addome e si prelevava l'organo voluto, che posto su un vetrino da orologio, tarato in precedenza, veniva subito e rapidamente pesato. Si passava poi in mortaio di porcellana insieme ad un po' di silice, e si triturava finemente, fino ad ottenere una poltiglia uniforme. Si estraeva allora ripetutamente con acqua distillata e si filtrava per carta da filtro molto rapida. Per quanto riguarda l'intestino, dobbiamo dire, che prima di ogni altro trattamento, veniva svuotato e poi lavato con acqua distillata. Sul liquido così ottenuto da ciascun organo, di volta in volta si determinava l'azoto totale, l'azoto non proteico e l'azoto amminico. Per le prime due determinazioni abbiamo usato il metodo di Kieldahl, servendoci per la distillazione, dell'apparecchio di Wagner e Parnas. Per la determinazione dell'azoto amminico, abbiamo usato l'apparecchio di Van Slyke.

I liquidi ottenuti come sopra, vennero iniettati nella regione glutea in ratti adulti di grossa taglia, tenuti ad alimentazione mista per tutta la durata delle esperienze. Su ogni ratto abbiamo determinato per tre giorni consecutivi sia l'azoto non proteico che il cloro del sangue, in modo da avere un sicuro dato medio normale. Al 3° giorno, eseguito il prelevamento

(1) A. SALVATORI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», XXV, 1937, p. 404.

(2) E. QUENU, «Soc. Nat. de Chir.», 5 dicembre 1917 e 26 marzo 1919.

(3) DUVAL e GRIGAUT, «Soc. Nat. de Chir.», 16 ottobre 1918, p. 1506; *Id.*, *id.*, 26 marzo 1919, p. 565; «Compt. Rend. Acc. Sc.», CLXXVI, 1918, p. 562.

del sangue per i valori normali, abbiamo iniettato in corrispondenza della regione glutea 4 oppure 8 cc. di estratto acquoso di organo, preparato di fresco con la tecnica sopra descritta. L'animale è stato poi seguito per altri tre giorni, determinando nel sangue, ancora l'azoto non proteico e il cloro.

Il sangue per tutte le determinazioni venne prelevato dalla vena caudale e in parte fatto assorbire, in parte raccolto da una listarella di carta da filtro, piegata a doccia, preventivamente bagnata con ossalato di potassio e asciugata a temperatura ambiente. La listarella stessa veniva poi sistemata in pesafiltri e pesata. Poichè in precedenza si era tarato sia il pesafiltri che la listarella, per differenza si otteneva così la quantità di sangue prelevato.

Dopo ciò, per la determinazione del cloro, si travasava quantitativamente in un becher da cc. 50 e si aggiungevano cc. 2 di permanganato saturo, cc. 2 di acido nitrico concentrato, qualche goccia di allume ferrico, e nitrato di argento N/100 in eccesso (in genere cc. 6-9 risultavano sufficienti). Si riscaldava a modico calore fino a completa decolorazione, e dopo raffreddamento, si titolava con solfocianato N/100.

Per la determinazione dell'azoto, al sangue contenuto nel pesafiltro si aggiungevano cc. 2 di acqua distillata e si agitava ripetutamente in modo da emolizzare il sangue e da ridurre la listarella di carta da filtro in finissima poltiglia. Dopo ciò si aggiungevano cc. 4 di acido tricloroacetico al 20 %, si agitava accuratamente e si lasciava in riposo per tre o quattro ore, agitando di tanto in tanto. Passato tale periodo di tempo, si filtrava per carta da filtro e si riceveva il filtrato in un palloncino da microkjeldahl, nel quale già si trovavano cc.  $1\frac{1}{2}$  di acido solforico concentrato e cc. 0,5 di solfato di rame al 5 %. Si procedeva poi alla Kjeldahlizzazione con le usuali norme. La soluzione solforica così ottenuta veniva passata quantitativamente nell'apparecchio di distillazione di Parnas e Wagner, e l'ammoniaca si raccoglieva su acido solforico N/100 in eccesso. Questo veniva poi titolato con idrato sodico N/100.

Come nel citato nostro lavoro, anche in questo abbiamo determinato il fattore di correzione dovuto ai reattivi. Detto fattore ha oscillato tra mg. 0.065 e mg. 0.072 di azoto, con un valore medio ricavato da cinque determinazioni di mg. 0.068. Da tutti i valori delle nostre determinazioni nel sangue abbiamo quindi detratto quest'ultima cifra.

La quantità di sangue prelevata, è stata maggiore in queste esperienze che non in quelle con estratto di muscoli. Infatti, mentre in quelle abbiamo prelevato da mg. 30 a 60 di sangue, in queste ne abbiamo prelevato da mg. 150 a 300. Nel predetto nostro lavoro, l'azoto non proteico normale ha oscillato intorno ai mg. 100-120 per g. 100 di sangue, e noi, allora, mettemmo in evidenza, che questi valori erano certamente un po' alti, e attribuiammo ciò alla esiguità del sangue prelevato, esiguità che faceva fortemente sentire il suo effetto nel riportare i valori a 100.

TABELLA.

N. progressivo	Organo di cui si è iniettato l'estratto	Azoto iniettato mg.			Cloro o/oo		Azoto non proteico mg. per 100 g. di sangue	
		Totale	Non proteico	Amminico	Prima della iniezione	Dopo l'iniezione	Prima della iniezione	Dopo l'iniezione
1	Fegato	16	1.57	0.90	5.95	5.65 5.17 5.15	52	51 60 70
2	»	16	1.57	0.90	6.12	4.7 5.3 5.3	53	48 60 70
3	»	8	0.78	0.37	5.87	4.80 5.15 4.65	40	45 53 55
4	»	8	0.78	0.37	5.05	5.25 5.22 5.20	35	34 38 40
5	»	5	0.98	0.20	4.99	5.10 4.77 4.60	33	44 38 49
6	»	5	0.98	0.20	5.26	5.02 4.71 4.58	47	44 38 49
7	»	6.7	0.88	0.50	5.25	5.50 5.34 5.40	54	45 47 45
8	»	6.7	0.88	0.50	5.07	5.50 4.84 5.25	51	50 60 55
9	»	5.0	0.43	0.12	5.11	5.80 4.64 5.30	42	64 68 60
10	»	5.0	0.43	0.12	5.25	4.22 5.05 5.09	45	50 70 71

Segue TABELLA.

N. progressivo	Organo di cui si è iniettato l'estratto	Azoto iniettato mg.			Cloro o/oo		Azoto non proteico mg. per 100 g. di sangue	
		Totale	Non proteico	Amminico	Prima della iniezione	Dopo l'iniezione	Prima della iniezione	Dopo l'iniezione
11	Fegato	15.3	3.84	1.00	5.04	5.11 5.42 5.12	57	50 85 110
12	»	15.3	3.84	1.00	5.14	4.99 5.00 5.14	47	40 70 130
13	Rene	3.92	0.94	0.41	4.70	4.9 4.5 4.7	53	54 87 85
14	»	3.92	0.94	0.41	5.33	5.21 4.97 4.77	71	50 95 94
15	»	4.48	0.82	0.33	4.37	4.97 4.26 5.30	54	59 55 81
16	»	4.48	0.82	0.33	4.76	4.73 4.78 4.75	66	70 50 85
17	»	3.60	1.52	0.56	4.33	3.50 4.80 4.60	74	78 100 110
18	»	3.60	1.52	0.56	4.65	3.28 4.77 4.73	60	100 89 110
19	»	7.44	2.24	0.75	5.06	4.97 5.04 5.04	51	46 70 100
20	»	7.44	2.24	0.75	4.90	5.30 4.90 5.24	42	55 81 110



Segue TABELLA.

N. progressivo	Organo di cui si è iniettato l'estratto	Azoto iniettato mg.			Cloro o/oo		Azoto non proteico mg. per 100 g. di sangue	
		Totale	Non proteico	Amminico	Prima della iniezione	Dopo l'iniezione	Prima della iniezione	Dopo l'iniezione
21	Intestino	3.52	1.38	0.71	4.92	4.84 4.66 4.77	70	75 60 78
22	»	3.52	1.38	0.71	4.87	4.89 4.28 4.82	64	79 78 78
23	»	3.20	1.74	0.80	4.94	4.98 5.06 5.05	57	59 110 130
24	»	3.20	1.74	0.80	4.79	5.70 4.94 5.05	70	75 75 130
25	»	3.20	1.74	0.80	5.02	5.26 5.26 5.28	59	65 69 110
26	»	3.20	1.74	0.80	4.79	5.03 4.98 5.00	65	60 65 80
27	»	10.40	4.25	1.80	4.87	5.75 5.18 4.55	52	93 107 110
28	»	10.40	4.25	1.80	4.88	4.88 5.07 4.94	46	77 77 110
29	»	10.47	4.25	1.80	4.96	4.11 4.81 Obitus	43	100 84

Che in realtà così fosse, viene dimostrato chiaramente dalle presenti esperienze, nelle quali la tecnica essendo rimasta assolutamente identica, differenza essendosi avuta soltanto nella maggiore quantità di sangue prelevato, abbiamo ottenuto dei valori normali oscillanti da mg. 35 a 70 per g. 100 di sangue, cioè dei valori che sono sensibilmente gli stessi che si ottengono con qualche grammo di sangue, e che vengono comunemente dati dagli autori come normali pel sangue di ratto.

Abbiamo sperimentato in complesso su 29 ratti, iniettando cc. 4 o 8 di estratto di organo, contenenti quantità di azoto oscillanti da mg. 3.20 a mg. 16.00.

Diamo nella tabella precedente i risultati ottenuti. I dati dell'azoto non proteico e del cloro nel sangue, prima dell'iniezione, sono la media delle tre determinazioni fatte nei tre giorni precedenti l'iniezione. I singoli dati invece, ottenuti dopo l'iniezione, sono riportati in ordine di tempo.

Il cloro è espresso in grammi di NaCl per mille di sangue; l'azoto non proteico invece è espresso in mg. per 100 g. di sangue.

Osservando i dati riportati nella tabella, si nota subito, che i tre estratti iniettati hanno avuto sull'animale un effetto diverso. Infatti, con l'estratto di fegato, su 12 ratti si sono avuti 7 casi di ipocloremia, 3 di ipercloremia e 2 casi che noi chiameremo misti (ratti nn. 8 e 9), perchè nel primo giorno dopo l'iniezione si è osservata ipercloremia, nel 2° giorno ipocloremia e nel 3° ancora ipercloremia.

Con l'estratto di rene su 8 ratti, si sono avuti 2 casi di ipocloremia, 1 di ipercloremia, un caso in cui non si è osservata alcuna variazione della cloremia in seguito all'iniezione (n. 16) e 4 casi misti secondo la definizione data sopra.

Con l'estratto di intestino su 8 ratti (escludiamo il n. 29, perchè morto al 3° giorno dopo l'iniezione) si sono avuti 2 casi di ipocloremia, 4 di ipercloremia e 2 misti.

Nel complesso possiamo quindi dire, che l'estratto di fegato ha avuto un notevole effetto ipocloremico, meno gli estratti di rene e di intestino; anzi con quest'ultimo si è avuto, nel 50 % dei ratti posti in esperienza, un effetto opposto, cioè ipercloremico.

Per quanto riguarda i rapporti tra quantità di azoto iniettato e entità dell'ipocloremia osservata, nessuna relazione è risultata tra esse. Infatti, con mg. 16 di azoto i ratti 1 e 2 hanno avuto una marcatissima ipocloremia, mentre i ratti 11 e 12 con quasi la stessa quantità di azoto, e cioè con mg. 15.3 hanno avuto l'uno ipercloremia e l'altro una lievissima ipocloremia al primo giorno dopo l'iniezione, subito compensata nei due giorni seguenti l'iniezione. E ancora: il ratto n. 3 ha ricevuto mg. 8 di azoto, ed ha presentato una ipocloremia egualmente notevole che quella del ratto n. 1, per esempio, che ha ricevuto doppia quantità di azoto.

Esempi analoghi possono riscontrarsi nei ratti, nei quali si è iniettato estratto di rene o di intestino.

Tutto ciò che abbiamo ora detto per l'azoto totale, possiamo estenderlo sia all'azoto non proteico che all'azoto amminico, poichè in genere questi seguono proporzionalmente, nei vari estratti, l'azoto totale.

Si deve dunque pensare, a nostro parere, ad una differenza non quantitativa, ma qualitativa.

Alla stessa conclusione portano i confronti tra azoto non proteico dosato nel sangue dopo l'iniezione, e le variazioni di cloro osservate. Anche qui nessuna corrispondenza tra i valori dell'azoto non proteico e quelli del cloro. In genere, si è notato, che gli estratti di fegato, intestino e rene hanno prodotto un aumento dell'azoto non proteico del sangue, ma quest'aumento non ha condizionato in alcun modo però, nè l'entità, nè il senso delle variazioni di cloro osservate.

Ciò ci conferma in una nostra idea, espressa nel nostro citato lavoro, e cioè, che ipocloremia e aumento di azoto non proteico, e quindi, naturalmente, iperazotemia, sono manifestazioni concomitanti e non necessariamente dipendenti.

In tutte le nostre esperienze, gli animali sono sopravvissuti all'iniezione anche per mesi; soltanto il ratto n. 29 è morto al terzo giorno dopo l'iniezione.

Tutti gli animali hanno mostrato di sopportare bene l'iniezione, e infatti, dopo di essa, hanno continuato ad alimentarsi, ad emettere feci e urine, normali per quantità e qualità. Solo nel primo giorno dopo l'iniezione, si mostravano un po' torpidi, con tendenza ad isolarsi e rimanere immobili per lunghe ore agli angoli della gabbia. Ma già al 2° giorno erano tornati vivaci, e al 3° giorno completamente normali nel loro comportamento esteriore.

Riassumendo, e tenendo presenti in questa Nota anche i risultati riferiti nel lavoro più volte citato, sull'iniezione di estratto muscolare, sempre nel ratto, possiamo dire, che in generale gli estratti acquosi di muscoli e di altri organi quali il fegato, il rene e l'intestino, si sono mostrati capaci di provocare una ipocloremia più o meno marcata.

L'ipotesi quindi, che nei muscoli e in vari organi, come per es. rene, fegato, intestino ecc., siano presenti sostanze, che, direttamente o indirettamente possano provocare una ipocloremia più o meno marcata, acquista a nostro parere, un più solido fondamento dai risultati da noi ora esposti.

Quale la natura di questa o di queste sostanze? Gli autori francesi, chirurghi per la maggior parte, propendono per sostanze di natura azotata, e più specificamente di natura azotata non proteica, riferendosi in particolar modo alle sostanze azotate non proteiche, che normalmente sono contenute nel sangue, e cioè, urea, acido urico, amminoacidi, creatina, creatinina, ecc.

I risultati da noi ottenuti riguardo ai rapporti tra ipocloremia e quantità di azoto non proteico iniettato, e i rapporti tra ipocloremia e azoto non

proteico trovato nel sangue dopo l'iniezione di estratti muscolari e di organi, non confortano questa ipotesi.

Ma a questo riguardo ci proponiamo di portare un contributo più diretto con una serie di esperienze, che abbiamo in corso, sulle variazioni della cloremia in seguito all'iniezione di urea, acido urico, creatina, creatinina, ecc., vale a dire dei componenti la frazione azotata non proteica del sangue normale. Per ora, a conclusione del presente lavoro, ci contenteremo di poter affermare:

1° che l'estratto acquoso di fegato iniettato nella regione glutea del ratto, ha avuto un notevole effetto ipocloremico; meno gli estratti di rene e di intestino: con quest'ultimo anzi, si è avuto nel 50 % dei ratti posti in esperienza, un effetto opposto, cioè ipercloremico;

2° che in quasi tutti i ratti studiati si è osservato un aumento dell'azoto non proteico del sangue, dopo l'iniezione degli estratti di organi sopra detti;

3° che nessun rapporto quantitativo è risultato tra l'entità dell'ipocloremia e dell'ipercloremia osservate, e la quantità di azoto sia totale che non proteico iniettata. Egualmente nessun rapporto è stato notato tra entità della stessa ipocloremia o ipercloremia e aumento dell'azoto non proteico del sangue dopo l'iniezione;

4° che l'ipotesi di Chabannier e Lobo-Onnel sulla possibilità che l'ipocloremia post-operatoria possa essere prodotta da sostanze azotate tossiche, liberatesi a livello dei tessuti traumatizzati per l'atto operatorio, trova riscontro e appoggio nei risultati sperimentali da noi ottenuti; dimodochè ci sembra utile perseguirla in tutte le sue conseguenze, come sopra abbiamo annunciato.



**Fisiologia.** — *Ulteriori ricerche circa l'influenza degli ormoni sessuali sulla maturazione delle carpe.*<sup>(1)</sup> Nota<sup>(2)</sup> di GINA CASTELNUOVO, presentata dal Corrisp. G. BRUNELLI.

Nel 1937 iniziavo delle esperienze [12] sull'effetto che potevano produrre gli ormoni sessuali e l'ormone gonadotropo introdotti, sull'andamento della spermatogenesi in carpe a specchi di nove mesi. Per quello che si conosce sull'azione in genere di questi ormoni, mi aspettavo di avere un possibile acceleramento della spermatogenesi mediante l'ormone gonadotropo, ma un effetto inibitorio coll'introdurre l'ormone follicolare e l'androsterone. Ora invece ho dovuto constatare, con mia grande sorpresa, che tutte e tre le specie di ormoni introdotti portavano ad un notevole aumento della spermatogenesi rispetto ai controlli, acceleramento reso manifesto dalla presenza di grandi masse di spermatozoi nei tubuli in tempo prematuro. Le esperienze furono eseguite dal mese di marzo al mese di luglio, quindi dall'età di nove mesi in poi. Si adoperò allora come ormone follicolare il *Prodynon B oleosum* forte di Schering a 50.000 UI e come ormone maschile l'androsterone dell'Istituto Biochimico Ligure titolato a 1/2 UG per 1 cc. Le quantità introdotte per animale variarono da 5000 UI come minimo a un massimo di 20.000 UI; e per l'androsterone da un minimo di 0.05 di UI a un massimo di 0.40 di UI.

Ho creduto opportuno riprendere durante il 1938 le esperienze, sia adoperando altri prodotti per essere sicura che l'effetto ottenuto non fosse specifico a questi, sia per vedere se col cambiare le quantità introdotte non si venisse ad avere un risultato differente.

Riporto in questa Nota soltanto i primi risultati ottenuti in ricerche preliminari.

Le carpe dal mese di febbraio in poi vennero tenute in acquari sotto acqua corrente, separate in lotti diversi, e tenute per tutto nelle stesse condizioni nelle quali erano tenute per il 1937. Ho usato quest'anno come ormone maschile il propionato di testosterone della Degewop Organon<sup>(3)</sup>, (*Neo-Hombreol syntheticum*) in cui un cc contiene 5 mg. di propionato di testosterone. Ora sappiamo che adoperando come test l'accrescimento delle vescicole seminali del ratto o la crescita della cresta di cappone si ha un effetto circa cinque o sette volte maggiore usando il testosterone invece del-

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di Idrobiologia di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1938.

(3) Tengo qui a ringraziare vivamente il dott. Luwisch della Degewop Organon per i prodotti gentilmente fornitimi durante l'esecuzione delle ricerche.

l'androsterone, e siccome d'altra parte sappiamo che unità internazionale dell'androsterone è 0.1 mg., ne deduciamo che 1 mg. di testosterone paragonato sulla cresta di cappone o sulle vescicole seminali di ratto corrisponde a 50-70 UI e quindi 1 cc. di Neo-Hombreol viene a comprendere da 250 a 350 UI.

Ora gli animali che dovevano subire iniezioni di testosterone vennero divisi in tre lotti: un lotto fu costituito da animali che ebbero in tutto 2.5 mg. di testosterone o 875-1225 UI (a seconda che si consideri il rapporto tra androsterone e testosterone essere 5 o 7); un altro lotto di animali venne iniettato col prodotto diluito a metà in modo che ciascun animale ebbe in tutto 1.25 mg. o 437-612.5 UI; un altro lotto infine di animali ebbe a subire quattro iniezioni di 0.1 cc. per volta della soluzione diluita 35 volte in modo che circa 0.1 cc. di questa soluzione veniva a corrispondere a circa 1 UI, venendo quindi ad avere in tutto 0.04 mg., o, 4 UI.

Ora invece gli animali sperimentati nel 1937, anche se iniettati con la dose più forte, non raggiunsero mai 1 UI, ma al massimo 0.40 di UI. Gli animali vennero uccisi circa un mese dopo l'ultima iniezione; i testicoli furono fissati con una soluzione di sublimato acetico e le sezioni furono colorate coll'Ematossilina e l'Eosina.

Vennero iniettati in tutto 109 animali, dei quali soltanto 32 risultarono maschi all'esame microscopico. Di circa 40 animali tenuti come controllo, soltanto 14 risultarono maschi. Di questi, 13 presentarono il testicolo costituito quasi esclusivamente di spermatogonii allo stadio di riposo; uno solo presentò alcuni spermii.

Gli animali invece che ebbero a subire iniezioni di testosterone diedero questi risultati: di 5 animali iniettati con 875 o 1225 UI in tutto, nessuno mostrò alcun acceleramento della spermatogenesi, presentando essi il testicolo molto arretrato, costituito esclusivamente da cellule spermatogoniali; dei 10 animali che ebbero in tutto 612, o, 437 UI, 7 rimasero allo stadio dei controlli e quindi allo stadio di spermatogonii, 2 arrivarono alla formazione di rari spermatidii, e 1 soltanto portò alla formazione di numerosi spermii racchiusi nei tubuli; degli animali poi iniettati con 4 UI, 3 soltanto risultarono maschi, e di questi 2 arrivarono alla formazione di numerosi spermii, mentre uno rimase alla formazione di spermatogonii. Quindi gli animali trattati con la dose più forte di propionato di testosterone non presentarono il minimo segno di acceleramento rispetto ai controlli; in quelli trattati con dosi più deboli (612 UI) si dimostrò esservi una certa possibilità da parte dell'animale a reagire alla sostanza, mentre poi in quelli animali trattati con 4 UI la reazione all'ormone iniettato fu maggiore.

Se ci è permesso perciò trarre da queste preliminari esperienze una sia pur teorica conclusione, dovremmo dire che il propionato di testosterone produce un certo effetto nell'accelerare la spermatogenesi quando è iniettato in concentrazioni assai deboli, quali può essere la quantità di 4 UI,

mentre man mano che la sua concentrazione va aumentando, il suo effetto sembra annullarsi sempre di più, finchè con quantità di 1225 UI non si ha il minimo acceleramento.

Se le cose vanno veramente così, si sarebbe avuta piena concordanza con quanto si è ottenuto nel 1937 in cui quantità di androsterone che al massimo raggiungevano 0.4 di UI e al minimo 0.05 di UI avevano portato in tutti i casi esaminati, ad un notevole acceleramento di spermatogenesi. In questo caso l'ormone maschile introdotto in così piccola quantità non avrebbe prodotto quell'effetto inibitorio che producono dosi maggiore di queste sostanze sull'ipofisi, la quale in tal modo diventa incapace di produrre la necessaria secrezione per mantenere in attività il testicolo. Effetti dannosi infatti, prodotti coll'introduzione di queste sostanze, sono noti sia sul ratto che sul cane. Moore e Price [1] trovano infatti nel 1937 che in giovani ratti maschi dosi giornaliere di androsterone sintetico da 25 a 100  $\gamma$  non producono alcun effetto stimolante sulla spermatogenesi; dosi di 1 o 2 mg. somministrate prima della produzione degli spermatozoi deprimono la spermatogenesi, mentre dosi di 6 mg. al giorno non hanno alcun effetto percettibile sui testicoli di ratti adulti, in quanto secondo gli A. queste dosi probabilmente non sono ancora sufficienti ad inibire l'ipofisi di ratti divenuti adulti.

Korenchevsky [2] e collaboratori trovano nel 1933 che queste sostanze riducono notevolmente la grandezza dei testicoli di giovani ratti, mentre portano a diminuzione di peso del testicolo in ratti adulti.

Itho e Kon [3] nel 1935 dimostrarono i danni provocati coll'introduzione di queste sostanze sull'accrescimento e sullo sviluppo dei testicoli in giovani cani.

D'altra parte bisogna ricordare che Wells e Moore [4] nel 1936 trovarono che nel *Citellus tridecemlineatus* dosi giornaliere di 0.5-1.5 mg. di androsterone per un periodo di 20-31 giorni facevano apparire, in tempo prematuro rispetto ai controlli, anche quattro mesi prima, gli spermatozoi in testicoli di maschi giovani e anche adulti. Si aveva quindi in questo caso non un effetto inibitorio con la somministrazione di queste sostanze, ma un effetto di acceleramento. La ragione di questo fatto non è ben chiara agli autori, i quali in seguito ai loro risultati sono tratti a dire che evidentemente esiste un equilibrio ormonale differente in questo tipo di mammifero che si riproduce una volta all'anno dal tipo che si riproduce costantemente rappresentato dal ratto.

Ora niente ci fa escludere che questo possa verificarsi nella carpa, in quanto ben poco ancora sappiamo sul comportamento di questi animali rispetto agli ormoni loro somministrati.

Per l'esame poi dell'influenza che ha l'ormone follicolare sulla spermatogenesi delle carpe, un altro gruppo di animali venne a subire iniezioni di ormone follicolare (*Folliculin Menformon* della Degewop Organon): nelle

esperienze invece eseguite durante il 1937 venne adoperato il *Progynon B oleosum* forte di Schering a 50.000 UI. Le carpe nel 1937 ricevettero quantità di 50.000, di 15.000 e di 20.000 UI di questa sostanza durante i mesi di marzo, aprile, maggio e giugno. Nelle esperienze di quest'anno si adoperò il *Menformon* a 50.000, a 10.000 e a 1000 UI. Le iniezioni furono di 0.1 cc. per volta, si susseguirono una volta alla settimana, e furono fatte in numero di 5 per il *Menformon* a 10.000 e a 1000 UI, mentre solo tre iniezioni si eseguirono in quegli animali che ebbero a subire il *Menformon* a 50.000 UI. Si ebbe così un lotto di 25 animali che venne ad avere in tutto 500 UI: di questi soltanto 6 risultarono maschi, dei quali due arrivarono alla formazione di spermi e quattro no.

Un altro lotto di animali venne invece ad avere 5.000 UI; dei 5 maschi che ne risultarono, uno solo arrivò alla formazione di spermi, mentre gli altri 4 si limitarono a formare alcuni spermatidii.

Dei 20 animali poi che subirono 3 iniezioni del preparato a 50.000 UI, tre soli furono maschi, dei quali due rimasero coi testicoli allo stadio di spermatogonii, e uno solo arrivò alla formazione di spermi.

Quindi dei 14 animali iniettati con ormone follicolare, 4 arrivarono alla formazione di spermi e 10 no, e precisamente lo stesso effetto si sarebbe avuto sia con quantità di 500 che di 15.000 UI, mentre con dosi di 5000 UI la percentuale dei negativi (1 positivo e 4 negativi) sarebbe stata maggiore; non è quindi escluso che una concentrazione debole e una concentrazione forte abbiano avuto un qualche effetto nell'accelerare la spermatogenesi, cosa che soltanto in minima parte avrebbe avuto una concentrazione moderata.

Invece è noto di regola da tutte le ricerche che sono state fatte con ormone follicolare, che dosi sia moderate che forti di follicolina, producono effetti inibitori nel testicolo sia di ratti che di topi. Ci basti citare tra le numerose esperienze in proposito quelle di Golding e Ramirez [5], di Laqueur e de Jongh [6], di Tuchmann [7], di Schoeller e Gehrke [8], per non citarne altre.

D'altra parte Hohlweg [9] sostiene che iniettando, anche in una sola iniezione, dosi molto forti di ormone follicolare si producono nell'ipofisi modificazioni istologiche simili a quelle che avvengono nell'ipofisi delle gravide e si ha un improvviso versamento di ormone gonadotropo, che nelle femmine di ratti si rende manifesto per la comparsa di numerosissimi corpi lutei. Questo è stato confermato da Berblinger e da Zeep Curt [10] nel 1938 sul topo. Quest'ultimo A. ha trovato che oltre che nei ratti, anche nei topi quando si inietta una forte dose di ormone follicolare si ha una gran espulsione di sostanze stimolanti la gonade, quali, per es., può essere il fattore luteinizzante dell'ipofisi anteriore; ciò può avvenire secondo l'A. anche in animali maturi senza riguardo al loro ciclo sessuale.

Inoltre Del Castillo e Pinto [11] dimostrarono che una fortissima dose di estrone (50 U per 12 giorni) fece aumentare la spermatogenesi in



testicoli di ratti adulti, mentre dosi più deboli produssero effetti dannosi al testicolo.

Potremmo forse pensare che nel nostro caso potrebbe essere avvenuto qualcosa di simile, ma naturalmente trattandosi di un gruppo di animali così differenti, non possiamo avere un'idea precisa dell'andamento esatto dei fatti.

Ora se noi prendiamo ad esaminare i risultati del 1937 ottenuti con iniezioni di progynon, con quantità che andavano da 5000 a 20.000 UI in tutto, troviamo che in tutte le esperienze avemmo acceleramento di spermatogenesi. Bisogna notare però che nel 1937 le iniezioni erano fatte di 5000 UI per volta per potere raggiungere la dose finale; mentre quest'anno la stessa quantità totale veniva raggiunta facendo un numero maggiore di iniezioni, e cioè era somministrata in dosi minori per volta, il che forse potrebbe avere influito sul risultato finale dell'esperienza.

In ogni modo quello che risulta ben chiaro dalle esperienze eseguite nel 1937 e nel 1938 è che l'ormone follicolare non produce in questi animali un effetto dannoso, bensì forse un possibile effetto di acceleramento sulla spermatogenesi. Come e perchè ciò si verifichi a differenza della maggior parte degli animali, non è affatto spiegato.

Dobbiamo infine far notare che negli animali sperimentati quest'anno sia con ormone follicolare che con ormone testicolare, gli spermatozoi non si trovarono mai in così grandi ammassi come si sono avuti nel 1937. Su questo vari fatti possono avere influito e cioè: mentre nel 1937 gli animali vennero sperimentati per la maggior parte in un periodo che andava da aprile, a maggio e giugno, nel 1938 il maggior numero di esperienze fu condotto nei mesi di marzo e aprile, in un periodo quindi in cui gli animali erano un po' più giovani e quel che più importa in un periodo in cui la temperatura dell'acqua in cui si trovavano, era più fredda, e per un periodo più lungo, essendosi quest'anno il freddo prolungato per un tempo più lungo. Ora tutto questo potrebbe avere influito sull'andamento delle esperienze.

In secondo luogo poi, l'ormone maschile introdotto, non fu l'androsterone come nel 1937, bensì il testosterone sintetico il quale se è considerato essere cinque volte più influente sulle vescicole seminali del ratto e sulla cresta del cappone, non è affatto detto abbia lo stesso effetto sul testicolo della carpa.

Tali sono i primi risultati ottenuti da queste preliminari esperienze, che devono essere naturalmente confermati dall'esame di un maggior numero di esemplari per poter dare delle risposte definitive ed esaurienti al problema in esame.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] C. R. MOORE e D. PRICE, *Endocrinol.*, 21, 1937.  
[2] V. KORENCHESKY, M. DENNISON e A. KOHN-SPEYER, « *Biochem. J.* », 27, 1933, p. 557.  
[3] M. ITHO e T. KON, « *Comp.-Rend. Soc. de Biol.* », 120, 1935, p. 678.  
[4] L. J. WELLS e C. R. MOORE, « *Anat. Rec.* », 66, 1936, p. 181.  
[5] G. T. GOLDING e F. T. RAMIREZ, *Endocrinol.*, 12, 1928, p. 804.  
[6] E. LAQUEUR, P. C. HART e S. E. DE JONGH, « *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* », 29, 1926, p. 1.  
[7] H. TUCHMANN, « *Compt.-Rend. Soc. de Biol.* », 122, 1936.  
[8] W. SCHOELLER e M. GEHRKE, « *Biochem. Zeitschr.* », 264, 1933.  
[9] HOHLWEG, « *Klin. Wschr.* », 1934.  
[10] ZEEF KURT, « *Königsberg i Pr. Diss.* », 22, 1936.  
[11] E. B. DEL CASTILLO e A. PINTO, « *Rev. Soc. Argent. de Biol.* », 13, 1937, p. 426.  
[12] G. CASTELNUOVO, « *Rivista di Biologia* », vol. 23, 1937.

**Fisiologia.** — *Sulla composizione chimica delle proteine muscolari della trota iridea in rapporto alla maturazione sessuale* <sup>(1)</sup>.  
Nota <sup>(2)</sup> di E. MARIOTTI, presentata dal Corrisp. G. BRUNELLI.

La presente Nota riporta i dati ottenuti in alcune analisi eseguite sulle proteine muscolari di trota iridea secondo il metodo di Van Slyke, e le modificazioni di carattere tecnico apportate al metodo stesso usato nel lavoro.

Scopo delle ricerche era di investigare se esistano e quali siano le variazioni nella percentuale degli amminoacidi principali componenti le proteine del muscolo, in rapporto alla maturazione delle gonadi.

Infatti è opinione di molti fisiologi, come riportano anche N. Zuntz e A. Loewy <sup>(3)</sup>, che il ricambio materiale degli organi più importanti abbia la precedenza su quello degli altri, precedenza che si accentua quando, per diverse cause, venga ad essere limitato o insufficiente il materiale destinato al mantenimento dell'individuo. Non solo, ma in tali casi, sempre secondo la stessa teoria, si avrebbe una utilizzazione del materiale componente i tessuti di organi che hanno, o vengono ad avere minore importanza.

Questo fenomeno è stato riscontrato nei salmonidi, in cui si ha annualmente la costruzione di una quantità di prodotti sessuali che nella femmina può essere di più del venticinque per cento del peso totale, prodotti com-

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di Idrobiologia di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1938.

(3) N. ZUNTZ e A. LOEWY, *Manuale di Fisiologia dell'Uomo*. Un. Tip. Ed. Torinese, Torino, 1921, p. 721.

posti da materiale di primissimo ordine, come attestano le analisi di numerosi autori.

Il salmone del Reno, durante il periodo della maturazione, compie il suo viaggio dal mare verso i fiumi per riprodurvi, e non assume nutrimento dall'esterno cosicchè la costruzione delle uova e delle cellule seminali avviene a spese del grasso sottocutaneo, per quello che concerne i grassi, e della massa dei muscoli, per quello che concerne le proteine.

Infatti durante le mie esperienze ho notato che, se si divide il numero indicante il peso della muscolatura totale di una trota, per quello indicante il peso delle gonadi, si ottiene un numero, che si potrebbe chiamare *modulo di maturazione*, che va rapidamente diminuendo col crescere del grado di maturazione dell'individuo.

Tale diminuzione può attestare una precedenza del ricambio concernente la fabbricazione dei prodotti sessuali, sul ricambio attivo dei tessuti muscolari. Inoltre le proteine delle uova e dello sperma sono proteine di composizione chimica diversa da quelle muscolari, e di un valore molto diverso per il loro contenuto percentuale superiore in amminoacidi indispensabili e in composti fosforati, cosicchè il nutrimento normale può non essere sufficiente a sopperire a tutte le esigenze occasionali di questi nuovi tessuti.

È parso così utile indagare se, in trote iridee di ambo i sessi, allevate in acquario, in eguali condizioni di nutrimento, di età, e alla stessa distanza di tempo dall'ultima spremitura, si avessero variazioni nella composizione chimica delle proteine muscolari, in un periodo complessivo di sette mesi, di cui cinque prima della spremitura e due dopo, di cui uno, il secondo, in istato di completa inanizione.

Abbiamo allo scopo adottato il metodo di Van Slyke per l'analisi delle proteine <sup>(1)</sup>. Questo consta come è noto delle parti seguenti: Idrolisi delle proteine con acido cloridrico; nell'idrolisato, dopo allontanato l'acido cloridrico, determinazione delle melanine e dell'azoto ammidico; precipitazione con acido fosfowolframico in ambiente acido degli amminoacidi contenenti due gruppi amminici, arginina, istidina lisina e cistina, determinazione diretta dell'arginina e della cistina precipitata e valutazione indiretta degli altri due.

Il modo di esecuzione delle singole operazioni è di capitale importanza per l'ottenimento di risultati concordanti e che diano affidamento.

Siccome la quantità di azoto presente nell'idrolisato influisce, come vedremo, sui valori che si ottengono nella frazione dei fosfowolframati <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup>,

(1) VAN SLYKE, « J. Biol. Chem. », 10, 1911, pp. 15-55; 22, 1915, p. 281; 23, 1915, p. 411.

(2) KERNOTT J. C., JONN KNAGGS e N. E. SPEER, « Biochem. J. », 24 (2), 1930, p. 379.

(3) THIMANN, K. V., « Biochem. J. », 24, 1930, pp. 368 377.

così occorre eseguire la determinazione sempre sulla stessa quantità di sostanza e su volumi rispettivamente sempre uguali di soluzioni.

Il tipo di acido con cui si eseguisce l'idrolisi, la concentrazione dell'acido stesso, e la durata dell'ebollizione, influiscono sui risultati. Kossel e Kutscher <sup>(1)</sup> trovano sperimentando con  $H_2SO_4$  per 12 ore (a), HCl concentrato per 12 ore (b), e HCl diluito per tre ore (c), le seguenti differenze.

	a	b	c
Istidina . . . . .	0.90	0.76	1.56
Arginina . . . . .	4.45	4.21	4.50
Lisina . . . . .	1.84	2.29	2.00

Pare che anche un prolungato contatto a freddo tra la proteina e l'idrolisante, prima dell'inizio dell'ebollizione influisca sui risultati <sup>(2)</sup>.

L'allontanamento dell'azoto ammoniacale e la separazione delle melanine è un'operazione molto delicata in quanto occorre portare in ambiente alcalino l'idrolisato e distillarne l' $NH_3$ . Ora tra gli amminoacidi presenti ve ne sono alcuni, la cistina e l'arginina, che in ambiente anche debolmente alcalino si decompongono <sup>(3)</sup>.

È stata studiata una modificazione per ovviare alla decomposizione dell'arginina, allontanare l'N ammidico, e decomporre al tempo stesso la cistina presente, in modo da dosarne lo zolfo eliminandola prima della precipitazione dei fosfotungstati <sup>(4)</sup>. Nel nostro caso però la quantità di cistina era trascurabile, e non ci siamo dovuti occupare di questo problema.

Gran parte degli autori eseguono la separazione dell' $NH_3$  mediante distillazione a pressione ridotta. Plimmer e Rosedale <sup>(5)</sup> trovano che durante l'evaporazione della soluzione alcalinizzata con CaO, si hanno perdite di  $NH_3$  ed usano il metodo dell'aereazione per scacciare l'ammoniaca dalla soluzione e dosarla, metodo che ho adottato io pure nel presente lavoro.

L'operazione più importante nel metodo di Van Slyke è la precipitazione dei fosfowolframati delle basi. Gran parte delle discrepanze tra i valori trovati dai diversi ricercatori sullo stesso argomento, è dovuto, secondo Kernott e Knaggs <sup>(2)</sup>, al variare di numerose condizioni da cui dipende

(1) KOSSEL e KUTSCHER, «Z. Physiol. Chem.», XXXI, 1900, p. 165.

(2) KERNOTT e KNAGGS, «Biochem. J.», 22, 1928, p. 528.

(3) HOFFMANN, «J. Biol. Chem.», 65, 1925, p. 251; DENIS, «J. Biol. Chem.», 8, p. 365.

(4) E. MARIOTTI, «Rend. della R. Acc. dei Lincei», vol. XXVI, ser. 6<sup>a</sup>, 2° sem., fasc. 7-8, ottobre 1937.

(5) R. H. A. PLIMMER e J. L. ROSEDALE, «Biochem. J.», 19, 1925, p. 1004, XXX, p. 1021.



la percentuale di azoto precipitata dall'acido fosfotungstico. Tali condizioni sono:

1° La concentrazione dell'azoto nella soluzione, che <sup>(1)</sup> influisce sulla precipitazione per formazione di complessi <sup>(2)</sup> tra le basi e alcuni monoamminoacidi, complessi che non precipitano con acido fosfowolframico.

2° La temperatura a cui avviene la precipitazione e il sedimentare del precipitato. Infatti i fosfotungstati sono parzialmente solubili <sup>(3)</sup>, solubilità che varia col variare della temperatura.

3° Il PH della soluzione.

Un eccesso del precipitante non influisce sui risultati <sup>(4)</sup>, mentre come è intuitivo, ha grande importanza il lavaggio del precipitato. La prolina può precipitare con i tre amminoacidi suddetti, per circa il 35 % <sup>(3)</sup>.

Data questa importanza delle varianti nei particolari della tecnica, riporto qui dettagliatamente solo le modificazioni apportate al metodo di Van Slyke per quel che riguarda la precipitazione e il trattamento delle basi. Per maggiori particolari si rimanda al lavoro in corso di stampa.

Si portano cc. 20 della soluzione liberata dalle melanine e dall' $\text{NH}_3$  e contenente gr. 3 di sostanza (calcolata libera da ceneri) in 150 cc., in un tubo da centrifuga da 50 cc. nel quale si sia fatto un segno alla capacità di cc. 30. Vengono neutralizzati con NaOH diluito, indi addizionati di cc. 4 di HCl 37% e portati con acqua al volume di cc. 30.

La soluzione ha così il PH optimum per la precipitazione e le condizioni vengono riprodotte identicamente per ogni analisi.

Si lascia raffreddare, si aggiunge un leggero eccesso di acido fosfowolframico al 30 %, si agita e si centrifuga. Si aspira la soluzione sovrastante con un capillare applicato alla pompa e si lava tre volte con HCl al 5 % (15 cc. ogni volta) centrifugando.

Il precipitato viene quindi disciolto in NaOH al 10 % fino a leggera alcalinità (fenoltaleina), e addizionato di un lieve eccesso di  $\text{BaCl}_2$ . Si centrifuga trasportando il liquido limpido sovrastante in una beutina a cui è applicato un capillare, e in cui si opera una depressione.

In tal modo si raggiunge lo scopo di operare la precipitazione in un mezzo avente sempre la stessa acidità, e sempre la stessa concentrazione di azoto all'incirca. Inoltre l'operazione è molto rapida, e il lavaggio per centrifugazione consente una separazione perfetta del precipitato e un controllo rigoroso delle condizioni di lavaggio.

(1) Ved. Nota citata in (2), p. 62.

(2) N. J. GAWRILOW e M. M. BOTWINIK, « Biochem. Zeitschr. », 214 (1/3), 1929, p. 119.

(3) Ved. Nota citata in (3), p. 62.

(4) Ved. Nota citata in (5), p. 63.

Ripetendo più volte la precipitazione sulla stessa soluzione si trova che le differenze oscillano intorno all'1-2 %:

	I	II	III
Arginina . . . . .	13.50	13.50	13.48
Istidina . . . . .	3.92	3.93	3.92
Lisina . . . . .	19.41	19.41	19.41

Il liquido contenente le basi viene concentrato dopo acidificazione, e portato a volume di 50 cc. (Soluzione B) su cui si determina arginina, N amminico, e N totale. L'istidina viene calcolata con la formula Van Slyke:

$$H = 3/2 (D - 3/4 \text{ arg.})$$

dove H = istidina e D = N non amminico dei diamminoacidi.

L'N amminico residuo e l'N non amminico residuo, vengono calcolati per differenza.

I risultati ottenuti sono esposti nelle tabelle e nei grafici seguenti:

TABELLA I.

Numero	Data	Età anni	Sesso	Peso muscolo	Peso gonadi	Rapp. M/G	N Uminico *	N Ammidico *	N di Arginina *	N di Istidina *	N di Lisina *	N complessivo delle basi *	N amminico residuo *	N non amm. resid. *	N Totale %
1	10-10	1	?	—	—	—	1.14	8.60	13.50	3.92	19.41	36.83	48.07	5.36	15.81
2	29-9	4	M	179.00	7.80	22.95	1.75	7.52	10.81	7.77	15.41	33.99	49.96	6.75	16.55
3	18-10	4	M	82.00	5.44	15.06	1.73	8.39	11.22	7.99	15.18	34.39	49.13	6.36	16.17
4	12-11	4	M	79.00	6.45	10.84	1.87	7.38	11.06	7.70	16.20	34.96	51.48	4.41	15.61
5	3-12	4	M	80.70	9.17	8.80	1.78	7.52	11.24	7.44	16.40	35.08	51.24	4.38	15.78
6	8-1	4	M	56.60	7.60	7.45	1.77	7.60	11.77	7.25	16.46	35.48	50.94	4.21	15.80
7	3-2	4	M	156.00	22.35	6.98	1.68	7.58	12.40	6.08	16.88	35.36	53.30	2.08	15.90
8	4-3	4	M	—	—	—	1.72	7.76	12.88	5.98	14.04	32.90	53.28	4.34	15.68
9	3-5	4	M	—	—	—	2.23	8.88	17.00	2.30	11.51	30.81	54.48	3.60	15.64

\* Per N tot. = 100.

TABELLA II.

Numero	Data	Età anni	Sesso	Peso muscolo	Peso gonadi	Rapp. M/G	N Uminico *	N Ammidico *	N di Arginina *	N di Istidina *	N di Lisina *	N complessivo delle basi *	N amminico residuo *	N non amm. resid. *	N Totale %
1	10-10	1	?	—	—	—	1.14	8.60	13.50	3.92	19.41	36.83	48.07	5.36	15.81
10	29-9	4	F	81.55	5.04	16.18	1.39	7.68	11.55	9.85	13.57	35.97	46.05	12.94	15.33
11	18-10	4	F	100.12	8.78	11.40	1.68	7.76	11.77	9.70	14.75	36.22	45.02	9.32	15.46
12	12-11	4	F	184.00	20.50	8.98	1.52	7.76	11.76	9.53	14.88	36.17	47.68	6.88	15.98
13	3-12	4	F	181.00	32.00	5.65	1.60	7.61	12.30	7.96	14.90	35.16	47.41	6.70	15.13
14	8-1	4	F	72.53	45.10	1.61	1.84	5.86	13.83	7.24	15.00	36.07	52.20	4.03	15.18
15	3-2	4	F	116.00	72.50	1.60	1.32	7.84	14.03	7.82	15.01	36.86	50.08	1.90	15.96
16	4-3	4	F	—	—	—	1.57	7.59	15.22	5.26	13.88	34.36	51.05	5.43	15.28
17	3-2	4	F	64.25	70.00	0.91	1.26	8.22	18.18	8.90	7.54	34.72	55.29	0.62	16.17
18	3-5	4	F	—	—	—	1.87	8.37	22.04	0.00	9.44	31.48	53.28	5.00	15.88

\* Per N tot. = 100.



La determinazione n. 1 che si trova riportata in ambedue le tabelle come confronto, è stata operata sul tessuto muscolare di tre trotelle di età un poco inferiore a un anno, il cui sesso non era praticamente definibile.

Le determinazioni che vanno dal n. 2 al n. 8 (maschi), e dal n. 10 al n. 16 (femmine), sono state eseguite su coppie di animali adulti di età oscillante intorno ai quattro anni, pescati, come indicano le tabelle, in date che distano tra loro circa un mese. Tali date sono riportate in ascisse nel grafico A, nel quale grafico non compaiono i valori che si riferiscono alla determinazione n. 17.

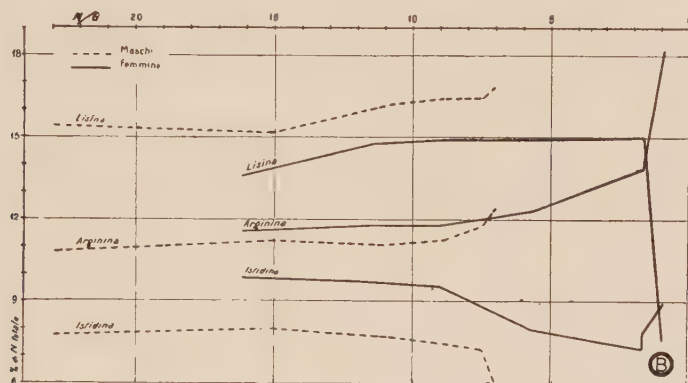


La data del 3 febbraio corrisponde alla spremitura, e quindi alla completa maturazione, per gli individui corrispondenti alle determinazioni n. 7 e n. 15.

La determinazione n. 17 si riferisce a un caso particolarmente notevole. Si tratta di una trota adulta di sesso femminile, che l'anno precedente non aveva subito la spremitura, cosicchè conteneva nelle gonadi, le uova dell'anno precedente schiacciate e in parte riassorbite, oltre a quelle formate durante l'ultimo periodo di maturazione. Il peso totale era di gr. 250, e il rapporto Muscolo totale/gonadi era inferiore a uno.

Infine le determinazioni n. 9 e n. 18 si riferiscono a una coppia di trote spremute in data 3 febbraio e mantenute in istato di completa inanizione durante tutto il secondo mese dopo la spremitura.

Il grafico B riporta le variazioni della arginina, istidina, lisina, rispetto al modulo di maturazione M/G da me ricavato, e contiene solo i dati riferentisi alle determinazioni dal n. 2 al n. 7 (maschi), e dal n. 10 al n. 17 (femmine), e cioè solo fino all'epoca della spremitura; l'ultimo tratto della curva corrisponde al n. 17.



Le tabelle e i grafici riportati dimostrano come, durante il periodo della maturazione, si abbia nelle proteine muscolari della trota iridea un aumento della percentuale dell'azoto di arginina, e una diminuzione nella istidina e nella lisina, la prima in modo molto più marcato.

Tali variazioni sono tanto più evidenti, quanto più si avvicina l'epoca della maturazione completa; si accentuano nel periodo di abbattimento e di inedia quasi completa che segue immediatamente la spremitura, e diventano notevolissime prolungando di proposito lo stato di inanizione.

Tutto ciò si verifica in modo molto meno evidente nel maschio che nella femmina, nella quale si ottiene il valore zero per l'istidina nel secondo mese di inedia dopo la spremitura (tab. II, n. 18).

Per l'interpretazione dei valori qui riportati rimandiamo al lavoro per esteso in via di compilazione.

**Patologia** (Malariologia). — *Differenziazione di razze di «Anopheles maculipennis» e sua importanza per la soluzione del problema malarico.* Nota <sup>(1)</sup> di D. FALLERONI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Il problema della incostante azione risanatrice della bonifica agraria fu posto (Tommasi Crudeli, 1882) già prima della scoperta dei parassiti malarici (Laveran) e della trasmissione dei medesimi per opera degli anofeli e solo degli anofeli (Grassi).

Dopo queste due grandi scoperte sorse un altro importante problema da risolvere, l'anofelismo senza malaria.

Bonservizi (1903-1905) attribuì l'azione risanatrice della bonifica agraria all'attrazione esercitata sugli anofeli dal bestiame stabulato ed io potei con studi eseguiti nel 1916-1917 confermare tale scoperta che poi esumai e avvalorai. Al concetto di Bonservizi accedette anche Roubaud (1920), il quale però ritenne, che l'azione degli animali non si esercitasse subito, ma fosse necessaria un'educazione trofica dell'insetto perchè si abituasse a pungergli gli animali invece che l'uomo.

La scoperta di Bonservizi dava la giusta ragione dell'anofelismo senza malaria.

Ma non sempre la stabulazione spiegava la sua azione risanatrice. Queste osservazioni mi mostrarono la necessità di rivolgere un più accurato esame agli insetti trasmettitori della malaria, che avevo rilevato comportarsi nelle diverse zone in modo così diverso da far nascere il sospetto della possibile esistenza di più razze o specie di *Anopheles maculipennis*. Il sospetto si mostrò giustificato. A seguito di ricerche fatte in maremma grossetana nel 1922 e successivamente nelle Paludi Pontine (Casale delle Palme, Pontemaggiore, Terracina) scoprii che l'*Anopheles maculipennis* non è una unità, ma l'unione di più razze o specie e resi di pubblica ragione la scoperta con una pubblicazione del 1924 <sup>(2)</sup>. La distinzione di razze si basava sui caratteri delle uova, caratteri differenziali che si conservano sempre in tutte le deposizioni di una stessa *Anopheles maculipennis* e nella discendenza. Distinsi: 1° uova grige screziate più o meno di nero e uova grige con due fasce nere trasverse in corrispondenza dei galleggianti; 2° uova nere senza o con screziatura grigia più o meno abbondante.

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1938.

(2) D. FALLERONI, *Studio sugli «Anopheles maculipennis» delle Paludi Pontine*. Recanati, Tipografia Economica, 1924.

Successivamente estesi le osservazioni, oltre che nelle Paludi Pontine, all'Italia Settentrionale (Emilia, Piemonte, Lombardia e Veneto) e pubblicai i risultati delle indagini in una nuova Memoria del 1926, nella quale confermai le osservazioni precedentemente fatte sulle uova di *Anopheles maculipennis* e sulle diverse specie o razze di questa zanzara<sup>(1)</sup>.

Distinsi quattro tipi: (vedi tavola originale del 1926) 1° fig. 1 e 2 uova nere con screziatura grigia di diversa intensità, talora assente e talora notevole specie al centro, sempre però interrotta da screziature nere, che danno all'uovo un aspetto scuro. La screziatura grigia è formata da tasselli minuti, più piccoli che nelle altre uova. Le camere d'aria sono grandi e talvolta, estendendosi sulla superficie superiore delle uova, le danno un aspetto snello. Le uova si avvicinano prevalentemente per gli estremi, formando spesso figure geometriche. La zanzara, che le depone, è di solito più grossa di quella delle uova grige, è scura, specie negli arti e con macchie alari ben distinte. Prolifica, depone molte uova ogni volta (fino a 486); palustre predomina in canali ricchi di vegetazione, nelle risaie e in luoghi di malaria intensa. È molto diffusa, ma non ugualmente distribuita. Si trova abbondante nel periodo estivo a cominciare da maggio.

2° Fig. 3 uova grige. Di aspetto chiaro hanno incrostazione grigia interrotta da piccole screziature nere con tasselli grigi più grandi che nelle uova nere. I poli sono scuri e le camere d'aria piccole e le uova hanno aspetto tozzo e si avvicinano per il lato maggiore disponendosi a serie.

Nell'Alta Italia hanno aspetto meno chiaro e sono più snelle; piccole differenze che non modificano il tipo. Presentano la stessa forma di screziatura e le camere d'aria del pari piccole. La zanzara è domestica, depone le uova più volte, domina in tempi e luoghi diversi in confronto del *claviger* dalle uova nere, in parte della primavera, dell'autunno e nell'inverno.

3° Fig. 4 ha le uova caratterizzate da due fasce trasverse nere, verso i poli, che sono scuri, differisce dalle uova nere per la incrostazione grigia uniforme senza macchie nere e per i tasselli grigi più grandi; dalle grige per la incrostazione grigia uniforme e per i galleggianti più grandi. Si trova in tutti i mesi dell'anno.

4° Fig. 5 e 6 uova senza o con piccole camere d'aria. *Anopheles Sacharovi* Favr. I caratteri dell'uovo e dell'insetto furono rilevati da Christophers e confermati da Barraud. Edwards ne creò una specie che chiamò *elutus*. In Italia io la identifichiai e la studiai, osservai che la mancanza delle camere d'aria non è carattere costante, non si trasmette sempre nella discendenza e non si conserva in tutte le deposizioni della stessa zanzara e che invece è costante la uniformità dell'incrostazione grigia senza screziature nere. L'*elutus* è palustre e domestica come il *claviger*, si porta nelle stalle e nei porcili per

(1) D. FALLERONI, *Fauna anofelica italiana e suo «habitat»*. Metodi di lotta contro la malaria. «Rivista di Malariologia», anno V, fasc. 5-6, 1926.



nutrirsi. Sverna come insetto alato, è prolifico. Nelle Paludi Pontine non sembra abbia parte notevole nella propagazione della malaria, perchè è poco diffuso e non predomina nei luoghi più malarici. Vettori più importanti di malaria sono gli *Anopheles maculipennis* dalle uova nere e dalle uova grige e proposti per essi le seguenti denominazioni:

*Anopheles claviger*, F. (*maculipennis*, Mg.) var. *messeae*—Falleroni, per quella dalle uova nere.

*Anopheles claviger*, F. (*maculipennis*, Mg.) var. *labranchiae*—Falleroni, per quella dalle uova grige.

La mia scoperta in un primo tempo fu presa in considerazione in Italia da La Face <sup>(1)</sup> e Brighenti e nel 1931 confermata dall'entomologo e malariologo tedesco, il Martini con due pubblicazioni <sup>(2)</sup>. In seguito è stata accettata da tutti i malariologi, che hanno anche riconosciuto che il mezzo da me adoperato, basato sui caratteri delle uova, è il solo valido per distinguere le razze di *Anopheles maculipennis*.

Nel 1932, su invito della Direzione generale di Sanità Pubblica, ripresi gli esperimenti sulla malaria e in special modo sulla zooprofilassi applicata con pieno successo ad Ardea, il paese più malarico dell'Agro Romano. In una pubblicazione dello stesso anno <sup>(3)</sup> confermai le precedenti osservazioni sulle uova e denominai *basilii* l'*A. maculipennis* che depone le uova a fasce. Questa denominazione, sulla quale insisto, non fu mantenuta arbitrariamente da una Commissione di malariologi della Società delle Nazioni convocata a Roma (20-22 agosto 1934) su richiesta di Hackett per discutere una relazione di Hackett e Missiroli sulle razze di *A. maculipennis*. Evidentemente questa Commissione non era esattamente informata dei miei lavori.

Da quanto sopra è detto risulta che la differenziazione dell'*A. maculipennis* in più razze o specie, fu fatta da me nel 1924, prima di ogni altro Autore, con una tecnica assolutamente originale; basata sull'esame delle uova e che la scoperta fu ribadita con successive pubblicazioni, tra le quali è da ricordare quella del 1926.

Alle razze di *A. maculipennis* da me differenziate altre se ne sono aggiunte in seguito e precisamente nove: l'*atroparvus*, il *melanoon*, il *subalpinus*, il *fallax*, il *sicaulii*, il *pergusae*, l'*occidentalis*, l'*arteci*, il *camburnaci*. L'*atroparvus* e il *malanoon* sono state ammesse dalla precitata commissione

(1) L. LA FACE, *Revisione degli Anofelini italiani*. « Rivista di Malariologia », anno V, fasc. 1, 1926.

(2) E. MARTINI, A. MISSIROLI und L. W. HACKETT, *Versuche zum Rassenproblem des Anopheles maculipennis*. « Archiv. für Schiffs- und Tropen-Hygiene, Pathologie u. Therapie exotischer Krankheiten 1931 », Heft. 11; E. MARTINI, *Die Rassenfrage bei Anopheles maculipennis: ein Kritisches Sammelreferat*. « Archiv. für Schiffs- und Tropen-Hygiene ecc. », 1931, Heft 12.

(3) D. FALLERONI, *Zooprofilassi e sua applicazione in Ardea (Agro Romano)*. *Diverse razze di « Anopheles maculipennis »*. Roma, Tipografia Cuggiani, Via della Pace, 35, 1932.

della Società delle Nazioni. Nel 1926 van Thiel osservò in Olanda una differenza nelle dimensioni tra gli anofeli delle zone palustri e quelli delle zone non paludose. Questo Autore non ebbe l'idea che si trattasse di caratteri di razza e attribuì la differenza di lunghezza delle ali a condizioni ambientali, acque dolci, acque salmastre. Successivamente (1927) Swellengrebel e collaboratori dimostrarono che le differenze corrispondevano a diversità di razza e a diverso comportamento biologico. Van Thiel denominò *atroparvus* l'*A. maculipennis* olandese dalle ali corte per distinguerlo da quello delle ali lunghe (che corrisponde all'*A. maculipennis* var. *messeae*, da me differenziata fin dal 1924). Venuto poi in Italia, per invito di Hackett, credette di poter separare dal *labranchiae* l'anofele a uova grige scure, che identificò con l'*atroparvus*, anofele olandese ad ali corte, basando la distinzione su differenze rilevate da De Buck nella struttura intercostale dei galleggianti, liscia, chiara nell'*A. maculipennis* dalle uova grige scure, striata scura nell'*A. maculipennis* dalle uova grige chiare.

Ma questo carattere differenziale non è costante e non può servire per distinguere la pretesa var. *atroparvus* dalla varietà *labranchiae*, come lo stesso van Thiel ha in seguito osservato in Olanda<sup>(1)</sup>. In Italia la razza *atroparvus* distaccata dalla razza *labranchiae* non fu accettata, ad esempio dalla scuola bolognese, da Ottolenghi e Rosa<sup>(2)</sup>.

La differenziazione del *melanoon* dall'*A. maculipennis* dalle uova nere, *messeae*, fu fatta da Hackett che trovò nell'uovo senza o con lieve screziatura grigia un disegno esagonale, al quale attribuì il valore di carattere differenziale genotipico. Ma tale disegno esagonale si osserva anche nelle uova a screziatura grigia abbondante, come lo stesso Hackett ha in seguito constatato. Questa constatazione invece di indurre l'A. a rinunciare al *melanoon* gli ha consigliato la distinzione di una nuova razza, il *subalpinus*. Il *camburnaci* fu distinto da Roubaud; esso si caratterizza per la facilità ad accoppiarsi in spazi ristretti, per le uova con galleggianti piccoli. Ma questo carattere dei galleggianti lo unisce all'*A. maculipennis labranchiae*, dal quale il *camburnaci* non pare si possa agevolmente differenziare. Così anche non sembra poggiare su basi solide la distinzione della varietà *fallax* dall'*A. maculipennis* dalle uova nere e scure, fatta anche da Roubaud.

Altre osservazioni si potrebbero fare circa le varietà nuove di *A. maculipennis* citate, ma questo non è lo scopo di questa mia Nota che si propone di ricordare sinteticamente i primi studi sulla differenziazione di razze dell'*A. maculipennis* per mezzo dei caratteri delle uova e di osservare che le nuove conoscenze acquisite servono alla spiegazione di fenomeni oscuri

(1) P. H. VAN THIEL, *Recherches sur la presence de l'Anopheles var. labranchiae dans les Pays-Bas*. «Bull. Soc. Path.» ext. 27: 140-154, Seduta 14 febbraio 1934.

(2) D. OTTOLENGHI e A. ROSA, *Ricerche sulle razze di «Anopheles maculipennis» de Ferrarese e di alcune zone limitrofe*. «Bullettino delle Scienze Mediche», Organo della Società Medico-Chirurgica di Bologna, anno CV, fasc. VI, 1933.

epidemiologici della malaria e a meglio combattere questa malattia. Oggi sappiamo che le tre razze differiscono anche biologicamente.

I *maculipennis* dalle uova grige e dalle uova nere (*labronchiae* e *messeae*) si nutrono indifferentemente sugli animali e sulle persone e affluiscono nei ricoveri animali quando i medesimi sono interposti tra le abitazioni e le raccolte idriche e formano per essi centri di nutrimento più comodi e di maggiore attrazione. Nei casi invece, purtroppo frequenti, in cui questa condizione non è osservata i *maculipennis labronchiae* e *messeae* continuano, almeno in buona parte, ad invadere le abitazioni e la malaria persiste nonostante la bonifica agraria. Così è risolto l'importante problema degli antichi malarologi: incostanza dell'azione risanatrice della bonifica agraria. Fui sollecito a dettare le norme per una stabulazione efficiente ai fini della profilassi antimalarica, norme che discussi in tre pubblicazioni <sup>(1)</sup>.

Il *maculipennis* dalle uova a fasce, var. *basilii*, che io nella mia pubblicazione del 1926 non unii alle altre due varietà o specie, che ritenni vettrici di malaria, ha tendenza naturale a pungere gli animali e si porta nei loro ricoveri anche quando non sono situati a difesa delle abitazioni, è scarso o assente nelle abitazioni, predomina in zone risanate, poco avido di sangue, poco aggressivo. Ciò è confermato ampiamente dallo studio dell'anofelismo e della malaria del vasto territorio dell'Agro Romano. Diffondere questa razza di *maculipennis* in modo da sostituire in gran parte le altre vettrici di malaria può ritenersi il mezzo nuovo ed utile di lotta contro la malaria. Nel 1934, con mezzi forniti dallo Stato (Direzione Generale della Sanità Pubblica) feci in proposito l'esperimento nell'Agro Pontino in due zone, a Casale dei Pini, dove predominava il *maculipennis messeae*, e nel Pasubio, dove predomina il *labronchiae*.

Tale esperimento ha dato risultati favorevoli ed è oggetto di una particolareggiata Memoria di prossima pubblicazione.

(1) D. FALLERONI, *Per la soluzione del problema malarico italiano*. « Rivista di Malariologia », anno VI, 1927; *Discussione sulla zooprofilassi (Nota sesta). Norme per le costruzioni rurali in zone malariche*. « Rivista di Malariologia », anno VIII, 1929; *Costruzioni rurali in zone malariche*. Roma, « La Cardinal Ferrari » S. A. I. Tipografia Via Germanico 136, anno 1930.



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

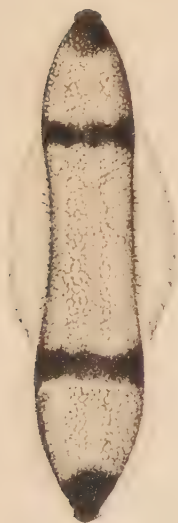


Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1938 (Anno XVI).*

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

**Geologia** (Geochimica). — *Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto).*  
II. — *I complessi colloidalì.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio G. A. BLANC  
(in collaborazione col dott. T. MANTOVANI).

Nella prima parte di questo lavoro <sup>(2)</sup> sono stati esposti i dati del problema che mi sono proposto ed i mezzi adoperati per risolverlo.

In questa seconda parte vengono anzitutto riportati i risultati dello studio dei complessi colloidalì inorganici che, nella maniera già descritta, sono stati separati dai materiali costituenti i livelli principali del deposito di riempimento della grotta.

L'esame di codesti complessi colloidalì inorganici comporta anzitutto un'analisi chimica centesimale, e poi un trattamento destinato a discriminare la silice presente allo stato libero, e cioè sotto forma di quarzo, da quella presente allo stato di combinazione, cioè, in questo caso, sotto forma di silicati idrati di alluminio e di ferro, che costituiscono una parte così importante della porzione colloidale dei suoli. Tale discrimina fra silice libera e silice combinata, come è noto, permette, con la conseguente determinazione dei rapporti molecolari fra silice combinata e sesquiossidi di alluminio e di ferro, di trarre interessanti conclusioni circa l'eventuale stadio di laterizzazione, o allitizzazione, a cui un suolo può essere giunto.

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1938.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XXVII, 1938, pp. 189-197.

E ciò, nel caso di paleosuoli come quelli di Grotta Romanelli, i quali furono sottratti ad ogni azione geochimica e ad ogni processo pedogenetico apprezzabili dall'epoca della loro segregazione dall'ambiente esterno, può come si è già detto, contribuire a gettare qualche luce sul regime climatico ed ecologico che a quell'epoca regnava nella regione.

Per determinare il rapporto molecolare fra la silice combinata e l'allumina, e quello fra la silice combinata e la somma dei sesquiossidi di alluminio e di ferro, venne applicato il cosiddetto « metodo dei tre acidi ». Questo metodo venne adoperato secondo le norme indicate da F. Hardy e R. R. Follet-Smith<sup>(1)</sup> che sono le seguenti:

gr. 1 di materiale viene trattato in una capsula con cm<sup>3</sup> 30 di una miscela formata da 4 parti di acido solforico concentrato ( $d = 1.84$ ), 2 parti di acido cloridrico concentrato ( $d = 1.19$ ) e 1 parte di acido nitrico concentrato ( $d = 1.40$ ). La capsula è ricoperta da un vetrino da orologio, e il contenuto viene scaldato dolcemente su bagno di sabbia, finchè cessa la emissione di fumi bruni. Il coperchio viene allora tolto e la miscela viene scaldata fortemente, finchè cessa la emissione di fumi bianchi. La sostanza, che ha assunto una consistenza pastosa, viene ora lasciata raffreddare, dopo di che si aggiungono cm<sup>3</sup> 50 di acido cloridrico al 10%. Indi si torna a scaldare all'ebollizione e si raccoglie il residuo solido su di un filtro fino, e lo si calcina in crogiuolo di platino. Indi si aggiungono cm<sup>3</sup> 25 di soluzione d'idrato sodico al 2%, e si riscalda per tre ore, riportando il liquido a volume con aggiunte di acqua.

In questo modo la silice colloidale, derivata dall'attacco dei silicati presenti nel materiale così trattato, passa in soluzione allo stato di silicato sodico, mentre la silice che si può trovare nel materiale stesso sotto forma di quarzo, rimane indisciolta.

Un'ulteriore filtrazione su carta fina seguita da lavaggio, permette di separare la porzione solida. Il liquido poi viene evaporato a secco, ed il residuo scaldato per un'ora a 130° C., dopo di che si aggiungono cm<sup>3</sup> 50 di soluzione di acido cloridrico al 10% e si scalda all'ebollizione. Il precipitato che così si ottiene viene raccolto su filtro e calcinato.

Trattando con acido fluoridrico le due porzioni solide così ottenute, si determinano rispettivamente la silice libera e la silice combinata presenti nel materiale in esame.

I residui solidi, eventualmente lasciati dai due trattamenti all'acido fluoridrico, vengono ripresi mediante fusione con bisolfato potassico e aggiunti al primo filtrato ottenuto dopo l'attacco coi tre acidi. In questo liquido vengono poi dosati i sesquiossidi di alluminio e di ferro.

(1) F. HARDY, *Studies in tropical soils*. « Journ. of Agric. Sc. », vol. XXI, 1931, p. 150 e sg.

COMPLESSO COLLOIDALE INORGANICO DELLA FORMAZIONE INFERIORE  
A TERRA GIALLO GRIGIA.

Questa formazione è costituita, come già si è detto, da un letto di pietrisco calcareo derivante dall'accumulazione sul posto di frammenti di roccia, per lo più minuti, provenienti dal lento disgregamento della volta della grotta. Questi frammenti di calcare, a differenza di quelli costituenti la sottostante spiaggia emersa, non presentano traccia alcuna di usura per fluitamento, ma presentano per contro i segni di una alterazione superficiale alla quale deve attribuirsi, come ora vedremo, il materiale argilloso-calcareo di colore giallo-grigio che più o meno abbondantemente li ricopre e che riempie anche in parte gli interstizi del deposito.

Per quanto riguarda le caratteristiche paleontologiche di questa formazione inferiore già descritta precedentemente<sup>(1)</sup> basti per ora ricordare che essa ha dato l'Ippopotamo, il Rinoceronte di Merck e l'Elefante antico, accompagnati dallo Sciacallo, dal Daino, dal Coniglio: vale a dire quel complesso faunistico a carattere « caldo » che vediamo scomparire completamente e definitivamente, a Grotta Romanelli, soltanto col passaggio dal deposito intermedio a terra rossa, caratterizzato anch'esso dalla stessa fauna, al deposito superiore a terra bruna; la cui fauna, comprendente l'Equide asinino di Regàlia, tipico abitatore di steppe, assume un carattere spiccatamente « freddo » per la presenza, ormai confermata da nuovi trovamenti, oltre che dello Stambecco, dell'Alca impenne.

Il metodo, già descritto, per la separazione del complesso colloidale inorganico dal campione di deposito, comprende anzitutto un primo passaggio del materiale dallo staccio da 2 m/m, per eliminare la porzione più grossolana. Sebbene i risultati dello studio del materiale detritico debbano fare oggetto di una successiva nota, è opportuno rilevare sin da ora che i frammenti di roccia calcarea raccolti in questo strato presentano una superficie rugosa, che un lavaggio lascia bianca o lievemente colorata in giallastro. Tale rugosità, che all'esame con la lente appare dovuta ad una corrosione del calcare, e inoltre l'aderenza del materiale argilloso-calcareo giallo-grigio da cui la superficie dei frammenti di roccia appare intrisa, differenziano in maniera spicata i frammenti della roccia locale rinvenuti a questo livello da quelli che si rinvencono nelle due parti intermedia e superiore del deposito di riempimento, che abbiamo designati rispettivamente come formazione a terra rossa e formazione a terra bruna.

Come avremo infatti campo di vedere meglio in appresso, i frammenti del calcare locale della grotta, rimasti sepolti in queste due ultime forma-

(1) G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, I, « Arch. Antr. Etn. », vol. L., 1920, fasc. 1-4.



zioni, non si mostrano per nulla intrisi del predetto materiale argilloso-calcareo giallo-grigio che, nella formazione inferiore, è stato evidentemente prodotto dal processo di decalcificazione a cui la roccia calcarea è stata sottoposta durante i periodi di abbondanti infiltrazioni idriche le quali originarono la potente crosta stalagmitica che ricopre la formazione stessa. Si avrà occasione di ritornare su tutto ciò allorquando si dovranno trarre le conclusioni delle presenti indagini, ma era opportuno rilevare fin da ora questa prima diversità sostanziale tra la formazione inferiore e quelle intermedia e superiore.

Ritornando ora alla separazione del complesso colloidale inorganico da esaminare, occorre osservare subito che esso, nella formazione inferiore, rappresenta una percentuale assai piccola del materiale grezzo, per cui si sono dovuti adoperare oltre 700 gr. di questo per ottenere il quantitativo di colloide necessario all'esame.

Infatti da 730 gr. di materiale grezzo si sono ottenuti, applicando il metodo descritto nella prima parte di questo lavoro, gr. 3.925 di sostanze colloidali inorganiche.

L'analisi chimica globale di un campione medio del materiale grezzo di partenza, quale è stato raccolto nella formazione, e quella del complesso colloidale inorganico, entrambi seccati a 105° C., hanno dato i risultati riportati nelle tabelle I e II che seguono.

Il trattamento coi tre acidi, secondo il metodo di Hardy e Follet-Smith, per la discrimina della silice combinata dal quarzo e la conseguente determinazione dei rapporti molecolari fra silice combinata e sesquiossidi di alluminio e di ferro, ha dato i risultati riportati nella tabella III, in cui sono indicate le percentuali di silice combinata, di sesquiossidi di alluminio e di ferro, nonchè il corrispondente valore del rapporto  $\text{SiO}_2$  combinata:  $\text{R}_2\text{O}_3$ .

Le percentuali del quarzo, dei rimanenti ossidi e dell'acqua combinata sono state raggruppate in un'unica cifra.

TABELLA I.

P. calcin.	$\text{SiO}_2$	$\text{Al}_2\text{O}_3$	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	$\text{CaO}$	$\text{MgO}$	$\text{Na}_2\text{O}$	$\text{K}_2\text{O}$	$\text{MnO}$	$\text{TiO}_2$	Somma
34.37	18.42	11.25	3.13	32.32	1.65	0.01	tr.	0.01	0.35	101.51

TABELLA II.

P. calcin.	$\text{SiO}_2$	$\text{Al}_2\text{O}_3$	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	$\text{CaO}$	$\text{MgO}$	$\text{Na}_2\text{O}$	$\text{K}_2\text{O}$	$\text{MnO}$	$\text{TiO}_2$	Somma
15.54	51.19	25.22	4.71	1.35	tr.	tr.	tr.	0.07	0.88	98.96

TABELLA III.

SiO <sub>2</sub> comb.	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SiO <sub>2</sub> lib. + H <sub>2</sub> O comb. + rim. ossidi	Somma	Rapp. mol. SiO <sub>2</sub> : R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
37.09	24.99	7.15	29.28	98.51	2.36

COMPLESSO COLLOIDALE INORGANICO DELLA FORMAZIONE INTERMEDIA  
A TERRA ROSSA.

Questa formazione è costituita, come è stato dimostrato sin dalla prima mia pubblicazione riguardante Grotta Romanelli<sup>(1)</sup> e come ho ricordato nella prima parte di questo lavoro, da un lembo di duna d'arresto formata di materiale terroso e sabbioso, che in un periodo in cui il livello del Mediterraneo era più basso dell'attuale, venne dai venti asportato dalla vasta pianura costiera antistante alla scogliera nella quale si apre la grotta: pianura che oggi è immersa.

Gli argomenti sui quali è fondata questa interpretazione della origine dei depositi a terra rossa e a terra bruna di Grotta Romanelli verranno più estesamente discussi in seguito: per ora basta tener presente che la cavità di Grotta Romanelli offre tutti i requisiti che erano necessari per accogliere e conservare in condizioni di particolare protezione i materiali che in tal modo vi si accumulavano.

Di un campione medio del materiale grezzo della formazione a terra rossa seccato a 105° C., venne effettuata l'analisi globale coi risultati riportati nella tabella IV.

La preparazione del complesso colloidale inorganico effettuata su gr. 50 di una porzione del materiale terroso-sabbioso grezzo inferiore a 2 m/m., ha fornito gr. 10.125 di colloide, sui quali è stata operata l'analisi chimica centesimale riportata alla tabella V e il trattamento coi tre acidi i cui risultati sono riportati alla tabella VI.

TABELLA IV.

P. calcin.	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	MnO	TiO <sub>2</sub>	Somma
13.02	56.10	16.71	8.04	6.40	0.15	tr.	0.01	0.09	0.92	101.44

(1) G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, I, «Arch. Antr. Etn.», vol. L, 1920, fasc. 1-4.

TABELLA V.

P. calcin.	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	MnO	TiO <sub>2</sub>	Somma
10.15	45.10	32.39	10.12	0.10	tr.	—	tr.	0.11	1.05	99.02

TABELLA VI.

SiO <sub>2</sub> comb.	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SiO <sub>2</sub> lib. + H <sub>2</sub> O comb. + rim. ossidi	Somma	Rapp. mol. SiO <sub>2</sub> : R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
39.20	31.85	9.32	18.52	98.89	1.71

COMPLESSO COLLOIDALE INORGANICO DELLA FORMAZIONE SUPERIORE  
A TERRA BRUNA.

Si può, per quanto riguarda la natura e l'origine dei materiali costituenti questa formazione, ripetere quanto si è detto nei riguardi della sottostante formazione a terra rossa. Se si eccettuano infatti le differenze sostanziali esistenti fra i complessi faunistici che caratterizzano le due formazioni, esse, dal punto di vista dei caratteri somatici, non si distinguono che per il colore. E, come vedremo, la loro composizione chimica centesimale si può dire la stessa, se si eccettuano le variazioni che possono derivare dalla maggiore o minore abbondanza di frammenti di roccia calcarea e di sabbia quarzosa nei campioni che si esaminano.

Anche questa formazione superiore, come quella intermedia, è per le ragioni già esposte, da considerarsi come un lembo di duna d'arresto formata da materiale d'apporto eolico accumulatosi nell'anfratto di Grotta Romanelli durante un periodo in cui il livello marino era più basso dell'attuale, ed era conseguentemente emersa una parte almeno della pianura costiera rivelata dai rilievi batimetrici.

Ciò detto si riportano qui appresso, nelle tabelle VII, VIII, IX, i risultati, rispettivamente, delle analisi chimiche globali di un campione medio del materiale grezzo e del complesso colloidale inorganico, seccati a 105° C., e del trattamento col metodo di Hardy e Follet-Smith.

TABELLA VII.

P. calcin.	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	MnO	TiO <sub>2</sub>	Somma
15.23	49.00	21.77	9.83	2.25	0.10	tr.	—	0.12	0.81	99.11

TABELLA VIII.

P. calcin.	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	MnO	TiO <sub>2</sub>	Somma
13.60	43.65	32.75	10.80	0.15	—	tr.	0.01	0.17	0.95	102.08

TABELLA IX.

SiO <sub>2</sub> comb.	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SiO <sub>2</sub> lib. + H <sub>2</sub> O comb. + rim. ossidi	Somma	Rapp. mol. SiO <sub>2</sub> : R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
39.60	31.35	0.87	18.62	99.44	1.76

Dato che nello studio dei suoli viene da vari autori adoperato il criterio dell'estratto con acido cloridrico, anzichè quello dell'estratto coi tre acidi, può essere interessante mettere a raffronto i rapporti molecolari SiO<sub>2</sub> c. : R<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ottenuti come sopra con quelli che si ottengono trattando gli stessi campioni di complessi colloidali secondo l'altro metodo.

Nell'applicare questo criterio dell'estrazione con acido cloridrico sono state seguite le norme dettate da Van Bemmelen<sup>(1)</sup>.

Il materiale, preventivamente seccato a 105° C., viene trattato con una soluzione di acido cloridrico di densità D = 1.035 alla temperatura di 55° C. per mezz'ora. Dopo di che si filtra e si determina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> e SiO<sub>2</sub> nel filtrato. Il residuo rimasto sul filtro viene indi trattato con una soluzione di soda caustica di densità D = 1.04, alla temperatura di 55° C. per 5 minuti primi, dopo di che si filtra e si dosa Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> e SiO<sub>2</sub> nel liquido. Si tratta quindi il residuo solido di questa operazione con una soluzione di acido cloridrico di densità D = 1.2, per mezz'ora all'ebollizione, si filtra, e si dosa anche qui Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> e SiO<sub>2</sub> nel filtrato. Finalmente il residuo solido di questa ultima operazione viene anch'esso trattato con una soluzione di soda caustica di densità D = 1.04 per 5 minuti primi alla temperatura di 55° C. e vengono dosati Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> e SiO<sub>2</sub> nel filtrato. Le somme dei quattro pesi così ottenuti rispettivamente per Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> e SiO<sub>2</sub>, le quali danno i quantitativi di ciascuno dei tre ossidi estratti nel corso delle operazioni sopradescritte servono alla determinazione del rapporto molecolare fra silice combinata e sesquiossidi.

L'applicazione di questo metodo ha dato nel nostro caso i risultati seguenti:

(1) J. M. VAN BEMMELEN, *Die Absorptionsverbindungen und die Absorptionsvermögen der Ackererde*. «Landw. Vers. Stat.», vol. XXXV, 1888, pp. 67-135.

TABELLE X, XI E XII.

	SiO <sub>2</sub> c.	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Residuo non attaccato	Somma	Rapp. mol. SiO <sub>2</sub> c. : R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
X. — Formazione inferiore a terra grigio-gialla .	32.49	21.74	7.16	41.02	102.41	2.20
XI. — Formazione inter- media a terra rossa .	29.44	23.88	8.00	38.20	99.52	1.72
XII. — Formazione supe- riore a terra bruna .	27.06	22.38	8.04	43.92	101.40	1.66

COLLOIDI UMICI.

Data la considerevole proporzione di calcare presente nelle varie formazioni costituenti il deposito di riempimento della Grotta Romanelli ed i valori della concentrazione idrogenionica che ne risultano (pH intorno ad 8) era da prevedersi che le sostanze umiche eventualmente presenti non fossero facilmente peptizzabili.

Ed infatti, un trattamento anche prolungato con soluzione di NH<sub>3</sub> a 6 %, a caldo, non arriva a portare in soluzione quantità apprezzabili di humus, che pure, come vedremo, è presente.

È presumibile che gli acidi umici si trovino qui legati anzitutto alla calce, che abbonda, ed anche ad altre basi, particolarmente ai sesquiossidi di ferro idrati che sono presenti in quantità notevoli specie nella terra rossa e nella terra bruna.

Il dosaggio degli acidi umici presenti nel materiale grezzo è stato dunque effettuato come segue:

Il campione integrale di materiale grezzo, di dimensione inferiore a mm. 2, viene anzitutto trattato con una soluzione di HCl a 1 % per eliminare il calcare presente. Il residuo, raccolto su filtro, viene triturato in mortaio d'agata sino a passaggio totale allo staccio 120, e questo materiale viene trattato con una soluzione di HCl 1 : 2 per eliminare il sesquiossido di ferro. Il residuo, raccolto su filtro, e lavato, viene trattato con una soluzione di NH<sub>3</sub> a 6 % ripetendo l'operazione fino a che il liquido ottenuto risulti incolore.

Il filtrato si evapora a bagnomaria, in capsula di platino, si secca a 105° C. e si pesa una prima volta: dopo di che si calcina fino a costanza di peso.



La differenza fra le due pesate dà il contenuto in humus. Una causa d'errore può essere la presenza d'acqua di idratazione di sostanze inorganiche (prevalentemente silice) passate insieme agli acidi umici nel filtrato. Ma, data la proporzione minima di tali sostanze inorganiche, riscontrata nel caso nostro, l'errore è da considerarsi come del tutto trascurabile.

I risultati ottenuti sono stati i seguenti:

*Contenuto in humus.*

Formazione inferiore, a terra grigio-gialla . . .	0.12 %
Formazione intermedia, a terra rossa . . . .	0.32 %
Formazione superiore, a terra bruna . . . .	1.05 %

Dall'insieme dei risultati sopra riportati, che verranno discussi in maniera più esauriente dopo che, in un'ulteriore Nota, saranno state esaminate le caratteristiche dei complessi detritici, si può intanto desumere quanto segue:

I risultati delle analisi globali dei campioni medi del materiale grezzo delle tre formazioni (tabelle I, IV e VII) mostrano delle considerevoli differenze soprattutto nel contenuto in calce, dovute ai detriti della roccia locale accumulatisi in maggiore o minore abbondanza ai vari livelli, e nel contenuto in silice determinate da proporzioni più o meno considerevoli di sabbia quarzosa.

Se poi si mettono a raffronto i risultati delle analisi globali dei complessi colloidali inorganici separati dalle tre formazioni (tabelle II, V e VIII), si vede che la composizione del complesso colloidale della formazione inferiore si differenzia notevolmente da quella dei complessi colloidali delle altre due formazioni.

Se poi si passa ai risultati del trattamento coi tre acidi si vede che le proporzioni della silice combinata e dei sesquiossidi di alluminio e di ferro sono sensibilmente le stesse per i due campioni di materia colloidale delle formazioni a terra rossa e a terra bruna (tabelle VI e IX) mentre sono sensibilmente diverse pel campione della formazione inferiore a terra giallo-grigia.

E infatti mentre per i primi si hanno rapporti molecolari  $\text{SiO}_2 : \text{R}_2\text{O}_3$  molto simili (1.71 e 1.77), ed entrambi inferiori a 2, questo rapporto, nel caso della formazione inferiore sale a 2.34.

Questi risultati sono confermati da quelli ottenuti applicando il criterio dell'estratto cloridrico secondo il metodo di Van Bemmelen, il quale rivelerebbe anch'esso una differenza marcata fra terra giallo-grigia e terre rossa e bruna, accentuando notevolmente il contrasto fra il carattere siallitico della prima e la tendenza allitica delle seconde.

Vedremo in seguito quali rapporti si possano stabilire fra la terra bruna e la terra rossa della Grotta Romanelli, e fra entrambe queste e le formazioni terrose (boli, terre rosse e terre brune) dell'Italia Meridionale in genere e della Penisola Salentina in particolare.

Finalmente per quando concerne i colloidi umici, è posta in evidenza la presenza di una proporzione di circa 1 % di humus, nella formazione superiore a terra bruna, attraverso tutto lo spessore (oltre 3 m.) della quale tale proporzione si mantiene sensibilmente costante.

Avrò campo di dimostrare meglio, in sede di conclusioni, come trattisi indubbiamente di humus fossile, formatosi nel suolo della pianura antistante la grotta nel periodo di emersione già menzionato e quindi apportato nella grotta stessa con le particelle di polviscolo eolico alle quali trovavasi unito. Per ora basti osservare che la proporzione di esso nella terra bruna di Grotta Romanelli è dell'ordine di quelle che si riscontrano in altre terre brune o bruno-castane, imparentate ai Tschernozem dell'Europa orientale, il cui aspetto e la cui natura sono molto simili, come vedremo, a questa formazione della Grotta Romanelli.

Il contenuto di humus nelle altre due formazioni è assai minore. Il che, come vedremo meglio in seguito, si spiega, se si osserva che la terra rossa ha tutti i caratteri di un suolo rubefatto corrispondente ad un regime climatico tropicale o subtropicale sotto il quale le sostanze umiche vengono rapidamente distrutte, e che la terra giallo-grigia appare come un'argilla di decalcificazione del calcare locale accumulatasi in situ, che, data la sterilità dell'ambiente nell'interno della caverna, non ebbe mai modo di arricchirsi in humus.

Alle determinazioni sopra riportate ha validamente cooperato, specie per quel che riguarda le sostanze umiche, la sig.na dott.sa C. Cortesi.

# MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Un esempio tipico nella teoria della trasformazione di Laplace* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di L. AMERIO, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

È ben noto che sul contorno del cerchio di convergenza di una serie di potenze esiste almeno un punto singolare della funzione rappresentata entro il cerchio dalla serie stessa.

Lo stesso non può dirsi per la serie di Dirichlet e neppure per la trasformata di Laplace, a meno che, per quest'ultima, non si supponga, ad esempio, che la funzione trasformanda sia una trascendente intera di tipo esponenziale, oppure sia  $\geq 0$  <sup>(3)</sup>.

Mi propongo qui di indicare una funzione  $F(t)$  trasformabile nel semipiano  $\Re(p) > -1$  e analitica nel semipiano  $\Re(p) > -2$ , dove  $p = u + iv$  è la variabile complessa che compare come parametro nell'integrale

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt.$$

Una tale funzione si può costruire tenendo presente l'esempio stesso che fu dato dal Bohr <sup>(4)</sup> per la serie di Dirichlet. Egli dimostrò precisamente che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\lambda_n p}$$

dove è

$$\lambda_{2n-1} = 2n, \quad \lambda_{2n} = 2n + e^{-2n}$$

converge nel semipiano  $u > 0$  e rappresenta una funzione analitica nel semipiano  $u > -1$ .

Consideriamo ora, per  $n = 0, 1, 2, \dots$  la successione di numeri

$$\begin{aligned} \lambda_{4n} &= 2n, & \lambda_{4n+1} &= 2n + e^{-2n}, \\ \lambda_{4n+2} &= 2n + e^{-2n}, & \lambda_{4n+3} &= 2n + 2e^{-2n} \end{aligned}$$

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Matematico della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1938.

(3) DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Berlin, Springer, 1937, p. 75, Satz 1, p. 59, Satz 1.

(4) H. BOHR, *Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichletschen Reihen*. «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. 37, 1913.

e sia  $F(t) = 1$  per  $2n < t < 2n + e^{-2n}$ ,  $F(t) = -1$  per  $2n + e^{-2n} < t < 2n + 2e^{-2n}$ ,  $F(t) = 0$  per tutti gli altri valori di  $t$ .

Cominciamo col dimostrare che la funzione  $F(t)$  così definita, evidentemente trasformabile, ha come ascissa di convergenza  $-1$ .

Per questo, indicando con  $F_1(t)$  e  $F_2(t)$  le funzioni che assumono i valori di  $F(t)$  rispettivamente nei punti in cui questa è  $\geq 0$  e sono nulle negli altri, proviamone dapprima la trasformabilità nel semipiano  $u > -1$ .

Considerando la  $F_1(t)$  si ha

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} F_1(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-pt} F_1(t) dt$$

e, supponendo dapprima di far tendere  $T$  all'infinito coi valori  $\lambda_{4n+1}$ , si ricava

$$(1) \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} F_1(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-p\lambda_{4n}} - e^{-p\lambda_{4n+1}}}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2np} \frac{1 - e^{-pe^{-2n}}}{p}.$$

La serie ottenuta converge uniformemente e assolutamente in ogni semipiano  $u \geq u_0 > -1$ . Si ha infatti

$$(2) \quad \left| e^{-2np} \frac{1 - e^{-pe^{-2n}}}{p} \right| = \left| \int_{\lambda_{4n}}^{\lambda_{4n+1}} e^{-pt} F(t) dt \right| \leq \int_{\lambda_{4n}}^{\lambda_{4n+1}} e^{-ut} dt \leq \\ \leq e^{-2n} e^{-u2n + |u| e^{-2n}} \leq e^{|u|} e^{-2n(u+1)}$$

che dimostra la tesi.

Per  $p < -1$  si ha poi, posto  $-p = \sigma > 1$ ,  $e^{-2n} = x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2np} (1 - e^{-pe^{-2n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n\sigma} (1 - e^{\sigma e^{-2n}}) = \\ = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - e^{\sigma x}}{x^{\sigma}} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x^{\sigma-1}} = -\infty$$

cioè la (1) diverge per  $p < -1$  e quindi  $F_1(t)$  non è trasformabile per  $R(p) < -1$ . Lo è invece per  $R(p) > -1$ , come si prova facilmente ricordando che, per quanto si è visto, esiste per  $p > -1$  il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda_{4n+1}} e^{-pt} F_1(t) dt$$

e che è  $F_1(t) \geq 0$ .

Allo stesso modo si procede per la funzione  $F_2(t)$  per la quale si ha

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} F_2(t) dt = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-p\lambda_4 n + 2} - e^{-p\lambda_4 n + 3}}{p} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(2n + e^{-2n})} \frac{1 - e^{-pe^{-2n}}}{p}.$$

L'ascissa di convergenza è ancora  $-1$ .

Considerando ora la  $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$  dimostriamo che ha come ascissa di convergenza  $-1$ .

Infatti  $F(t)$  è evidentemente trasformabile nel semipiano  $R(p) > -1$  e si ha, per le (1) e (3),

$$(4) \quad f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2np} \frac{1 - e^{-pe^{-2n}}}{p} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(2n + e^{-2n})} \frac{1 - e^{-pe^{-2n}}}{p}.$$

Ora condizione necessaria e sufficiente perchè per un dato valore di  $p$  l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

converga è che, fissato  $\varepsilon > 0$ , si possa determinare  $t_0$  in modo che per  $t_0 \leq t_1 < t_2$  sia

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-pt} F(t) dt \right| < \varepsilon.$$

D'altra parte, supposto  $p < -1$ , se prendiamo  $t_1 = 2n$ ,  $t_2 = 2n + e^{-2n}$  si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-pt} F(t) dt = e^{-2np} \frac{1 - e^{-pe^{-2n}}}{p}$$

che  $\rightarrow \infty$ , per quanto si è visto. Ne segue che  $-1$  è l'ascissa di convergenza di  $F(t)$ .

Dimostriamo ora che la funzione  $f(p)$  è analitica nel semipiano  $R(p) > -2$ .



Infatti se è  $R(p) > -1$  si ha, per la (4),

$$(5) \quad f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nu} \frac{(1 - e^{-pe^{-2u}})^2}{p}$$

e basterà provare che la serie (5) converge uniformemente in ogni campo finito interno al semipiano  $R(p) > -2$ .

Per questo osserviamo che, detto  $M$  il massimo modulo di  $p$  nel campo considerato, si ricava per la (2)

$$e^{-2nu} \frac{(1 - e^{-pe^{-2u}})^2}{p} \leq M e^{2nu} e^{-4u(u+1)} e^{2|u|} = M e^{2|u|} e^{-2u(u+2)}$$

che dimostra la tesi.

**Meccanica.** — *Integrali primi delle equazioni del moto di un corpuscolo elettrizzato, in presenza di N ennepoli magnetici cogli assi sovrapposti.* Nota <sup>(1)</sup> di C. AGOSTINELLI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Per analogia a quanto avviene nel caso di un dipolo magnetico, o doppietta magnetica  $O$ , di lunghezza infinitesima, ma di momento magnetico finito, il cui potenziale è notoriamente della forma

$$(1) \quad \varphi = -k \frac{\cos \theta}{r^2},$$

ove  $k$  è una costante,  $r$  è la distanza da  $O$  di un punto  $P$  del campo, e  $\theta$  è l'angolo che il raggio vettore  $\overline{OP}$  forma colla direzione positiva dell'asse magnetico  $x$ , chiamerò *ennepolo magnetico* un centro  $O$  attraente, tale che, essendo  $Ox$  l'asse dell'ennepolo, il potenziale del campo da esso determinato sia della forma

$$(2) \quad \varphi_n = k r^{-n} P_{n-1}(\cos \theta) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

ove  $P_{n-1}(\cos \theta)$  è il polinomio sferico di Legendre di ordine  $n - 1$ , definito dalla

$$(3) \quad P_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (1 - \xi^2)^{n-1}, \quad \text{con } \xi = \cos \theta.$$

Nel caso di  $n = 2$  risulta  $P_1 = -\cos \theta$ , e quindi la (2) si riduce alla (1), cioè si ha il caso della doppietta magnetica.

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1938.

2. Supponendo ora che si abbiano  $N$  ennepoli  $O_1, O_2, \dots, O_N$ , cogli assi coincidenti coll'asse  $x$ , indicando con  $r_s$  la distanza di un punto  $P$  del campo dall'ennepolo  $O_s$ , e con  $\theta_s$  l'angolo che il raggio vettore  $\overline{O_s P}$  forma colla direzione positiva dell'asse  $x$ , il potenziale  $\Phi_n$  del campo generato dagli  $N$  ennepoli, per la (2), sarà della forma

$$(4) \quad \Phi_n = \sum_{s=1}^N k_s r_s^{-n} P_{n-1}(\cos \theta_s).$$

3. Ciò premesso, se un corpuscolo  $P$  di massa  $m$  e con carica elettrica  $e$ , si muove nel campo magnetico generato dagli  $N$  ennepoli ora considerati, l'equazione differenziale vettoriale del moto sarà <sup>(1)</sup>

$$(5) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{v} \wedge \text{grad } \Phi_n, \quad \text{con} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Di questa equazione è noto, ed è immediato, l'integrale

$$v^2 = v_0^2 (\text{cost.}),$$

che si ottiene moltiplicando ambo i membri della (5) scalarmente per  $\mathbf{v}$ .

Mi propongo ora di far vedere come la (5) ammette un altro integrale primo, che è lineare, ed esprime la velocità areolare del punto  $P$  intorno all'asse polare  $x$ , in funzione della posizione del punto.

4. Per conseguire lo scopo prefisso moltiplichiamo ambo i membri della (5) scalarmente per  $\mathbf{a} \wedge (P - O)$ , essendo  $O$  un punto fisso arbitrario dell'asse polare  $x$ , scelto come origine, ed  $\mathbf{a}$  un vettore unitario parallelo alla direzione positiva dell'asse  $x$ .

Si ottiene così facilmente

$$(6) \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{v} \times \mathbf{a} \wedge (P - O)] = \frac{e}{m} \cdot \mathbf{v} \times \text{grad } \Phi_n \wedge [\mathbf{a} \wedge (P - O)].$$

Indicando ora con  $Q$  il piede della perpendicolare abbassata dal punto  $P$  sull'asse polare e posto

$$P - Q = y\mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

con  $\mathbf{b}$  vettore unitario parallelo a  $\overline{QP}$ , e  $\mathbf{c}$  vettore unitario normale al piano  $(Px)$ , essendo  $x, y$  le coordinate di  $P$  nel piano  $(Px)$ , risulta:

$$(7) \quad P - O = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}; \quad (7') \quad \mathbf{a} \wedge (P - O) = y \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = y\mathbf{c}.$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Meccanica razionale*. Vol. II, parte I, p. 205 (Zanichelli, Bologna, 1925).

Ricordando quindi la (4), si ha

$$(8) \quad \text{grad } \Phi_n \wedge [\mathbf{a} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})] = -y \cdot i \sum_1^N \text{grad } \varphi_{ns},$$

ove si è indicato con  $i = \mathbf{c} \wedge$ , il rotore di un retto nel piano  $(P\mathbf{x})$ , nel verso definito dalla  $i\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , mentre per semplicità si è posto

$$(9) \quad \varphi_{ns} = k_s r_s^{-n} \cdot P_{n-1}(\cos \theta_s).$$

Osservando che  $r_s = y / \sin \theta_s$ , e che <sup>(1)</sup>

$$\text{grad } \theta_s = i \frac{\text{grad } r_s}{r_s},$$

dalla (9) si ottiene facilmente

$$(10) \quad \text{grad } \varphi_{ns} = \frac{1}{y} i k_s \left\{ n r_s^{-(n-1)} \cdot \sin \theta_s \cdot P_{n-1}(\cos \theta_s) \cdot \text{grad } \theta_s + \right. \\ \left. + \sin \theta_s \cdot \frac{dP_{n-1}(\cos \theta_s)}{d\theta_s} \cdot r_s^{-n} \text{grad } r_s \right\}.$$

Ma i polinomi  $P_{n-1}(\cos \theta_s)$ , soddisfano, com'è noto, all'equazione differenziale, che serve a definirli <sup>(1)</sup>,

$$\frac{d}{d\theta_s} \left[ \sin \theta_s \cdot \frac{dP_{n-1}(\cos \theta_s)}{d\theta_s} \right] = -n(n-1) \sin \theta_s \cdot P_{n-1}(\cos \theta_s),$$

da cui segue

$$\text{grad} \left[ \sin \theta_s \cdot \frac{dP_{n-1}(\cos \theta_s)}{d\theta_s} \right] = -n(n-1) \sin \theta_s \cdot P_{n-1}(\cos \theta_s) \cdot \text{grad } \theta_s,$$

perciò la (10) diventa

$$(10') \quad \text{grad } \varphi_{ns} = -\frac{1}{(n-1)y} \cdot i \text{grad} \left[ k_s r_s^{-(n-1)} \sin \theta_s \cdot \frac{dP_{n-1}(\cos \theta_s)}{d\theta_s} \right].$$

Sostituendo nella (8) e osservando che  $i^2 = (\mathbf{c} \wedge)^2 = -1$ , risulta

$$\text{grad } \Phi_n \wedge [\mathbf{a} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})] = -\frac{1}{n-1} \text{grad} \left\{ \sum_1^N k_s r_s^{-(n-1)} \sin \theta_s \cdot \frac{dP_{n-1}(\cos \theta_s)}{d\theta_s} \right\},$$

(1) Cfr. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di calcolo vettoriale*, p. 84 (Zanichelli, Bologna, 1920).

(2) Vedi ad es.: RIEMANN-WEBER, *Partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik* (Braunschweig, 1925).

e quindi, poichè  $\mathbf{v} = d\mathbf{P}/dt$ , la (6) diventa

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{v} \times \mathbf{a} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})] = - \frac{e}{(n-1)m} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_s^N k_s r_s^{-(n-1)} \sin \theta_s \cdot \frac{dP_{n-1}(\cos \theta_s)}{d\theta_s} \right\},$$

la quale porge immediatamente l'integrale richiesto:

$$(11) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{a} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = c - \frac{e}{(n-1)m} \sum_s^N k_s r_s^{-(n-1)} \cdot \sin \theta_s \cdot \frac{dP_{n-1}(\cos \theta_s)}{d\theta_s},$$

ove  $c$  è la costante di integrazione. Esso si può scrivere anche

$$(11') \quad \mathbf{v} \times \mathbf{a} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = c - \frac{e}{(n-1)m} \Psi_n,$$

ove

$$\Psi_n = \sum_s^N k_s r_s^{-(n-1)} \sin \theta_s \cdot \frac{dP_{n-1}(\cos \theta_s)}{d\theta_s};$$

la (10') mostra che la funzione  $\Psi_n$ , uguagliata a costante, fornisce, nel piano  $(Px)$ , le traiettorie ortogonali delle linee di livello  $\Phi_n = cost$ .

5. È evidente il significato meccanico dell'integrale (11'), il cui primo membro esprime il doppio della velocità areolare del punto mobile intorno all'asse  $x^{(1)}$ .

Indicando con  $w$  l'angolo che il semipiano  $(Px)$  forma con un semipiano fisso  $(P_0x)$ , e ponendo  $\dot{w} = dw/dt$ , risulta  $\mathbf{v} \times \mathbf{a} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = y^2 \dot{w}$ . Pertanto l'integrale (11') assume la forma

$$(12) \quad y^2 \dot{w} = c - \frac{e}{(n-1)m} \Psi_n \quad (n = 2, 3, \dots),$$

il quale fornisce, per ogni posizione del punto mobile, la velocità areolare intorno all'asse polare in funzione delle coordinate del punto.

Nel caso particolare di  $N$  doppiette magnetiche cogli assi allineati, cioè nel caso di  $n = 2$ , le (4) e (4') porgono più semplicemente

$$\Phi_2 = - \sum_s^N k_s \frac{\cos \theta_s}{r_s^2}, \quad \Psi_2 = \sum_s^N k_s \frac{\sin^2 \theta_s}{r_s},$$

(1) Vedi ad es.: T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Compendio di Meccanica razionale*, vol. I (Zanichelli, Bologna).

e l'integr delle aree (12) diventa

$$y^2 \dot{w} = c - \frac{e}{m} \sum_1^N k_s \frac{\sin^2 \theta_s}{r_s}.$$

6. Le formule qui stabilite valgono per  $n \geq 2$ . Nel caso di  $n = 1$ , nel caso cioè di poli magnetici semplici, a distanza finita fra di essi, e allineati, esse cadono in difetto. I risultati relativi, nel caso di due soli poli a distanza finita sono stati da me stabiliti in una Nota recente <sup>(1)</sup>, ove l'integrale delle aree ha forma perfettamente analoga alla (12). Successivamente il prof. Boggio <sup>(2)</sup> ha determinato, per via più semplice, l'integrale delle aree nel caso di N poli magnetici semplici e allineati; in questo caso il potenziale  $\Phi_1$  e la funzione  $\Psi_1$  delle traiettorie ortogonali, risultano espressi dalle relazioni

$$\Phi_1 = \sum_1^N \frac{k_s}{r_s}, \quad \Psi_1 = \sum_1^N k_s \cos \theta_s,$$

e l'integrale delle aree risulta

$$y^2 \dot{w} = c - \frac{e}{m} \Psi_1,$$

sempre collo stesso significato dei simboli.

(1) C. AGOSTINELLI, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico*. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 73, 1938.

(2) T. BOGGIO, *Intégrale nouvelle des équations du mouvement d'une particule électrisée dans un champ électrique et magnétique superposés*. « Comptes-Rendus Académie Sciences de Paris », juillet 1938.



**Meccanica.** — *Sopra un caso particolare di moto incipiente, che trova espressiva applicazione al giroscopio.* Nota <sup>(1)</sup> di G. BISSONCINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Un certo punto P di un sistema materiale vincolato sia costretto a muoversi sopra una superficie fissa  $\sigma$ . Supposto che la struttura del sistema sia tale che, in una configurazione in cui P ha velocità nulla, la reazione vincolare che si desta in P, in conseguenza della sollecitazione applicata al sistema, sia nel piano formato dalla normale  $n$  alla superficie in P e dalla forza che su P agisce, si vuol riconoscere quale potrà essere l'atto di moto del punto. Ma prima, allo scopo di dare base concreta a tale indagine, vogliamo indicare qualche caso in cui l'ipotesi fatta sul comportamento della reazione è verificata.

2. Si abbia un sistema a legami bilaterali privi di attrito e tale che il principio dei lavori virtuali possa applicarsi, non solo alla totalità dei punti, bensì anche al sistema che si ottiene da quello dato facendo astrazione da un certo suo punto P che i vincoli costringono a non abbandonare una certa superficie  $\sigma$ . Indicando con  $\mathbf{R}$  la reazione che si desta in P e con  $\mathbf{R}_i$  quelle che si destano negli altri punti, avendosi per l'insieme di tutti i punti.

$$\mathbf{R} \times \delta \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{R}_i \times \delta \mathbf{P}_i = 0,$$

ed essendo, per ipotesi, nulla la somma  $\sum_i \mathbf{R}_i \times \delta \mathbf{P}_i = 0$ , è  $\mathbf{R} \times \delta \mathbf{P} = 0$ , il che prova, essendo  $\delta \mathbf{P}$  tangente a  $\sigma$ , che  $\mathbf{R}$  è normale a  $\sigma$ . Questa circostanza rientra, come caso particolare, in quella ipotesi che più sopra si è fatta per  $\mathbf{R}$ .

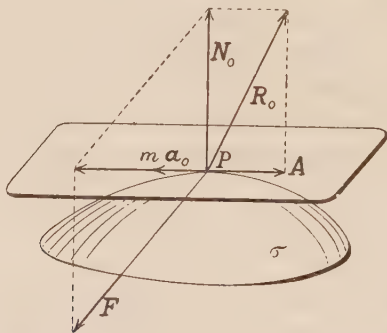
Come esempio di un sistema di tal genere si può considerare una sbarretta rigida OP, assimilabile a un segmento materiale, la quale sia girevole senza attrito intorno all'estremo O tenuto fisso. Una forza applicata all'estremo P determina una reazione  $\varphi$  in O e reazioni in tutti gli altri punti dovute ai vincoli di rigidità. Il lavoro di tutte le reazioni per spostamenti virtuali del sistema è nullo; d'altra parte è nullo il lavoro di  $\varphi$  perchè O è fisso e nulla è la somma dei lavori delle reazioni che si esercitano fra i punti interni della sbarretta perchè il sistema di tali punti è rigido e le reazioni interne formano sistema equivalente a zero, quindi risulta nullo anche il lavoro della reazione relativa a P.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 agosto 1938.

3. Un caso in cui si può pensare che la reazione soddisfi alla condizione posta al n. 1 si ha quando si considera, quale generalizzazione del caso prospettato al numero precedente, un solido geometricamente e materialmente simmetrico rispetto a una retta  $s$  con esso solidale, retta la quale possa rotare senza attrito intorno ad un suo punto  $O$  tenuto fisso.

Se ad un punto del solido si applica una forza  $\mathbf{F}$ , la cui linea di azione incontri  $s$  in un punto  $P$  diverso da  $O$ , la supposta simmetria del solido induce ad ammettere che la reazione  $\mathbf{R}$  che si desta in  $P$ , essendo somma delle reazioni di rigidità dovute al collegamento di  $P$  coi rimanenti punti del solido, reazioni che l'intuizione porta a supporre due a due simmetriche rispetto al piano formato da  $s$  con  $\mathbf{F}$ , sia su codesto piano. Basta notare che l'asse  $s$  è la normale alla superficie della sfera di centro  $O$ , su cui  $P$  è costretto a muoversi, per concludere che forza  $\mathbf{F}$ , reazione  $\mathbf{R}$  e normale alla superficie sono in un piano.

4. Se  $m$  è la massa di quel punto  $P$  del sistema che i vincoli obbligano a muoversi sopra una superficie fissa  $\sigma$  e  $\mathbf{a}$  la sua accelerazione,  $\mathbf{F}$  ed  $\mathbf{R}$  la forza ad esso applicata e la reazione vincolare, vale in ogni



istante la relazione  $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$ . In particolare, supponendo che  $\mathbf{F}$  agisca su  $P$  in un istante  $t_0$  in cui il punto ha velocità nulla, dette  $\mathbf{a}_0$  ed  $\mathbf{R}_0$  le corrispondenti determinazioni della accelerazione e della reazione, si ha  $m\mathbf{a}_0 = \mathbf{F} + \mathbf{R}_0$ . Se designiamo con  $\mathbf{A}_0$  ed  $\mathbf{N}_0$  i componenti di  $\mathbf{R}_0$  sul piano tangente a  $\sigma$  in  $P$  e sulla normale  $n$  a tale piano, la relazione può scriversi

$$(m\mathbf{a}_0 - \mathbf{A}_0) - \mathbf{F} = \mathbf{N}_0.$$

Se ne deduce che nell'istante  $t_0$  il vettore  $(m\mathbf{a}_0 - \mathbf{A}_0) - \mathbf{F}$  è normale al piano tangente a  $\sigma$  nella posizione occupata da  $P$  in tale istante. Ciò è quanto dire che il vettore  $m\mathbf{a}_0 - \mathbf{A}_0$  è il componente di  $\mathbf{F}$  su codesto piano tangente. Ma  $m\mathbf{a}_0 - \mathbf{A}_0$ , per la supposta complanarità di  $\mathbf{R}_0$  ed  $\mathbf{F}$  con la normale  $n$  a  $\sigma$ , è parallelo a  $m\mathbf{a}_0$  e questo è parallelo alla velocità  $\mathbf{v}_0$ .

che  $P$  assume partendo dalla quiete, quindi tale velocità è parallela al componente di  $\mathbf{F}$  sul piano tangente.

In conclusione:

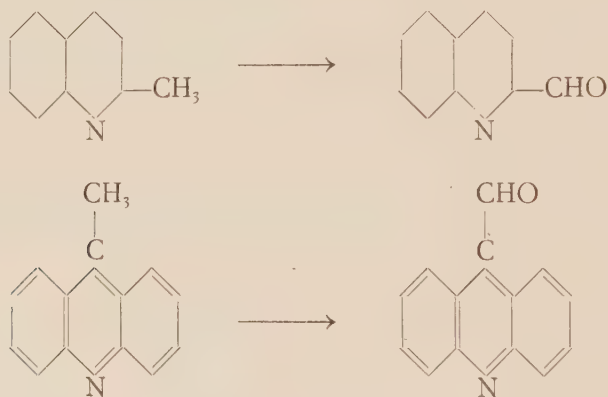
*Dato un sistema materiale vincolato in moto, tale che i vincoli costringano un certo suo punto a non abbandonare una superficie fissa, se accade che la reazione che si desta nel punto in un istante in cui esso è in quiete sia in un piano con la forza agente sul punto e con la normale alla superficie, la velocità che il punto assume movendosi ha la stessa direzione e lo stesso senso del componente tangenziale della forza agente sul punto.*

5. Il risultato trova applicazione nel moto di un giroscopio, la cui struttura sia tale che esso possa considerarsi come un sistema rigido, per il quale l'asse giroscopico sia retta di simmetria geometrica e materiale. Poichè in tal caso ci si viene a trovare nelle condizioni poste al n. 3, se il giroscopio è in rapida rotazione intorno al suo asse fissato nel baricentro, e si applica a un punto  $P$  di tale asse una forza, l'asse inizia il suo moto nel piano passante per esso e per la forza <sup>(1)</sup>. Ciò perchè il punto di applicazione di questa, essendo inizialmente fermo, assume una velocità che ha la direzione e il verso del componente della forza sul piano tangente alla sfera, su cui  $P$  si muove.

(1) Vedi T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Compendio di Meccanica razionale*. Parte II, cap. VI, § 4, n. 15 della seconda edizione (Bologna, Zanichelli, 1938).

**Chimica.** — *Sull'azione ossidante del biossido di selenio*<sup>(1)</sup>.  
Nota III<sup>(2)</sup>, di LYDIA MONTI, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

In due Note precedenti<sup>(3)</sup> ho messo in evidenza come il biossido di selenio possa reagire con composti organici azotati contenenti nella loro molecola l'anello eterociclico della piridina esercitando la sua azione ossidante sui gruppi  $-\text{CH}_3$  che si trovano in posizione  $\alpha$  o  $\gamma$  all'atomo di azoto. Sono state così descritte le esperienze eseguite con la  $\alpha$ -chinaldina e con la 9-metil-acridina che vengono ossidate dando rispettivamente l' $\alpha$ -chinoxilinaldeide e la 9-acridinaldeide.



Henze<sup>(4)</sup> ha poi ancora studiato questa azione ossidante del biossido di selenio su altri omologhi della piridina e della chinolina aventi dei gruppi  $-\text{CH}_3$  o  $-\text{C}_2\text{H}_5$  anche in posizione  $\beta$  ed ha constatato che generalmente si formano gli acidi  $\beta$ -carbossilici corrispondenti.

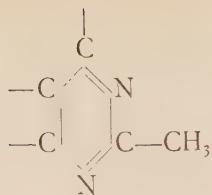
Per estendere ancora questo studio sull'azione esercitata da questo delicato mezzo ossidante sui composti eterociclici azotati ho voluto fare esperienze anche con sostanze contenenti nella loro molecola invece dell'anello piridinico un altro nucleo azotato p. es. l'anello della pirimidina. In particolare i composti del tipo:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

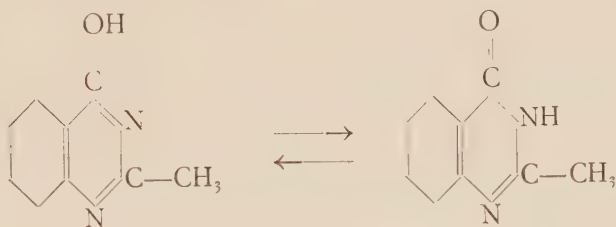
(2) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1938.

(3) «Rendiconti R. Acc. Lincei», vol. XVIII, ser. 6<sup>a</sup>, 1933, p. 505 e vol. XXIV, ser. 6<sup>a</sup>, 1936, p. 145.

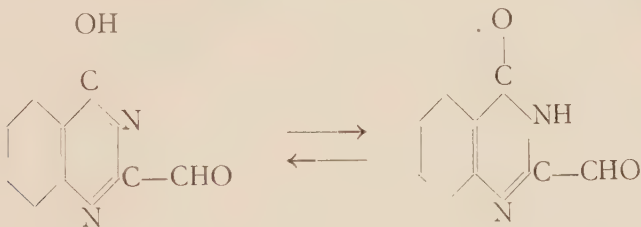
(4) «Ber.», 67, 1934, p. 750.



avendo un gruppo  $\text{—CH}_3$  unito all'atomo di carbonio compreso fra due atomi di N presentano una marcata reagibilità, come ho potuto provarlo facendo esperienze con un derivato della benzo-pirimidina e precisamente con la 2-metil-4-ossi-chinazolina

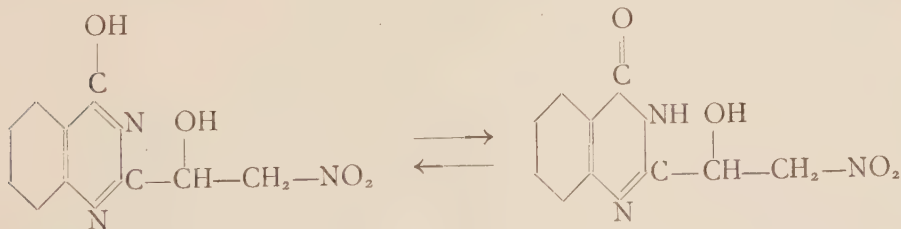


che con grande facilità ho potuto trasformare, per azione del biossido di selenio, nell'aldeide corrispondente



che ancora non era mai stata preparata.

Facendo poi reagire la 4-ossi-2-chinazolin-aldeide, con nitro metano ho potuto ottenere il  $\beta$ -idrossi- $\beta$ -(4-ossichinazolin-2)- $\alpha$ -nitro etano



come è descritto più avanti.

Con questa aldeide ho in corso ancora altre esperienze per preparare nuovi derivati chinazolinici che saranno prossimamente descritti.



PARTE SPERIMENTALE.

*Preparazione della 2-metil-4-ossi-chinazolina.* — Per preparare la 2-metil-4-ossi-chinazolina ho voluto mettere a profitto la sintesi di Nientowski<sup>(1)</sup> che consiste nel riscaldare, in recipiente aperto, quantità equimolecolari di acido antranilico e acetammide per 6-8 ore ad una temperatura compresa tra 135 e 155°. Ho però potuto constatare, d'accordo con quanto avevano osservato anche Bogert e Gotthelf<sup>(2)</sup> che, operando secondo queste indicazioni, si hanno rendimenti bassi che raramente superano il 23-25% riferendosi all'acido antranilico impiegato.

Ho allora cercato di modificare le condizioni di esperienza per avere un migliore rendimento. Dopo numerose prove, buoni risultati ho ottenuto facendo avvenire la reazione in seno all'olio di vasellina e riscaldando soltanto per pochi minuti (15-20'), alla temperatura di 240° (misurati al bagno esterno di lega). In media nelle diverse preparazioni ho ottenuto da 10 gr. di acido antranilico gr. 5-6 di 2-metil-4-ossi-chinazolina (rendita circa 50%)<sup>(3)</sup>.

*4-ossi-2-chinazolin-aldeide.* — Gr. 1 di 2-metil-4-ossi-chinazolina (p. f. 238-239°) vengono disciolti in cc. 25 di acido acetico glaciale; alla soluzione riscaldata a 50-60° si aggiungono gr. 0,7 di biossido di selenio finemente polverizzato. La reazione si inizia immediatamente e si nota quasi subito separazione di selenio.

Si lascia la miscela a sè, a temperatura ambiente per 24 ore, poi si riscalda ancora qualche minuto a b. m. e si filtra facendo cadere il filtrato in una soluzione molto diluita di carbonato sodico. Si deposita così il prodotto di reazione sotto forma di una polvere giallo ocre. Questa sostanza cristallizzata ripetutamente da acido acetico glaciale si presenta come una polvere cristallina giallo chiara che comincia ad alterarsi tra 210-220° e continua, con l'innalzarsi della temperatura, a decomporsi lentamente senza fondere ancora a 300°.

(1) «J. pr. Chem.», (2), 51, 1889, p. 567.

(2) «Journ. Am. Soc.», 22, 1900, p. 531.

(3) Facendo agire, nelle stesse condizioni sperimentali, l'acido antranilico direttamente con il formiato ammonico ho potuto ottenere la 4-ossi-chinazolina con una resa anche maggiore che, nelle diverse prove eseguite, ha raggiunto il 70%.

Rendendomi conto del vantaggio che questa sintesi potrebbe offrire nella pratica se fosse possibile usare direttamente in ogni caso i sali d'ammonio invece delle corrispondenti ammidi ho voluto fare prove per vedere se oltre alla 4-ossi-chinazolina fosse possibile preparare allo stesso modo anche le 2-(alchil o aril)-4-ossi-chinazoline. Le prove eseguite, fino ad ora, con l'acetato, il propionato e il benzoato d'ammonio non hanno però dato risultati soddisfacenti.

Seccata a 100-110° fino a peso contante ha dato all'analisi i seguenti risultati:

Trovato %	C 61,75	H 3,70	N 16,22
Per $C_9H_6N_2O_2$ calcolato %	C 62,06	H 3,46	N 16,09.

Questa sostanza è completamente insolubile in acqua, si discioglie solo in acido acetico glaciale a caldo, mentre nei comuni solventi organici si discioglie appena in tracce impartendo al solvente (alcool o benzolo) una intensa fluorescenza giallo verde.

Questa aldeide viene facilmente ossidata sia dall'anidride cromica in soluzione acetica, sia dall'ossido di argento in soluzione alcalina, ma non ho potuto per ora isolare l'acido corrispondente.

$\beta$ -ossi- $\beta$ -(4-ossichinazolin-2-)- $\alpha$ -nitro-etano. — Trattando una sospensione di 4-ossi-2-chinazolin-aldeide (gr. 0,35) in alcool assoluto (cc. 10) in presenza di tracce di dimetil-ammina con nitro metano (gr. 0,30) alla temperatura del b. m. si osserva che quasi istantaneamente l'aldeide passa in soluzione e dal liquido colorato intensamente in rosso, per raffreddamento piano piano si va depositando una sostanza cristallina giallo chiara. Questo prodotto raccolto su filtro e lavato ripetutamente con alcool si rammollisce verso i 210° e fonde nettamente in un liquido rosso a 216-218°. Seccato a peso costante ha dato all'analisi i seguenti risultati:

Trovato %	N % 17,72
Calcolato per $C_{10}H_9O_4N_3$	N 17,87

**Mineralogia** (Petrografia). — *Sopra due « minettes » della Val Nambrone (Gruppo dell'Adamello)*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> di M. FENOGLIO, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Nell'estate scorsa, durante il rilevamento geologico-petrografico della Val Nambrone eseguito per incarico del R. Magistrato alle Acque, ho potuto individuare una serie di filoni di natura e potenza varie, in piena massa tonalitica del gigantesco plutonite dell'Adamello, differenziati, sia in senso leucocratico, aplitico e pegmatitico, sia in senso melanocratico, lamprofirico. Della frequenza, della distribuzione di questi filoni e della descrizione completa delle forme litologiche in essi osservate, mi occuperò prossimamente nella memoria illustrativa della carta geologica della Val Nambrone, mentre qui mi limiterò ad anticipare qualche notizia su alcuni filoni lamprofirici costituiti da « minettes », tipi litologici piuttosto rari, e, per quanto mi risulta, nuovi per la regione dell'Adamello. Infatti, pur essendo già noti parecchi tipi di lamprofiri (kersantiti, spessartiti, odiniti, malchiti ecc.) legati al massiccio intrusivo dell'Adamello per opera specialmente di Riva<sup>(3)</sup>, Salomon<sup>(4)</sup>, Bianchi e G. B. Dal Piaz<sup>(5)</sup>, nessuno di questi Autori però ha fatto cenno di sorta a delle « minettes ».

Ciò premesso passo senz'altro a dire delle condizioni di giacitura ed a riassumere, per sommi capi, i risultati più salienti dello studio chimico-petrografico dei lamprofiri in questione, affioranti in piena massa tonalitica rispettivamente nel vallone d'Amola e nel vallone Scarpacò.

#### I. — « MINETTE » DEL VALLONE D'AMOLA.

La « minette » nel vallone d'Amola si presenta in filoncelli di potenza piuttosto esigua, al massimo una diecina di centimetri, ed estesi in direzione per qualche metro.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1938.

(3) C. RIVA, *Sulle rocce paleovulcaniche del Gruppo dell'Adamello*. « Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. XVII, 1896, p. 159; ID., *Nuove osservazioni sulle rocce filoniane del Gruppo dell'Adamello*. « Atti della Soc. Ital. di Scienze Naturali », vol. XXXVII, 1897, p. 67.

(4) W. SALOMON, *Die Adamellogruppe*. « Abhandlungen der K. K. geologisch. Reichsanstalt », Bd. XXI, 1908 e 1910, con carta geologica alla scala 1:75.000.

(5) A. BIANCHI e G. B. DAL PIAZ, *Studi geologico-petrografici sul Massiccio dell'Adamello. Il settore Meridionale dell'Adamello*. « Boll. del R. Ufficio Geologico d'Italia, vol. LXII, Nota I, 1937.

Il materiale da me studiato proviene da alcuni filoncelli affioranti a 700 metri a ovest del Rifugio Segantini, non molto discosto dalla traccia del sentiero che conduce alla Presanella. Tali filoni, di colore grigio ferro, risaltano immediatamente sullo sfondo chiaro della tonalite a facies normale, e richiama particolarmente l'attenzione la superficie affiorante della roccia resa tutta cretata e dentellata dai fenomeni di erosione.

La « minette » del vallone d'Amola, di colore grigio ferro, macroscopicamente appare regolarmente granulare, a grana minutissima, lucente, con elementi femici e sialici in proporzioni press'a poco uguali e di dimensioni equivalenti.

All'esame microscopico è facile rilevare che nella roccia a struttura panidiomorfa, gli elementi femici sono essenzialmente rappresentati da biotite, costituente indubbiamente predominante, mentre gli elementi sialici sono dati da feldspati: ortoclasio e plagioclasio.

Fra i componenti accessori tiene il primo posto il pirosseno, mentre il quarzo, l'apatite, lo zirconio, gli ossidi di ferro e la pirite appaiono subordinati.

La biotite si presenta in lamine di dimensioni assai variabili, generalmente mediamente grandi, a contorni irregolari, con colore carico e pleocroismo intenso dal giallo chiaro al bruno rossastro, che in luce convergente si rivelano uniassiche. Sovente è fresca, ma non mancano tuttavia lamine che accusano fenomeni di alterazione più o meno profonda resi manifesti dalla trasformazione in clorite quasi sempre con contemporanea formazione di epidoto di tipo pistacitico, di grumetti di prodotti ferruginosi finissimi, non sicuramente identificabili, e di rutilo.

I feldspati sono rappresentati dall'ortoclasio e dal plagioclasio, con netta preponderanza del primo.

L'ortoclasio si presenta per lo più in individui irregolari sia per forma che per sviluppo, con tracce di sfaldatura secondo  $\{001\}$  e  $\{010\}$  nette e ben visibili; frequentemente è geminato secondo la legge di Carlsbad.

L'ortoclasio sovente è fresco, più raramente presenta un progressivo intorbidamento lungo le tracce di sfaldatura, intorbidamento che talvolta si estende a tutto o a quasi tutto il cristallo con formazione di muscovite.

Il plagioclasio, in individui generalmente di dimensioni non molto grandi, talvolta con poche tracce di sfaldatura secondo  $\{110\}$  e  $\{\bar{1}10\}$  non rigorosamente rettilinee, ben visibili, è sovente geminato secondo la legge dell'albite, con lamelle di geminazione talvolta fini e serrate, più di rado secondo la legge di Carlsbad; abbastanza frequente è pure la geminazione albite-pericline e non manca la geminazione albite-Carlsbad.

(1) M. BEREK, *Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehstisch-Methoden*. Berlin, 1924.

Con l'impiego del piatto di Fedorow ho determinato:

$$+ 2V = 84^{\circ}.$$

L'estinzione nella zona simmetrica, determinata ancora mediante il piatto di Fedorow, raggiungendo il massimo, ha dato:

$$\varphi = 21^{\circ}$$

a cui corrisponde nel diagramma di Berek <sup>(1)</sup> un plagioclasio della composizione  $Ab_{59}An_{41}$ , che è in ottimo accordo con quella  $Ab_{58}An_{42}$  che si calcola dal valore  $+ 2V = 84^{\circ}$  testè determinato.

Il plagioclasio assai sovente è fresco, più di rado presenta segni evidenti di alterazione, ora con formazione di squamette micacee piccolissime, ora con produzione di epidoto di tipo pistacitico o zoisitico.

Fra i componenti accessori che si notano con certa frequenza vi è un pirosseno rombico, generalmente in grani di non grandi dimensioni, incolore, con birifrangenza bassa di segno positivo, da ascriversi all'enstatite.

Rarissimamente l'enstatite è fresca, si presenta quasi sempre più o meno completamente trasformata in talco. Infatti i grani di pirosseno appaiono talvolta con bordo periferico costituito da un fitto feltro di squamette talcose, che si insinuano poi altresì a guisa di nastro lungo le linee di frattura, tal'altra invece si presentano anche più profondamente alterati con pseudomorfosi completa di un feltro di laminette di talco su enstatite.

Il quarzo, in rari grani di dimensioni mediocri, a contorni irregolari, non presenta nulla di particolare.

L'apatite in prismetti e lo zirconio in granuli, inclusi in tutti gli altri componenti della roccia e specialmente nella biotite, non mancano mai, sebbene vi figurino piuttosto subordinati rispetto ad altri componenti accessori. Gli individui di zirconio inclusi nella biotite presentano quasi sempre ampie aureole policriche.

Gli ossidi di ferro si notano con una certa frequenza in forma di granuli, inclusi in tutti i componenti della roccia. Con opportuni saggi, sia sulla polvere della roccia, sia sulle sezioni sottili, potei accertarmi che si trattava di magnetite.

La pirite è piuttosto rara.

L'analisi della roccia ha dato i seguenti risultati:



SiO <sub>2</sub>	. . . . .	40.06	0.667
TiO <sub>2</sub>	. . . . .	2.02	0.032
ZrO <sub>2</sub>	. . . . .	0.01	—
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	. . . . .	25.97	0.255
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	. . . . .	tracce	—
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	. . . . .	3.78	0.024
FeO	. . . . .	8.17	0.114
MnO	. . . . .	0.11	0.002
MgO	. . . . .	3.78	0.094
CaO	. . . . .	8.12	0.145
SrO	. . . . .	0.02	—
BaO	. . . . .	0.08	0.001
K <sub>2</sub> O	. . . . .	3.96	0.042
Na <sub>2</sub> O	. . . . .	1.66	0.027
H <sub>2</sub> O—	. . . . .	0.31	
H <sub>2</sub> O+	. . . . .	1.57	
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	. . . . .	0.02	
S	. . . . .	0.14	
F	. . . . .	tracce	
		99.78	
— O = S	. . . . .	0.04	
Somma	. . . . .	99.74	

Da questi dati analitici per la rappresentazione diagrammatica di Niggli, si calcolano i seguenti valori:

si = 91.8	al = 35.1	
ti = 4.3	fm = 35.3	k = 0.61
	c = 20.1	mg = 0.36
	alc = 9.5	c/fm = 0.57

che nell'insieme corrispondono abbastanza bene a quelli di un magma dioritico-quarzifero di tipo tonalitico-sommatitico<sup>(1)</sup>.

(1) P. NIGGLI, *Die Magmentypen*. « Schweiz Min. u. Petr. Mitt. », Bd. XVI, 1936, p. 359.

Il lamprofiro del vallone d'Amola dunque sia per la composizione mineralogica che per quella chimica è da ascriversi al gruppo delle « minette »; carattere non tanto comune è il tenore un po' elevato in sesquiossido di alluminio, già notato in qualche « minette » <sup>(1)</sup>, e che verosimilmente va messo in relazione con la composizione complessiva del magma tonalitico dalla cui differenziazione ebbe origine la nostra roccia <sup>(2)</sup>.

## II. — « MINETTE » DEL VALLONE SCARPACÒ.

La « minette » del vallone Scarpacò appartiene ad un filone della potenza di qualche decina di centimetri affiorante a sud-est del laghetto Scarpacò. Si tratta di un lamprofiro di colore grigio-azzurrognolo, che macroscopicamente appare regolarmente granulare, a grana minutissima, lucente, con elementi femici e sialici in proporzioni presso che uguali.

All'esame microscopico non è difficile a rilevare che nella roccia a struttura panidiomorfa, i componenti mineralogici sono ancora gli stessi della « minette » del vallone d'Amola, essendo gli elementi femici rappresentati essenzialmente da biotite, e quelli sialici da feldspati. Fra i componenti accessori sono da annoverarsi anche qui: quarzo, pirosseno, apatite, zircone, qualche rarissimo individuo di ortite, ossidi di ferro e pirite.

La biotite presenta i caratteri testè descritti per la biotite della « minette » del vallone d'Amola.

Fra i feldspati tiene il primo posto il feldspato potassico, mentre il plagioclasio si trova assai subordinato; il primo è rappresentato quasi sempre da ortoclasio fresco, e più raramente da micropertthite ortoclasica, il secondo, determinato con l'ausilio del piatto di Fedorow, rivelò una composizione identica a quella del plagioclasio della « minette » testè descritta:  $Ab_{58} An_{42}$ .

Dei componenti accessori nulla di particolare da aggiungere a quanto fu detto per quelli della « minette » del vallone d'Amola all'infuori della loro frequenza: qua il quarzo e l'apatite appaiono un po' più sovente, mentre non si notano che rari relitti di pirosseno rombico di tipo enstatitico, trasformato quasi completamente in talco; rarissimi lo zircone, l'ortite, la magnetite e la pirite.

L'analisi della roccia ha dato i seguenti risultati:

(1) In una « minette » di Butte (Robinson) nel Nevada H. Ross trovò 25.86 % di  $Al_2O_3$  (« Bull. Dep. Geol. Un. Cal. », vol. IV, 1906, p. 346).

(2) Tenori elevati in sesquiossido di alluminio non sono senza precedenti nelle rocce filoniane legate al massiccio tonalitico dell'Adamello: il Riva (« Mem. del R. Istit. Lomb. di Sc. e Lett. », vol. XVII, 1896, p. 197) ha descritto e analizzato una porfirite di Val Moja contenente il 25.51 % di  $Al_2O_3$ .

SiO <sub>2</sub>	. . . . .	42.06	0.700
TiO <sub>2</sub>	. . . . .	1.27	0.016
ZrO <sub>2</sub>	. . . . .	tracce	—
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	. . . . .	26.93	0.264
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	. . . . .	tracce	—
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	. . . . .	1.90	0.012
FeO	. . . . .	6.95	0.097
MnO	. . . . .	0.12	0.002
MgO	. . . . .	2.94	0.073
CaO	. . . . .	8.84	0.158
SrO	. . . . .	0.03	—
BaO	. . . . .	0.09	0.001
K <sub>2</sub> O	. . . . .	5.01	0.053
Na <sub>2</sub> O	. . . . .	1.36	0.022
H <sub>2</sub> O—	. . . . .	0.20	—
H <sub>2</sub> O+	. . . . .	2.35	—
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	. . . . .	0.07	—
S	. . . . .	0.07	—
F	. . . . .	tracce	—
		100.19	
— O = S	. . . . .	0.02	
Somma	. . . . .	100.17	

Da questi dati analitici per la rappresentazione diagrammatica di Niggli si calcolano i seguenti valori:

si = 100.8	al = 38.0	
ti = 2.3	fm = 28.3	k = 0.71
	c = 22.9	mg = 0.37
	alc = 10.8	c/fm = 0.81

che nell'insieme corrispondono ancora abbastanza bene a quelli di un magma dioritico-quarzifero di tipo tonalitico-sommatitico<sup>(1)</sup>.

A scopo di confronto riporto nella tabella che segue i risultati dell'analisi della « minette » del vallone d'Amola (I) e di quella del vallone Scarpacò (II) e le relative formule magmatiche.

(1) P. NIGGLI, loc. cit., p. 359.

	I	II
SiO <sub>2</sub> . . . . .	40.06	42.06
TiO <sub>2</sub> . . . . .	2.02	1.27
ZrO <sub>2</sub> . . . . .	0.01	tracce
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	25.97	26.93
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	tracce	tracce
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	3.78	1.90
FeO . . . . .	8.17	6.95
MnO . . . . .	0.11	0.12
MgO . . . . .	3.78	2.94
CaO . . . . .	8.12	8.84
SrO . . . . .	0.02	0.03
BaO . . . . .	0.08	0.09
K <sub>2</sub> O . . . . .	3.96	5.01
Na <sub>2</sub> O . . . . .	1.66	1.36
H <sub>2</sub> O— . . . . .	0.31	0.20
H <sub>2</sub> O+ . . . . .	1.57	2.35
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> . . . . .	0.02	0.07
S . . . . .	0.14	0.07
F . . . . .	tracce	tracce
	99.78	100.19
— O = S . . . . .	0.04	0.02
Somma . . . . .	99.74	100.17

	si	ti	al	fm	c	alc	k	mg	c/fm
I	91.8	4.3	35.1	35.3	20.1	9.5	0.61	0.36	0.57
II	100.8	2.3	38.0	28.3	22.9	10.8	0.71	0.37	0.81

Uno sguardo ai dati della tabella permette di concludere che le due « minettes » hanno una composizione assai prossima; le leggere differenze nei tenori di alcuni ossidi trovano plausibile spiegazione della diagnosi microscopica, che rivelò nella « minette » del vallone Scarpacò una leggera variazione nel rapporto di alcuni componenti.

Concludendo, i risultati dello studio chimico-petrografico, condotto su due lamprofiri della Val Nambrone, hanno consentito di accertarne la pertinenza al gruppo delle « minettes », tipi litologici nuovi per la regione dell'Adamello, che rappresentano molto verosimilmente dei prodotti estremi della differenziazione in senso melanocratico del magma tonalitico.

**Paleontologia** (Paletnologia umana). — *Nuovo giacimento paleolitico e mesolitico ai Balzi Rossi (Bàussi Rùssi) di Grimaldi*. Nota <sup>(1)</sup> di A. C. BLANC, presentata dal Corrisp. G. STEFANINI.

In occasione di un sopralluogo effettuato in compagnia di G. A. Blanc e di L. Cardini ai Balzi Rossi <sup>(2)</sup> di Grimaldi il 9 aprile 1938-XVI, ho potuto constatare l'esistenza di un nuovo potente giacimento preistorico, situato in prossimità delle classiche Grotte del Caviglione e di Florestano <sup>(3)</sup>. È noto che la Grotta di Florestano è stata esplorata e frugata fin dal 1846, e che era stata quasi interamente svuotata prima che il Rivière iniziasse le sue ricerche ai Balzi Rossi. È egualmente noto che l'importanza e la ricchezza del riempimento della Grotta del Caviglione è stata rivelata dai lavori ferroviari intrapresi nel 1870 per la costruzione della linea Ventimiglia-Nizza, i quali, sezionando la scarpata detritica esistente ai piedi della Grotta stessa, portavano al rinvenimento di copiosa fauna fossile ed infine dello scheletro noto col nome di *Homme de Menton*. Dopo i frugamenti e scavi disordinati iniziati nel 1846 dal principe Florestano I di Monaco, e proseguiti da una lunga serie di ricercatori <sup>(4)</sup>, si riteneva infatti, nel 1869, che le Grotte fossero già state così completamente esplorate che non vi si poteva ormai rinvenire più nulla <sup>(5)</sup>.

Sono noti i risultati, imponenti anzitutto dal punto di vista antropologico ed archeologico, delle ricerche eseguite dopo il 1870 da E. Rivière <sup>(6)</sup>. Ripresi poi gli scavi regolari nel 1892, per iniziativa del principe Alberto I di Monaco, venne tenuto maggior conto della stratigrafia e paleontologia dei giacimenti: questi scavi, condotti da de Villeneuve, hanno dato luogo alla serie ben nota di ricche monografie, nelle quali eminenti scienziati francesi hanno descritto ed illustrato i trovamenti <sup>(7)</sup>. Ma non poteva con ciò con-

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1938.

(2) *Bàussi Rùssi* nella parlata locale (*Bàoussi Roussi*, secondo la fonetica francese). Questa classica località è conosciuta nella letteratura internazionale con un nome (*Baoussé Roussé*) errato sia per l'ortografia che per l'accento tonico. Adoperato da E. Rivière, è stato poi ripetuto da tutti gli autori.

(3) L. DE VILLENEUVE, *Les Grottes de Grimaldi*. — I. *Historique et description*. Monaco, 1906.

(4) L. DE VILLENEUVE, op. cit.

(5) L. DE VILLENEUVE, op. cit.

(6) E. RIVIÈRE, *De l'antiquité de l'Homme dans les Alpes maritimes*, Paris, 1887.

(7) L. DE VILLENEUVE, M. BOULE, CARTHAILHAC, VERNEAU, *Les Grottes de Grimaldi*, Monaco, 1906.



siderarsi compiuta l'opera di esplorazione e di interpretazione delle serie stratigrafiche: nuovi scavi, intrapresi negli anni 1928-1929 dall'Istituto Italiano di Paleontologia Umana, portavano infatti a constatare che le ricerche nella Grotta dei Fanciulli non erano state, dal de Villeneuve, spinte fino al fondo roccioso ma che livelli fossiliferi e fertili di industria rimanevano da esplorare sia in questa grotta, che nella parte inferiore della Barma Grande. Veniva anche scoperta, accanto alla Grotta dei Fanciulli, la Grotta Costantini <sup>(1)</sup>.

Rimanevano tuttavia incognite che nessuna di queste campagne di scavi era fin'ora riuscita a risolvere: ad esempio quella dei livelli superiori dei giacimenti, che dovevano presumibilmente contenere le industrie del Paleolitico terminale. Già prima del 1870 infatti la parte più alta dei riempimenti detritici delle grotte era stata ovunque manomessa ed asportata, sia dai ricercatori più antichi, sia in occasione dell'escavazione dei basamenti di forni a calce, che erano stati impiantati in passato nell'interno delle Grotte dei Fanciulli e del Caviglione. Rivière e de Villeneuve <sup>(2)</sup> hanno ormai fatto giustizia dell'affermazione del de Mortillet che i depositi paleolitici delle Grotte dei Balzi Rossi fossero ricoperti da strati neolitici contenenti asce levigate e ceramica, affermazione in merito alla quale l'Issel sembrava nutrire già qualche dubbio <sup>(3)</sup>. Ma la serie dei livelli paleolitici, illustrata da Rivière e da Cartailhac, ed accresciuta dai trovamenti effettuati durante gli scavi del 1928-29, è sempre rimasta amputata del suo coronamento.

Il nuovo giacimento qui segnalato è situato tra le Grotte di Florestano e del Caviglione, ai piedi della grande parete di calcare giurassico alle due estremità della quale si aprono le grotte suddette. Un oggetto fortemente sporgente nella parte alta della parete, ed il suo andamento a strapiombo, vi creano uno spazioso riparo, perfettamente asciutto, nel quale si sono accumulati detriti analoghi per natura e per origine a quelli costituenti il riempimento delle grotte adiacenti.

Percorrendo la sommità di questa scarpata detritica, ebbi campo, il 9 aprile 1938, di osservare la presenza di strumenti di selce e di fauna fossile, che indicavano come il riparo fosse stato per lo meno percorso dagli abitatori preistorici delle grotte. I saggi di scavo eseguiti in appresso dovevano dimostrare che il riparo stesso è stato intensamente abitato, e che contiene focolari paleolitici fertilissimi di industria e di fossili.

La trincea ferroviaria, che taglia longitudinalmente il deposito, ad una distanza dalla parete rocciosa variante da circa m. 5 dinanzi alla Grotta del Caviglione, a circa m. 16 dinanzi alla Grotta di Florestano, consente di vederne una sezione frontale di circa m. 70 di lunghezza per circa m. 12.

(1) P. GRAZIOSI, *I Balzi Rossi*, Guida delle Caverne preistoriche di Grimaldi presso Ventimiglia. Albenga, 1937.

(2) L. DE VILLENEUVE, op. cit., p. 16.

(3) A. ISSEL, *Résumé des recherches scientifiques concernant l'ancienneté de l'Homme en Ligurie*. «C. R. Congrès d'Antrop. et d'Arch. préhist.». Paris, 1867.

di altezza. Su questa sezione il calcare in posto affiora solo dinanzi alla Grotta di Florestano, poi, procedendo verso est, scompare sotto il livello della ferrovia, e la scarpata è interamente costituita da materiali detritici terrosi e rocciosi, talvolta cementati in breccia. Anche dinanzi al Caviglione, dove, secondo le sezioni pubblicate dal de Villeneuve, gli scavi avrebbero raggiunto il fondo roccioso compatto, la scarpata immediatamente antistante l'ingresso, alta ben m. 8, non mostra invece roccia in posto, ma è bensì costituita esclusivamente da detriti. Le pareti della grotta si approfondano verticalmente, ed il fondo roccioso, in corrispondenza della scarpata, trovasi certamente a vari metri al disotto del piano dei binari ferroviari. Un saggio eseguito sulla scarpata, all'altezza di circa m. 2.50 sopra il piano suddetto, mi ha consentito del resto di mettere in luce la sezione di due focolari sovrapposti, che hanno fornito industria di tipo musteriano, fauna fossile e frammenti di carbone. In altri punti della scarpata della trincea ferroviaria, in posizione intermedia tra le Grotte di Florestano e del Caviglione, ho estratto dalla breccia rossastra, all'altezza da m. 1 a 2 sopra il piano dei binari, industria litica e tra l'altro un nucleo discoidale di tipo musteriano.

La grande sezione formata dalla scarpata della trincea ferroviaria mostra che tutto il cumulo di detriti depositi al piede della parete rocciosa costituisce una formazione unica, della quale i riempimenti delle Grotte di Florestano e del Caviglione, con i quali essa trovasi in continuità, non erano che le propaggini. Quattro trincee di assaggio eseguite nella parte alta della formazione stessa, e l'esame accurato della parete nord della trincea ferroviaria hanno dimostrato che il deposito è fertile su tutto il suo spessore visibile. Esso costituisce il più esteso, e, dal punto di vista stratigrafico, il più completo dei giacimenti di Balzi Rossi di Grimaldi: esso contiene infatti, nella sua parte più alta, livelli microlitici, con elementi tipici del Mesolitico, coronanti un complesso di strati del Paleolitico superiore, e, nella parte inferiore, focolari musteriani.

In omaggio alla memoria del prof. A. Mochi, che tanto appassionato fervore ha dedicato alla ricerca dell'epi-paleolitico italiano, propongo per il nuovo giacimento compreso tra le Grotte di Florestano e del Caviglione, il nome di Riparo Mochi.

L'esplorazione del Riparo Mochi è stata iniziata dall'Istituto Italiano di Paleontologia Umana, con una campagna di scavo che si è svolta dal 7 al 21 maggio 1938, di cui riassumo in appresso i risultati.

Sono state aperte quattro trincee di assaggio, ortogonali alla parete rocciosa e sezionanti la parte più alta del cumulo detritico (la cui superficie trovasi a circa 25 m. s. l. d. m.), a ridosso dello strapiombo:

una prima trincea (trincea A), su una larghezza di m. 2.50, a m. 29 ad est della Grotta di Florestano;

una seconda trincea (trincea B), su una larghezza di m. 1.20, a m. 16 ad est della Grotta medesima;

una terza trincea (trincea C), su una larghezza di m. 1.20, a m. 8 ad est della Grotta medesima;

una quarta trincea (trincea D), su una larghezza di circa m. 1, davanti alla Grotta di Florestano, ed in corrispondenza della sua parete sud-est.

Le sezioni delle trincee A, B, C sono paragonabili, e vengono descritte in appresso. Il saggio D ha incontrato quasi subito il fondo roccioso compatto, ma prima ha sezionato, su uno spessore di circa cm. 20 un residuo del riempimento basale della Grotta di Florestano, fertile di industria e di fauna, il cui collegamento stratigrafico con il cumulo detritico esterno sarà possibile, con la prosecuzione delle ricerche.

strati	trincea			industria	fauna
	A	B	C		
<i>a, b, c</i>	m. 0-0.60	0-0.05	0-0.07	iper-microlitica con microbulini	<i>Capra ibex</i> , <i>Arctomys</i> , ecc.
<i>d</i>	0.60-1	0.05-0.07	0.70-0.72		
<i>e</i>	1-1.60	0.07-0.60	0.72-0.90	macrolitica	»
<i>f, f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub></i>	1.60-2.70			microlitica	»

*Strati a, b, c:* Terra pulverulenta grigio-brunastra, incoerente, permeata da radici, contenente, su tutto il suo spessore, frammenti di calcare angolosi, grossi ciottoli di calcare scheggiati intenzionalmente, industria litica, conchiglie di molluschi marini (*Patella*, *Mytilus* ecc.), spesso perforati (*Nerita neritea*, *Clanculus* ecc.), ossa e denti di *Capra ibex*, *Cervus*, *Arctomys* ecc., spesso bruciati, frammenti di ocra ecc.

In questo livello, che ha uno spessore apprezzabile soltanto nelle trincee A e C, ove è stato suddiviso arbitrariamente in tre tagli sovrapposti dello spessore di circa cm. 20 (*a, b, c*), sono stati rinvenuti anche alcuni grossi chiodi di ferro, frammenti di vetro e di ceramica attuale, frammenti di carbone di aspetto freschissimo, e molluschi terricoli attuali. Si giustifica perciò qualche dubbio sulla sua giacitura primaria. Bisogna però tenere presente la sua posizione superficiale, in un riparo asciutto, a pochi metri dalla Via Aurelia, che per 1700 anni ha percorso il piede della scarpata detritica, e la sua natura pulverulenta, che facilita l'introduzione di elementi estranei per parte di animali scavatori. Lo stesso de Villeneuve ha rinvenuto nella Grotta del Principe, sotto qualche metro di riempimento, frammenti di giornali e residui di pasto introdotti in una tana da qualche animale. Data la grande esten-

sione del deposito è la sua omogeneità, sarei propenso a ritenere possibile un rimescolamento parziale di esso, ad opera sia di animali, sia dell'Uomo, ma non a scopo di ricerca e senza sua rimozione. Ciò sembra confermato dalla ricchezza di questo livello (in poco più di 3 m<sup>3</sup>. di deposito sono state rinvenute varie migliaia di schegge e centinaia di strumenti), ed anche dal fatto che l'industria che vi è contenuta costituisce un insieme omogeneo, di una tecnica assai particolare, e senza alcun miscuglio di altri tipi, più antichi o più recenti. Essa è composta da nuclei e lamette di selce policroma e di diaspro, di tipo iper-microlitico. Sono presenti in gran numero punte e lamette a dorso abbattuto, lamette a ritocco uni- o bi-laterale retto, inverso ed alterno, a trocatura terminale ritoccata, a incavo ecc., bulini laterali e a becco di flauto, semplici e doppi, raschiatoi-bulini, raschiatoi su lama, punte a tacca del tipo di Willendorf, a gibbosità, triangoli isosceli e scaleni, microliti lunati ecc. Sono presenti anche elementi nettamente mesolitici, quali i microbulini tipici del Tardenoisiano<sup>(1)</sup>. I pezzi sono di regola piccoli e piccolissimi: ho misurato lamette a dorso abbattuto delle dimensioni seguenti

cm.  $0.9 \times 0.2 \times 0.1$ .

In complesso le dimensioni sono molto più piccole di quelle delle industrie grimaldiane note, e trovano qualche analogia, in Italia, solo in alcune microindustrie siciliane (Termini Imerese)<sup>(2)</sup>. La tecnica di scheggiatura si mantiene di tradizione paleolitica e rammenta quella del Sauveterriano (Tardenoisiano inferiore)<sup>(3)</sup>. Un canino di Cervide perforato, un amuleto di talcoscisto verde<sup>(4)</sup>, frammenti di aghi di osso e pezzetti di ocre completano la raccolta. Non è stato rinvenuto alcun frammento di ceramica neolitica o eneolitica, nè alcun oggetto di età protostorica.

L'industria contenuta in questo livello, di cui non esiste rappresentanza nè presso il Museo di Monaco, nè in alcuna delle collezioni note, costituisce un insieme nuovo, non solo per Grimaldi, ma per l'Italia.

*Strato d*: Terra bruno-giallastra, di granitura piuttosto uniforme, fine, con qualche incluso voluminoso, sterile. La sua superficie, nettamente demarcata, è suborizzontale; la consistenza compatta.

*Strato e*: Pietrisco calcareo a spigoli vivi, con terra grigio-brunastra, cementato da depositi stalagmitici e travertinosi in prossimità di alcuni

(1) In Italia era noto fino ad oggi un solo microbulino tardenoisiano, raccolto in superficie nella Grotta Mangiapane in Sicilia da R. VAUFREY, e da lui figurato (*Le Paléolithique italien*. « Mem. Inst. de Pal. Hum. », n. 3, Parigi, 1928).

(2) R. BATTAGLIA, *Microliti della stazione del Castello a Termini Imerese*. « Riv. di Antropologia », XXV, Roma, 1922-23.

(3) L. COULONGES, *Les gisements préhistoriques de Sauveterre-la-Lémance (Lot-et-Garonne)*. « Mem. Inst. de Pal. Hum. », n. 14, Parigi, 1935.

(4) E. RIVIÈRE ne aveva rinvenuto un unico esemplare ai Balzi Rossi (*Sur une amulette en schiste talqueux trouvée dans les grottes de Menton*. « Bull. Soc. d'Anthrop. de Paris », 19 aprile 1877).



punti della parete ed in corrispondenza a stillicidi dell'aggetto roccioso sovra-incombente. Esso forma in questi luoghi masse brecciose compatte, assai dure, passanti insensibilmente, nelle zone asciutte del riparo, a pietrisco più o meno terroso, incoerente. Alcuni lembi di breccia aderenti alla parete rocciosa presso la trincea A, in posizione più elevata della superficie dello strato *a*, appartengono certamente a questa formazione *e* (la continuità del deposito è visibile); essi indicano che, in epoca precedente alla deposizione degli strati *a, b, c, d*, la parte più alta dello strato *e* è stata decapitata o comunque depressa di almeno m. 1.50.

Lo strato *e* contiene, nelle trincee A e B (in quella C lo scavo non ha ancora interessato questo strato, di cui è stata appena scoperta la superficie) industria litica di tipo nettamente diverso da quello rappresentato negli strati *a, b, c*. Le dimensioni sono grandi, la tecnica di scheggiatura differente. Sono presenti rozzi nuclei di tipo paleolitico superiore, schegge fogliacee delle quali una col piano di percussione preparato, grandi lame appiattite, lame a ritocco periferico continuo, bulini laterali e poligonali, punte a dorso abattuto (rare), ed alcuni grandi raschiatoi corti, piatti, subcircolari, di cui esistono esempi sia in alcuni giacimenti magdaleniani francesi, sia nel capsiano tipico nord-africano. Sono assenti tipi microlitici, sia in forma di strumenti, che di rifiuti di scheggiatura. La materia prima adoperata è in prevalenza selce piromaca grigio-bluastro, con macchie di alterazione lattescenti, e diaspro. La fauna comprende *Capra ibex* (frequente), *Arctomys* e conchiglie di *Mytilus* e *Patella*. Anche di questo complesso industriale, assai caratteristico, e nuovo per Grimaldi, non esiste, a mia conoscenza, alcun esempio analogo in Italia.

*Strati  $f, f_1, f_2$* : Questi strati sono stati raggiunti solo nella trincea A, l'approfondimento delle trincee B e C essendo stato rinviato ad un'ulteriore campagna di ricerche. Essi sono stati esplorati fino alla profondità di m. 2.80, alla quale essi sembrano approfondirsi ulteriormente senza accennare a variazioni apprezzabili, sia di ordine litologico che faunistico e paleontologico. La suddivisione in tre strati distinti *f, f<sub>1</sub>, f<sub>11</sub>* (dello spessore, rispettivamente, di m. 0.35, 0.20, 0.55) è stata effettuata arbitrariamente, per tentare di mettere in evidenza un'eventuale diversità nel contenuto dei vari livelli, diversità che fino ad ora non è risultata.

La formazione è costituita da pietrisco calcareo analogo a quello dello strato *e*, ma accompagnato da una maggiore proporzione di terra bruna, talvolta giallastra, ed impastato con carboni, ceneri, frammenti di ossa bruciate, industria litica, conchiglie fossili, talvolta perforate, frammenti di ocre, ciottoli di serpentina ecc. Trattasi di un seguito di vari focolari sovrapposti, che testimoniano con il loro passaggio insensibile di uno nell'altro, una continuità di frequentazione umana del riparo durante un tempo relativamente lungo. L'industria è di tipo paleolitico superiore microlitico, di dimensioni però meno piccole, in complesso, di quelle dell'industria degli strati *a, b, c*.



Essa comprende punte e lamette a dorso abbattuto, di grande finezza, raschiatoi su lama, bulini laterali e bulini del tipo di Noailles, punte a tacca del tipo di Willendorf ecc. La fauna comprende *Capra ibex*, *Cervus* e *Arctomys*, e conchiglie di *Mytilus*, *Patella*, *Nerita neritea* (queste ultime perforate). Sono presenti anche avifauna e micromammiferi, a gruppetti di elementi eterogenei, probabilmente rigetti di uccelli notturni. Frammenti di carboni sono stati raccolti e saranno sottoposti allo studio. L'industria litica, nella quale manca qualsiasi elemento mesolitico, potrebbe forse attribuirsi a un Grimaldiano superiore: sono tuttavia presenti alcuni tipi (quali i bulini di Noailles), che non sono ancora mai stati riconosciuti nel Grimaldiano <sup>(1)</sup>.

Ulteriori campagne di scavo saranno dirette ad esplorare il deposito del Riparo Mochi su tutto il suo spessore, approfondendo le trincee iniziate, che hanno intanto dimostrato la fertilità e l'omogeneità in estensione dei livelli archeologici costituenti la parte più alta, terminale, della serie stratigrafica. È presumibile che, sotto al potente complesso di strati mesolitici, paleolitici superiori e musteriani, lo scavo porrà in luce, ad un livello inferiore al piano dei binari ferroviari (cioè a oltre m. 12 al disotto della superficie del riempimento detritico) la spiaggia marina tirreniana, di cui qualche lembo dovrebbe essersi conservato, specie in posizioni riparate, marginali, come alla base della Grotta del Caviglione.

Durante la campagna di scavi testè condotta dall'Istituto Italiano di Paleontologia Umana, per conto del Municipio di Genova, alla Barma Grande, alcuni saggi eseguiti da L. Cardini sul terreno situato tra la linea ferroviaria ed il mare, in prossimità del serbatoio d'acqua posto a ridosso della parete rocciosa sulla quale sorge l'albergo Miramare, hanno poi rivelato la presenza di lembi di deposito analoghi, per l'industria che contengono, al mesolitico iper-microlitico dei livelli *a, b, c* del Riparo Mochi. Vi sono rappresentati, tra l'altro, i microbulini tardenoisiani. Questa constatazione dimostra quanto esteso fosse il giacimento che è stato sezionato dalla linea ferroviaria, e come vi fossero estesamente distribuiti i medesimi livelli archeologici.

A ridosso dello strapiombo tra il suddetto serbatoio d'acqua e la trincea ferroviaria, in corrispondenza del luogo ove il Rivièr aveva già segnalata la presenza di focolari, L. Cardini ha inoltre posto in luce, sotto qualche decimetro di terreno rimaneggiato, focolari contenenti industria microlitica. Propongo per questo giacimento, che può considerarsi indipendente sia dal Riparo Mochi che dalla Grotta del Caviglione, il nome di Riparo Bombrini, in omaggio del Marchese Bombrini, Podestà di Genova, benemerito sostenitore delle ricerche nuovamente intraprese ai Balzi Rossi di Grimaldi dall'Istituto Italiano di Paleontologia Umana.

(1) È stato fin'ora segnalato in Italia, a mia conoscenza, un solo bulino di Noailles, rinvenuto a Torre del Lago, in Versilia. (A. C. BLANC, *Nuovi giacimenti paleolitici del Lazio e della Toscana*. «Studi Etruschi», XI, Firenze, 1937).

**Fisiologia.** — *Sulla funzione respiratoria di fibre dirette e crociate decorrenti nel cordone anteriore del midollo cervicale*<sup>(1)</sup>.

Nota<sup>(2)</sup> di E. TOSATTI, presentata dal Socio M. CAMIS.

Lo studio sistematico degli effetti esercitati da determinate sezioni parziali del midollo spinale sul respiro diaframmatico mi ha permesso di fare alcune osservazioni che ritengo degne di nota sulla localizzazione, sul decorso e sul valore funzionale di una speciale via nervosa decorrente nel midollo cervicale del cane e del coniglio, capace di trasportare impulsi respiratori dal bulbo ai centri motori del midollo spinale.

Tecnica: anestesia, laminectomia, sezioni parziali varie del midollo. Registrazione grafica diretta dei movimenti di ciascun emidiaframma, capace di distinguere nettamente i movimenti attivi da quelli passivi.

Le esperienze sono state condotte su n. 22 conigli e 14 cani. Ed ecco in breve i fatti.

Una prima serie di esperienze ha permesso di rilevare che:

1) normalmente la sezione del cordone laterale del midollo a C<sub>3</sub> provoca la paralisi dell'emidiaframma corrispondente mentre assolutamente inefficace si dimostra la sezione alla stessa altezza del cordone anteriore del midollo spinale; 2) risultati molto diversi si ottengono se 48 ore dopo la sezione del cordone laterale di un lato del midollo si pratica la sezione del cordone laterale del lato opposto. Quest'ultima infatti non è più capace di provocare la paralisi omolaterale del diaframma, la quale invece si ottiene quando, in un terzo tempo, si seziona anche il cordone anteriore dell'emidollo dello stesso lato.

Tali risultati inducono ad ammettere che nel cordone anteriore del midollo cervicale esiste una speciale via nervosa la quale diventa capace di sostituire la funzione del cordone laterale dello stesso lato quando sia stato previamente sezionato anche il cordone laterale del lato opposto<sup>(3)</sup>.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1938.

(3) Si potrebbe sospettare che nell'animale integro il fascio nervoso decorrente nel cordone anteriore contribuisca a determinare il movimento del diaframma e che cessi di funzionare in tale senso, dopo il taglio del vicino cordone laterale del midollo, per un particolare fenomeno di shock, ovvero per un fenomeno analogo a quello osservato da Giannettasio e Pugliese (abolizione della funzione del fascio piramidale laterale di un lato in seguito a sezione del fascio di Löwenthal dello stesso lato del midollo). Ma per le considerazioni seguenti ritengo che tali ipotesi non possano essere accettate: a) l'animale non manifesta alcun segno di shock quando l'intervento venga praticato con le necessarie cautele; b) non regredisce la paralisi del diaframma da sezione del cordone laterale del midollo

Da una seconda serie di prove eseguite praticando da prima la sezione a C<sub>3</sub> del cordone laterale di un lato (paralisi dell'emidiaframma corrispondente) e immediatamente dopo la emisezione del midollo dal lato opposto è risultato che, in questo caso, incomincia a funzionare il fascio nervoso del cordone anteriore appartenente a quella metà del midollo ove è stata praticata, nel primo tempo dell'esperimento, la sola sezione del cordone laterale, essendosi potuto rilevare costantemente che, contemporaneamente alla paralisi dell'emidiaframma corrispondente all'emisezione del midollo, riprende a funzionare l'emidiaframma del lato opposto, prima paralizzato (corrispondente a quella metà del midollo ove è stata eseguita la sezione del solo cordone laterale).

Tanto dalla prima quanto dalla seconda esperienza risulta quindi che nelle condizioni sperimentali sopra riferite il fenomeno della ripresa funzionale di un emidiaframma paralizzato avviene per opera di fibre nervose « dirette » decorrenti, cioè, nel cordone anteriore del midollo omolaterale all'emidiaframma che riprende a funzionare.

Eseguito una terza serie di esperimenti ho potuto riscontrare che lo stesso fascio nervoso decorrente nel cordone anteriore del midollo cervicale di un lato è capace di determinare la ripresa funzionale del diaframma del lato opposto previamente paralizzato. Ho potuto rilevare infatti che se dopo il taglio del nervo frenico di un lato (paralisi dell'emidiaframma corrispondente) si pratica la emisezione a C<sub>3</sub> del midollo del lato opposto, questa emisezione rimane apparentemente senza effetto, inquantochè l'emidiaframma dello stesso lato continua a funzionare, per opera di fibre provenienti dal cordone anteriore del midollo del lato opposto: solo sezionando la zona più mediale di questo cordone anteriore infatti l'emidiaframma (funzionante ad onta della emisezione a C<sub>3</sub> dell'emimidollo dello stesso lato) subisce una completa ed immediata paralisi. Questa esperienza dimostra che il fascio nervoso decorrente nel cordone anteriore del midollo cervicale contiene anche fibre nervose « crociate » le quali in determinate condizioni (quando cioè risulta bloccata, per il taglio del frenico, la via « diretta » all'emidiaframma corrispondente ed è stata praticata la emisezione del midollo controlaterale) sono capaci di determinare la funzione dell'emidiaframma del lato opposto. Tale particolare comportamento può essere spiegato ammettendo che la via nervosa decorrente nel cordone anteriore si incroci « parzialmente » nel midollo cervicale onde arrivare all'emidiaframma del lato opposto (alla stessa guisa di quanto si ritiene avvenga per il fascio piramidale diretto di Türk dell'uomo e per il fascio di Löwenthal del cane) e possa così riuscire

cervicale a C<sub>3</sub>; c) se 48 ore dopo la sezione del cordone laterale a C<sub>3</sub> di un lato si pratica con identica tecnica la sezione del cordone laterale del lato opposto non si ha paralisi del diaframma; d) la sezione del cordone anteriore e posteriore del midollo di un lato non modifica la funzione del fascio nervoso decorrente nel cordone laterale del midollo cervicale dello stesso lato.

a sostituire — in opportune condizioni sperimentali — oltre che la funzione del cordone laterale dello stesso lato anche quella del cordone laterale del lato opposto. Opportune prove all'uopo eseguite (sezione longitudinale del midollo cervicale da C<sub>3</sub> a C<sub>7</sub>) hanno dimostrato che l'incrociamiento delle fibre provenienti dal fascio nervoso decorrente nel cordone anteriore avviene realmente nel midollo cervicale e più precisamente all'altezza dei nuclei motori del nervo frenico, attraverso la commissura anterior.

Sulla presenza nel cordone anteriore del midollo cervicale di fibre nervose capaci di trasportare gli impulsi respiratori abbiamo solamente le notizie di carattere anatomico dovute al Papez che ha descritto, nel gatto, come fascio reticolo spinale mediale, un fascio di fibre non incrociantesi nel midollo (1926) le quali, secondo Gesell, Bricker e Magee (1936) sarebbero percorse da impulsi rilevabili col metodo oscillografico.

Le presenti ricerche offrono la prova fisiologica della esistenza di fibre nervose, capaci di condurre gli impulsi respiratori, decorrenti nella porzione più mediale del cordone anteriore del midollo cervicale, incrociantesi parzialmente (a livello dei nuclei motori del nervo frenico) attraverso la commissura anterior.

*Riassumendo:* I risultati delle presenti ricerche dimostrano che nella zona più mediale del cordone anteriore del midollo cervicale esiste un fascio di fibre nervose il quale è capace di trasportare impulsi respiratori efficaci quando siano stati sezionati ambedue i cordoni laterali del midollo. Se si pratica prima la sezione del cordone laterale di un lato e poi la sezione del cordone laterale del midollo del lato opposto gli impulsi discendono attraverso il cordone anteriore omolaterale alla seconda sezione e agiscono direttamente (*fibre dirette*) sull'emidiaframma corrispondente; se si pratica prima la sezione del cordone laterale di un lato e poi la emisezione del midollo del lato opposto gli impulsi discendono lungo il cordone anteriore appartenente all'emimidollo ove è stata praticata la sezione del solo cordone laterale e agiscono sempre direttamente (*fibre dirette*) sull'emidiaframma corrispondente. La presente indagine ha permesso di rilevare ancora che il fascio nervoso in questione oltre alle fibre dirette possiede anche fibre *crociate* le quali più precisamente incrociano attraverso la commissura anterior del midollo cervicale a livello dei nuclei motori del nervo frenico. Le fibre crociate di questa via nervosa decorrente nel cordone anteriore del midollo cervicale entrerebbero in funzione quando oltre alla emisezione a C<sub>3</sub> del midollo cervicale del lato opposto è stata bloccata, per mezzo della frenicotomia, la via diretta rappresentata dalle fibre (*dirette*) decorrenti nel cordone anteriore le quali arrivano, senza incrociarsi, ai nuclei motori del nervo frenico dello stesso lato.

U. A.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1938 (Anno XVI)*

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

---

**Astronomia.** — *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota III <sup>(1)</sup> del Socio G. ARMELLINI.

1. Come fu detto nelle due prime Note <sup>(2)</sup>, lasciandoci guidare dall'analogia con la propagazione dell'energia luminosa, noi abbiamo supposto che la forza di attrazione  $F$  tra due punti di massa  $m$  ed  $m'$ , sia data dalla formula:

$$(1) \quad F = -f \left( 1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right) \frac{mm'}{r^2}$$

dove  $f$  indica la costante gravitazionale ed  $\varepsilon$  è una seconda costante *positiva* che si suppone estremamente piccola, in modo che l'effetto che ne deriva divenga sensibile solo in intervalli di tempo estremamente lunghi, quali sono appunto quelli considerati dalla Cosmogonia.

Ora, ammessa l'esistenza di questo piccolo termine — che abbiamo chiamato il *termine complementare*, o *termine cosmogonico*, della legge di Newton — abbiamo visto che i principali problemi della Cosmogonia divengono semplici conseguenze meccaniche della stessa legge di Newton così completata. Abbiamo infatti dimostrato che, ammessa la (1):

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1938.

(2) G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XXVI, ser. 6<sup>a</sup>, Nota I, 1937, p. 209; Id., Nota II, vol. XXVII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 609.



- I) Le orbite planetarie tendono a divenire *circolari*;  
 II) I pianeti debbono muoversi intorno al Sole *nello stesso senso* in cui il Sole ruota intorno al proprio asse;  
 III) Le orbite planetarie tendono a divenire *complanari*, e precisamente a disporsi sul piano dell'equatore solare.

Quest'ultimo teorema, che può considerarsi come fondamentale della nostra nuova Cosmogonia matematica, fu però da noi dimostrato con i metodi dell'ordinaria Meccanica Celeste e cioè supponendo implicitamente piccole le eccentricità e le inclinazioni iniziali. Data quindi l'importanza del teorema, crediamo utile di liberarlo da queste restrizioni, dando una nuova dimostrazione interamente diversa e valida *qualunque siano* le condizioni iniziali del moto. Supporremo soltanto (sebbene anche tali restrizioni potrebbero togliersi) che le masse dei pianeti siano piccole rispetto alla massa del Sole e che il diametro del globo solare sia piccolo rispetto alle distanze dei pianeti: precisamente come avviene in realtà.

2. A tale scopo procuriamoci anzi tutto l'equazioni del moto di un corpuscolo materiale P di massa  $m$ , sottomesso all'attrazione di una sfera S, di massa M, che supporremo ruotare intorno a se stessa e composta nel suo interno di strati sferici omogenei; sia O il centro di S.

Prendiamo allora una terna di assi *fissi*, scegliendo per origine O, per asse  $z$  l'asse di rotazione della sfera e per piano  $xy$  il piano dell'equatore. Scegliremo la direzione positiva dell'asse  $z$  in modo che la rotazione appaia positiva per un osservatore collocato lungo l'asse  $z$  con i piedi in O e la testa dal lato positivo; in tal modo, la velocità angolare di rotazione  $\omega$  della sfera S potrà sempre considerarsi come *positiva*. Indichiamo inoltre con  $xy\xi$  le coordinate di P, con  $\xi\eta\zeta$  quelle di un elemento materiale generico Q appartenente alla sfera S e di massa infinitesima  $d\mu$ . Sia inoltre  $r$  la distanza PQ ed R la distanza PO. Per brevità, chiameremo la sfera S col nome di *Sole* ed il corpuscolo P col nome di *pianeta*.

3. Ora l'attrazione, che il Sole esercita su P, si compone dell'ordinaria attrazione newtoniana e di quella dovuta al *termine cosmogonico*. Con facili calcoli, abbiamo allora per la componente X della forza totale che il Sole esercita sul pianeta:

$$(2) \quad X = -f \frac{Mmx}{R^3} - \epsilon f m \int \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{x - \xi}{r} d\mu$$

dove l'integrale al secondo membro va esteso a tutto il globo solare. Analoghe espressioni si hanno per le componenti Y e Z.

Ora si ha immediatamente per la distanza PQ:

$$(3) \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Derivando rispetto al tempo e ricordando che le componenti della velocità dell'elemento di massa  $Q$ , a causa della rotazione solare, sono:

$$(4) \quad \frac{d\xi}{dt} = -\omega\eta \quad ; \quad \frac{d\eta}{dt} = \omega\xi \quad ; \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0$$

otterremo con facili riduzioni, essendo  $\xi^2 + \eta^2$  evidentemente costante:

$$(5) \quad r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + \zeta \frac{d\zeta}{dt} = \xi \frac{dx}{dt} - \eta \frac{dy}{dt} - \zeta \frac{d\zeta}{dt} + \omega(x\eta - y\xi).$$

Ma si ha:

$$(6) \quad R^2 = x^2 + y^2 + \zeta^2$$

e quindi la (5) diviene più semplicemente:

$$(7) \quad r \frac{dr}{dt} = R \frac{dR}{dt} - \xi \frac{dx}{dt} - \eta \frac{dy}{dt} - \zeta \frac{d\zeta}{dt} + \omega(x\eta - y\xi).$$

In conseguenza abbiamo per l'integrale contenuto nella (2):

$$(8) \quad \int \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{x-\xi}{r} d\mu = R \frac{dR}{dt} \left[ x \int \frac{d\mu}{r^4} - \int \xi \frac{d\mu}{r^4} \right] - \\ - x \left( \omega y + \frac{dx}{dt} \right) \int \frac{\xi}{r^4} d\mu + x \left( \omega x - \frac{dy}{dt} \right) \int \frac{\eta}{r^4} d\mu - x \frac{d\zeta}{dt} \int \frac{\zeta}{r^4} d\mu + \\ + \left( \omega y + \frac{dx}{dt} \right) \int \frac{\xi^2}{r^4} d\mu - \left( \omega x - \frac{dy}{dt} \right) \int \frac{\xi\eta}{r^4} d\mu + \frac{d\zeta}{dt} \int \frac{\xi\zeta}{r^4} d\mu.$$

Ma noi abbiamo supposto, per semplicità, che il Sole sia sferico e composto di strati sferici omogenei e che inoltre la distanza del pianeta sia grande rispetto al diametro del globo solare, onde  $r$  sarà sensibilmente eguale ad  $R$ .

Avremo dunque per noti teoremi di Meccanica:

$$(9) \quad \int \frac{d\mu}{r^4} = \frac{1}{R^4} \int d\mu = \frac{M}{R^4}$$

$$(10) \quad \int \xi \frac{d\mu}{r^4} = \frac{1}{R^4} \int \xi d\mu = 0.$$

E così pure si ha:

$$(11) \quad \int \eta \frac{d\mu}{r^4} = \int \zeta \frac{d\mu}{r^4} = \int \xi\eta \frac{d\mu}{r^4} = \int \xi\zeta \frac{d\mu}{r^4} = 0.$$

Analogamente abbiamo:

$$(12) \quad \int \frac{\xi^2}{r^4} d\mu = \frac{1}{R^4} \int \xi^2 d\mu = \frac{C}{2R^4}$$

dove C indica il momento d'inerzia del Sole rispetto ad un asse qualsiasi passante per il suo centro.

La (8) diviene quindi:

$$(13) \quad \int \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{x - \xi}{r} d\mu = \frac{Mx}{R^3} \frac{dR}{dt} + \frac{C}{2R^4} \left( \omega y + \frac{dx}{dt} \right).$$

Ricordando la (2) ed eseguendo calcoli analoghi per le componenti Y e Z, avremo infine per le equazioni del moto del pianeta P:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{Mfx}{R^3} \left( 1 + \varepsilon \frac{dR}{dt} \right) - \frac{\varepsilon fC}{2R^4} \left( \frac{dx}{dt} + \omega y \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{Mfy}{R^3} \left( 1 + \varepsilon \frac{dR}{dt} \right) - \frac{\varepsilon fC}{2R^4} \left( \frac{dy}{dt} - \omega x \right) \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = - \frac{Mf\zeta}{R^3} \left( 1 + \varepsilon \frac{dR}{dt} \right) - \frac{\varepsilon fC}{2R^4} \frac{d\zeta}{dt} \end{cases}$$

4. Dalle (14) possiamo ricavare alcune conseguenze importanti per il nostro scopo ed, a tal fine, chiamiamo con  $A_x$   $A_y$   $A_z$  le componenti, secondo i tre assi, del momento della quantità di moto di P. Avremo dalla Meccanica:

$$(15) \quad \begin{cases} A_x = m \left( y \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{dy}{dt} \right) \\ A_y = m \left( \zeta \frac{dx}{dt} - x \frac{d\zeta}{dt} \right) \\ A_z = m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \end{cases}$$

Ora dalle (14) otteniamo:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{1}{\zeta} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\varepsilon fC}{2R^4} \left[ \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{dt} - \omega \frac{x}{y} \right] \\ \frac{1}{x} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{\varepsilon fC}{2R^4} \left[ \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{dt} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} - \omega \frac{y}{x} \right] \\ \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\varepsilon fC}{2R^4} \left[ \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} + \omega \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right] \end{cases}$$

Da queste ultime equazioni, tenendo presente le (15), abbiamo:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dA_x}{dt} &= -\frac{\varepsilon f C}{2 R^4} [A_x + m\omega x\zeta] \\ \frac{dA_y}{dt} &= -\frac{\varepsilon f C}{2 R^4} [A_y + m\omega y\zeta] \\ \frac{dA_\zeta}{dt} &= -\frac{\varepsilon f C}{2 R^4} [A_\zeta - m\omega (x^2 + y^2)]. \end{aligned} \right.$$

Ovviamente per  $\varepsilon = 0$ , vale a dire per l'ordinaria legge di Newton, i secondi membri si annullano e si riottengono i tre integrali delle aree.

5. Ora indichiamo con  $J$  l'angolo che il vettore  $\widehat{K}$ , rappresentante il momento della quantità di moto di  $P$ , forma con la parte positiva dell'asse  $\zeta$ ; evidentemente, poichè tale vettore è normale al piano dell'orbita istantanea, l'angolo  $J$  rappresenterà pure l'inclinazione del piano dell'orbita stessa col piano  $xy$  e cioè col piano dell'equatore solare. Avremo:

$$(18) \quad \operatorname{tg}^2 J = \frac{A_x^2 + A_y^2}{A_\zeta^2}$$

dove  $\operatorname{tg} J$  ed  $A_\zeta$  hanno sempre lo stesso segno. Infatti, se  $\widehat{K}$  forma un angolo acuto con la parte positiva dell'asse  $\zeta$ , esse sono ambedue positive; altrimenti sono ambedue negative.

Derivando rispetto al tempo la (18) e riducendo, otteniamo:

$$(19) \quad A_\zeta^3 \operatorname{tg} J \sec^2 J \frac{dJ}{dt} = A_\zeta \left( A_x \frac{dA_x}{dt} + A_y \frac{dA_y}{dt} \right) - (A_x^2 + A_y^2) \frac{dA_\zeta}{dt}.$$

Sostituiamo ora nella (19), al posto delle derivate delle componenti del momento, i loro valori dati dalle (17). Avremo:

$$(20) \quad A_\zeta^3 \operatorname{tg} J \sec^2 J \frac{dJ}{dt} = -\frac{\varepsilon f C \omega m}{2 R^4} \left[ \zeta A_\zeta (xA_x + yA_y) + (A_x^2 + A_y^2)(x^2 + y^2) \right].$$

Ora si ha l'identità:

$$(21) \quad xA_x + yA_y + \zeta A_\zeta = 0$$

onde la (20) diviene:

$$(22) \quad A_\zeta^3 \operatorname{tg} J \sec^2 J \frac{dJ}{dt} = -\frac{\varepsilon f C \omega m}{2 R^4} \left[ (A_x^2 + A_y^2)(x^2 + y^2) - \zeta^2 A_\zeta^2 \right].$$

Ma dalla stessa identità (21), abbiamo quadrando:

$$(23) \quad \chi^2 A_z^2 = x^2 A_x^2 + y^2 A_y^2 + 2xy A_x A_y$$

onde infine la (22) si riduce a:

$$(24) \quad A_z^3 \operatorname{tg} J \sec^2 J \frac{dJ}{dt} = - \frac{\varepsilon f C \omega m}{2 R^4} (y A_x - x A_y)^2.$$

Ora, essendo  $\varepsilon$  ed  $\omega$  positivi, il secondo membro di questa equazione è certamente negativo e non può identicamente annullarsi tranne il caso in cui si abbia  $A_x = A_y = 0$ , vale a dire in cui il piano dell'orbita coincida con quello dell'equatore solare. D'altra parte  $\operatorname{tg} J$  ed  $A_z$  sono sempre dello stesso segno; dunque la derivata  $\frac{dJ}{dt}$  sarà sempre negativa.

Supponiamo ora che il pianeta si rivolga intorno al Sole nello stesso senso in cui il Sole ruota intorno al proprio asse; sarà allora  $J < \pi/2$  e quindi  $\operatorname{tg} J$  sarà positiva; in conseguenza l'angolo  $J$  andrà diminuendo finchè l'orbita del pianeta tenderà asintoticamente a disporsi sul piano dell'equatore solare. Se invece il pianeta ruotasse intorno al Sole in senso contrario alla rotazione solare,  $J$  sarebbe inizialmente compreso tra  $\pi/2$  e  $\pi$  ed il piano dell'orbita tenderebbe ancora a disporsi sul piano dell'equatore solare, ma dopo aver eseguito un ribaltamento (cfr. Nota II), onde la rotazione diverrebbe in fine di senso positivo. Ma, come vedemmo nella Nota I, in questo caso il pianeta cadrebbe forse sul Sole prima ancora che tale processo sia compiuto.

È evidente che lo stesso teorema vale per il moto dei satelliti, le cui orbite tenderanno quindi a disporsi sul piano equatoriale dei pianeti da cui dipendono.

6. Ovviamente se  $\omega = 0$ , e cioè se il Sole non ruota,  $J$  resta costante. E poichè in tal caso, si può prendere per piano equatoriale un piano qualsiasi passante per il centro solare, si vede immediatamente che allora l'orbita di  $P$  è piana ed il suo piano si conserva invariabile; come appunto dimostrammo nella Nota II.

Possiamo anzi ritrovare facilmente la formola a cui giungemmo<sup>(1)</sup> nell'ipotesi che l'eccentricità fosse piccolissima e ponendo per semplicità  $R = 1$ . Infatti, in tale ipotesi semplificativa, indicando con  $n$  il moto medio di  $P$ , il suo momento della quantità di moto è  $mn$ . Inoltre, poichè tale vettore è normale al piano dell'orbita, se scegliamo — come facemmo —

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton*. «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XXVII, ser. 6<sup>a</sup>, Nota II, 1938, p. 609.



l'asse  $x$  diretto lungo la linea dei nodi del piano dell'orbita col piano dell'equatore solare, abbiamo:

$$(25) \quad A_x = 0 \quad ; \quad A_y = -mn \sin J \quad ; \quad A_z = mn \cos J \quad ; \quad x = \cos l$$

dove  $l$  è la distanza angolare del pianeta dal nodo. La (24) diviene allora:

$$(26) \quad \frac{dJ}{dt} = - \frac{\varepsilon f C \omega \sin J}{2 n} \cos^2 l.$$

Per trovare ora il valore secolare della derivata di  $J$ , che chiamammo  $\frac{dI}{dt}$ , basta al posto di  $\cos^2 l$  sostituire il suo valor medio; cioè moltiplicare per  $dl$ , integrare tra 0 e  $2\pi$  e dividere per  $2\pi$ . Si ha allora immediatamente:

$$(27) \quad \frac{dI}{dt} = - \frac{\varepsilon f C \omega \sin I}{4 n}$$

che è appunto la formola da noi dimostrata nella passata Nota.

7. Termineremo con un'osservazione. Ammettendo l'esistenza del *termine cosmogonico*, il momento totale della quantità di moto del Sistema Planetario resta costante col tempo — precisamente come con l'ordinaria legge di Newton — giacchè si tratta sempre di forze interne. Esso però tende, per così dire, a passare dal Sole nei pianeti e ciò potrebbe spiegare il fatto — spesso notato dagli astronomi e dai matematici — che nell'odierno Sistema Planetario, mentre la massa risiede in maggioranza nel Sole, il momento della quantità di moto risiede in maggioranza nei pianeti.

Dimostreremo questa proprietà in una futura Nota, dove pure ci occuperemo della rotazione dei pianeti e della forma delle nebulose ellissoidiche extragalattiche.

**Astronomia** (Astronomia teòrica). — *Moti kepleriani e teoria dell'aberrazione annua della luce.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio G. SILVA.

§ 1. — In una recente Memoria <sup>(2)</sup> il prof. Nobile osserva che nella consueta teoria astronomica dell'aberrazione della luce si suole attribuire al Sole il moto uniforme rettilineo che invece spetta al centro di massa del sistema solare, e si viene pertanto ad omettere, senza opportuna giustificazione, la correzione di aberrazione dovuta al moto del Sole intorno al detto centro di massa.

Questa correzione è certamente trascurabile nei calcoli più frequenti dell'astronomia, ma se si considera che, per i casi di stelle più prossime al polo o di ricerche particolarmente precise, sono sviluppati in alcuni trattati astronomici <sup>(3)</sup> anche i termini di secondo ordine dell'aberrazione, dipendenti dal quadrato del rapporto tra la velocità orbitale della Terra e la velocità della luce, o dal prodotto di questo rapporto per quello analogo relativo all'aberrazione secolare, l'osservazione del Nobile va presa in giusta considerazione.

Senonchè la trattazione teorica del problema, quale è fatta dal Nobile, giunge a conclusioni che considerazioni elementari esemplificatrici dimostrano non esatte; ed è facile riconoscere, come mostrerò nel § 4 di questa Nota che l'inesattezza dipende da una schematizzazione del problema che può essere bensì accettata per il calcolo pratico della correzione di aberrazione in questione, ma non per quella trattazione teorica, giacchè in questo secondo caso vengono trascurate grandezze dello stesso ordine di quelle che si ricercano.

Lasciando ad altri la cura di ricercare se e quali lavori siano già stati pubblicati sull'argomento, o di determinare numericamente l'entità di questa correzione di secondo ordine, osserverò ancora che se essa dovesse dare importi di cui sia opportuno in qualche caso tener conto, dovrebbe essere ad essa appaiata la correzione, presumibilmente dello stesso ordine di grandezza, dovuta alle perturbazioni nel moto orbitale della Terra attorno al Sole, giacchè il calcolo dell'aberrazione annua prende per base il moto non per-

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1938.

(2) V. NOBILE, *Preliminari per una necessaria revisione della teoria dell'aberrazione annua. I fondamenti teorici del problema.* « Pont. Ac. Scient. Acta », vol. II, 1938, p. 29.

(3) Ved. ad es.: S. NEWCOMB, *A Compendium of spherical Astronomy.* New York, 1906; W. VALENTINER, *Handwörterbuch der Astronomie*, I Band, Breslau, 1897.

turbato, ed anzi, per l'ordinaria omissione del termine costante dipendente dall'eccentricità dell'orbita terrestre, un moto anche più semplice del kepleriano. A questo proposito desidero premettere anzitutto una dimostrazione diretta assai semplice delle caratteristiche della velocità del moto kepleriano, che sono a base del suddetto calcolo, quale svolgo talvolta nelle mie lezioni di astronomia (§ 2) e di poi un cenno sulle correzioni di aberrazione nei calcoli di orbite e sulla discussione che tali correzioni hanno originato nel recente congresso astronomico, tenutosi a Stoccolma, circa l'omissione dianzi ricordata del termine costante dell'aberrazione annua (§ 3).

§ 2. — Sia  $m_0$  la massa del Sole il cui centro indico con  $S$ ,  $m$  la massa di un corpo celeste  $P$ , che considero puntiforme ed attratto dal Sole secondo la legge di Newton e sieno  $\mathbf{M}$  il versore ed  $r$  il modulo di  $P - S$ . Designando al solito con  $f$  la costante dell'attrazione universale, e con apici le derivazioni rispetto al tempo, abbiamo:

$$(1) \quad P - S = r\mathbf{M}$$

$$(2) \quad (P - S)'' = -\frac{f(m_0 + m)}{r^2} \mathbf{M}$$

d'onde, risultando nullo il prodotto esterno  $(P - S) \wedge (P - S)''$ , l'integrale delle aree

$$(3) \quad (P - S) \wedge (P - S)' = c\mathbf{O}$$

dove  $c$  è il doppio della velocità areolare, che suppongo diversa da zero e positiva, ed  $\mathbf{O}$  è un versore costante.

Nel piano normale ad  $\mathbf{O}$ , in cui avviene dunque il moto, sia  $\vartheta$  l'anomalia del raggio vettore  $SP$  contata nel verso del moto stesso a partire da una direzione invariabile uscente da  $S$ , ed  $\mathbf{N}$  il versore  $\mathbf{O} \wedge \mathbf{M}$  di anomalia  $90^\circ + \vartheta$ .

Osservando che

$$\mathbf{M}' = \vartheta' \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = -\vartheta' \mathbf{M},$$

si ha dalla (1), dalla (3) e dalla (2) successivamente

$$(P - S)' = r' \mathbf{M} + r \vartheta' \mathbf{N}$$

$$r^2 \vartheta' = c$$

$$(P - S)'' = -\frac{f(m_0 + m)}{c} \vartheta' \mathbf{M} = \frac{f(m_0 + m)}{c} \mathbf{N}'$$

l'ultima delle quali, integrata, dà

$$(4) \quad (P - S)' = \frac{f(m_0 + m)}{c} [\mathbf{N} + e\mathbf{Q}]$$

con  $f(m_0 + m)e/c$  modulo e  $\mathbf{Q}$  versore della costante vettoriale d'integrazione.

Quest'ultima integrazione esprime che, fissato come primo estremo del vettore velocità un punto A, l'odografo del moto è un cerchio di raggio  $f(m_0 + m)/c$  e di centro  $A + f(m_0 + m)e\mathbf{Q}/c$ .

Detta  $90 + \vartheta_0$  l'anomalia di  $\mathbf{Q}$ , sostituite nella (3) le espressioni (1) e (4), ne risulta l'eguaglianza dei moduli dei vettori del primo e del secondo membro:

$$\frac{rf(m_0 + m)}{c} [1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0)] = c$$

che, posto

$$(5) \quad p = \frac{c^2}{f(m_0 + m)}, \quad v = \vartheta - \vartheta_0$$

dà l'equazione dell'orbita (ellisse, parabola od iperbole)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

Ne segue che la direzione di  $\mathbf{Q}$ , a cui compete l'anomalia vera  $v = 90^\circ$ , è normale alla direzione perielia.

La (4) esprime dunque che la velocità orbitale è la somma vettoriale di una velocità di grandezza  $c/p$  costante e sempre normale al raggio vettore, e di una velocità di grandezza  $ec/p$  costante e di direzione essa pure invariabile.

Nel caso ellittico, detto T il periodo di rivoluzione ed  $n$  il moto medio  $2\pi/T$ , si ha:

$$(6) \quad p = a(1 - e^2), \quad c = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} = na^2 \sqrt{1 - e^2}$$

e le due velocità, componenti la velocità orbitale, hanno per moduli

$$na(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad nae(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

§ 3. — Per quanto si è ora detto l'aberrazione annua della luce può decomorsi in due parti: una è variabile nel corso dell'anno ed equivale a quella che si avrebbe se la Terra possedesse, sempre in direzione normale al raggio vettore, la velocità costante che le competerebbe qualora la sua orbita fosse un cerchio di raggio  $a(1 - e^2)^{-1/2}$ ; l'altra parte rimane costante per ogni singola stella, come se la Terra si muovesse di moto uniforme sempre in direzione normale alla perielia con una velocità  $1/e$  volte più piccola della precedente.

Il rapporto di queste due velocità alla velocità della luce, ridotto a secondi d'arco moltiplicando per  $206\,264''{.}8$ , vale rispettivamente  $20''{.}47$  (costante della aberrazione annua) e  $0''{.}343$ . Questo secondo valore non sarebbe trascurabile, ma poichè il termine dell'aberrazione che da esso deriva rimane costante per ogni stella, al pari di quello dovuto all'aberrazione secolare, si preferisce lasciarlo incluso nelle posizioni medie che sono date nei cataloghi stellari e nelle effemeridi astronomiche, sicchè per la riduzione al luogo apparente basta tener conto del solo termine variabile dell'aberrazione annua.

Del termine costante avviene talvolta che si debba tener conto nei calcoli d'orbita. Ricordo in proposito che quando trattasi di un corpo celeste del sistema solare (pianeta o cometa) devesi prendere in considerazione il « tempo di aberrazione  $\Delta t$  » che la luce impiega per giungere da esso alla Terra.

Se  $T$  è la posizione della Terra al tempo dell'osservazione,  $C$  la posizione del corpo celeste al tempo  $t - \Delta t$ ,  $V$  la velocità (assoluta) della luce nella direzione  $CT$  in cui si propaga,  $v$  la velocità della Terra, la direzione  $TC'$  è il prolungamento della diagonale (velocità relativa) del parallelogrammo che ha per lati  $V$ ,  $-v$ , sicchè se  $T_1C$  è parallelo a  $TC'$  e  $T_1T$ ,  $CC'$  lo sono a  $v$ , si ha che  $CT = V \cdot \Delta t$ ,  $T_1T = CC' = v \cdot \Delta t$ .

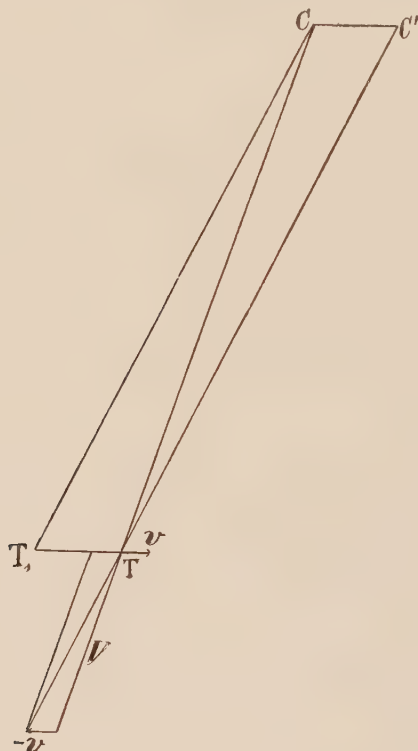
Quando per  $v$  si considera la sola velocità del sistema solare,  $CTC'$  è la deviazione di aberrazione secolare, ma la direzione osservata  $TC'$  è anche la direzione effettiva del corpo celeste al tempo di osservazione, poichè, appartenendo esso al sistema solare, si è trasportato nel tempo  $\Delta t$  da  $C$  in  $C'$ . Dell'aberrazione secolare non è quindi da tener conto in alcun modo.

Quando  $v$  è la velocità annua della Terra, la direzione osservata  $TC'$  coincide con la direzione effettiva  $T_1C$  che congiunge la Terra con il corpo celeste al tempo « ridotto »  $t - \Delta t$ . Quindi se la direzione di  $C$  è dedotta per confronto con una stella, poichè la posizione stellare contiene sempre il termine costante dell'aberrazione annua, basta aggiungere il termine variabile della stessa aberrazione per avere la direzione  $T_1C$  che interessa. È quanto si fa generalmente nel confronto di osservazioni con effemeridi di pianeti e di comete, poichè queste effemeridi danno le direzioni delle rette che congiungono Terra e corpo celeste ad eguali istanti, ed è possibile, conoscendosi la distanza, passare dal tempo  $t$  di osservazione al tempo  $t - \Delta t$  per il quale si deve interpolare nell'effemeride.

Nelle prime determinazioni di orbite di corpi celesti da poco scoperti, non conoscendosi invece quella distanza, si preferisce considerare la direzione  $TC$  non affetta di aberrazione che congiunge la posizione  $T$  della Terra relativa al tempo  $t$  di osservazione con la posizione  $C$  del corpo relativo al tempo (incognito)  $t - \Delta t$ . In tal caso la posizione di quella stella che ha servito di confronto nell'osservazione, dovrebbe essere liberata anche dal termine costante dell'aberrazione annua. In conseguenza della



piccolezza di questo termine, della limitata precisione delle osservazioni e del carattere di approssimazione che hanno sempre le prime determinazioni di orbite, questa riduzione viene di solito omessa. Tuttavia, da questo punto di vista, sarebbe preferibile che le posizioni stellari dei cataloghi venissero liberate da questo piccolo termine costante dell'aberrazione, e sia per questa ragione, sia per ragioni di maggior omogeneità nelle posizioni



stellari, una proposta in questo senso venne avanzata già nel congresso dell'Unione astronomica internazionale, tenutosi a Parigi nel 1935. Nel recente congresso di Stoccolma la questione venne ripresa e risolta negativamente, poichè prevalse la ragione pratica di mantenere invece l'omogeneità fra i numerosissimi cataloghi finora usciti e frequentemente consultati e i cataloghi futuri, onde evitare confusioni e facili errori.

§ 4. — Il moto del Sole intorno al centro di massa dell'intero sistema solare può essere dedotto dalla formola facilmente ricavabile dalla definizione di centro di massa:

$$(7) \quad S - G = - \frac{\sum m_i (P_i - S)}{m_o + \mu}$$

dove  $m_0$  è ancora la massa del Sole,  $m_i$  sono le masse dei singoli pianeti  $P_i$ , e  $\mu$  la somma di queste ultime. Ma il Nobile, affermato ciò, aggiunge che « l'uso diretto ed esclusivo della predetta relazione sarebbe ben poco opportuno in pratica, sia a cagione della insufficienza dei dati relativi al numero e alle masse dei pianeti minori e ultra-plutoniani, sia perchè il procedimento essenzialmente numerico, che verrebbe di necessità ad imporsi, non sarebbe atto a fornire alcuna indicazione sui caratteri generali (geometrici e dinamici) del moto ».

Per desumere tali indicazioni egli ricorre agli integrali classici del moto intorno a  $G$ , sostituendo al sistema reale uno schema convenientemente semplificato e precisamente ammettendo che si possano « trascurare, per un dato intervallo di tempo, le perturbazioni » e si possa quindi « considerare il moto dei pianeti intorno al Sole come un insieme di moti kepleriani ». Con ciò egli giunge alle seguenti conclusioni:

I. *È lecito ritenere che la traiettoria relativa del centro del Sole intorno al centro di massa dell'intero sistema sia piana e percorsa con la legge delle aree.*

II. *La traiettoria relativa del Sole intorno a  $G$  può considerarsi circolare e percorsa con moto uniforme.*

Poichè la teoria vale qualunque sia l'insieme dei pianeti, immaginiamo che, oltre al Sole  $S$ , esistano soltanto due pianeti  $P_1, P_2$ , di masse  $m_1, m_2$ , percorrenti due orbite inclinate tra loro, con periodi non multipli uno dell'altro. Nei successivi passaggi di  $P_2$  attraverso l'intersezione dei due piani (linea dei nodi),  $G$  trovasi sul piano dell'orbita di  $P_1$  ed in posizioni varie di questo piano; viceversa ad ogni passaggio di  $P_1$  alla linea dei nodi,  $G$  trovasi sul piano dell'orbita di  $P_2$ . La traiettoria di  $G$  rispetto ad  $S$ , e quindi di  $S$  rispetto a  $G$ , non può dunque essere piana.

Resta così anche escluso che essa possa essere un circolo; a questa conclusione del resto si oppone un'esemplificazione anche più elementare. Supponiamo le due orbite circolari e complanari, di raggi  $a_1, a_2$ , tali che sia  $m_1 a_1 = m_2 a_2$ . Quando  $P_1$  e  $P_2$  sono in opposizione  $S$  e  $G$  coincidono; quando invece  $P_1$  e  $P_2$  sono in congiunzione il centro di massa  $G$  è sulla medesima congiungente, dalla parte di  $P_1, P_2$ , ad una distanza massima da  $S$ , facilmente valutabile.

La discordanza fra i risultati teorici e questi esempi semplici può essere spiegata nel seguente modo. Indichiamo con  $\mathbf{v}_i$  le velocità dei pianeti  $P_i$  relative al Sole, con  $\mathbf{V}_0$  la velocità di questo relativa al centro  $G$  di massa dell'intero sistema, e con  $\mathbf{K}$  un vettore costante. L'integrale delle aree viene condotto dal Nobile alla forma:

$$(8) \quad \sum_i m_i (P_i - S) \wedge \mathbf{v}_i - (m_0 + \mu) (S - G) \wedge \mathbf{V}_0 = \mathbf{K}$$

e sussiste esattamente quando si considerino i moti perturbati.

Schematizzando il problema ed ammettendo che i moti dei pianeti siano kepleriani, il vettore rappresentato dalla prima somma diviene costante e

quindi deve diventarlo il prodotto vettoriale che costituisce l'ultimo termine del primo membro, d'onde il primo dei due risultati dianzi riportati.

Ma se immaginiamo di scindere le velocità perturbate  $\mathbf{v}_i$  nelle corrispondenti velocità kepleriane  $\mathbf{w}_i$  e nelle velocità residue  $\mathbf{u}_i$  derivanti dalle perturbazioni e poniamo

$$\sum_i m_i (P_i - S) \wedge \mathbf{w}_i = \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K} - \mathbf{K}_1 = \mathbf{k}$$

sarà anche  $\mathbf{k}$  costante e la (8) assumerà la forma:

$$\sum_i m_i (P_i - S) \wedge \mathbf{u}_i - (m_0 + \mu) (S - G) \wedge \mathbf{V}_0 = \mathbf{k}.$$

La schematizzazione suddetta equivale ad ammettere nullo il primo termine e può quindi essere accettata quando si possa affermare che esso è trascurabile rispetto al secondo e quindi rispetto a  $\mathbf{k}$ , che è notevolmente piccolo in confronto di  $\mathbf{K}$ . Ciò non è senz'altro lecito nè in via generale, nè nel caso specifico del sistema solare.

Per il secondo risultato basta analogamente osservare che l'integrale della energia, dopo una prima semplificazione in cui è già stata applicata l'ipotesi fatta sul moto kepleriano dei pianeti intorno al Sole, viene scritto dal Nobile sotto la forma:

$$(m_0 + \mu) V_0^2 = 2f \sum \frac{m_i^2}{\rho_i} - 2f \sum \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}} + H$$

dove le  $\rho_i$  sono le distanze dei pianeti dal Sole, le  $\rho_{ij}$  le distanze dei pianeti tra loro ed  $H$  una costante.

Anche qui, in base alla stessa ipotesi, viene trascurata il secondo membro la seconda sommatoria, che è evidentemente dello stesso ordine di grandezza della prima; questa prima sommatoria può bensì ritenersi approssimativamente costante, ma non quella seconda, sicchè la soppressione toglie valore alla conclusione che ne deriva.

Seguendo invece la prima via indicata dal Nobile, derivando la (7), si ha

$$\mathbf{V}_0 = - \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}_i}{m_0 + \mu}.$$

Con notazioni analoghe a quelle del § 2, ne risulta per la (4), tenuto conto delle notazioni (5) e (6),

$$\mathbf{V}_0 = - \sum_i \frac{m_i}{m_0 + \mu} n_i a_i (1 - e_i^2)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{N}_i + e_i \mathbf{Q}_i).$$

Potremo qui trascurare i termini che hanno insieme a fattore  $e_i$  ed il rapporto  $m_i/(m_0 + \mu)$ , tanto più che quelli contenenti i fattori  $Q_i$  sono invariabili con il tempo. Scriveremo quindi più semplicemente:

$$V_0 = - \sum_i \frac{m_i}{m_0 + \mu} n_i a_i N_i.$$

Per il calcolo dell'aberrazione della luce dipendente dal moto del Sole intorno al centro di massa  $G$  sarebbero pertanto da calcolare tanti termini quanti sono i pianeti (Terra compresa), ogni termine dipendendo dalla velocità orbitale circolare del corrispondente pianeta, ridotta secondo il rapporto  $m_i/(m_0 + \mu)$ . E, per le piccole inclinazioni delle orbite planetarie, sarebbe lecito considerare queste velocità giacenti sul piano dell'eclittica, con che il calcolo diverrebbe assai facile e breve.

Ma anche la questione pratica sollevata dal Nobile circa l'aberrazione annua della luce non potrebbe esaurirsi con questo calcolo; occorrerebbe altresì conoscere per la Terra la velocità

$$u = v - u'$$

differenza fra la velocità effettiva e quella kepleriana, comprendente in particolare la velocità del moto della Terra intorno al centro di massa Terra-Luna.

I dati contenuti nelle effemeridi astronomiche permetterebbero certamente di calcolare numericamente  $u$ , istante per istante, ma il calcolo riuscirebbe lungo e tedioso, e, almeno per un'indagine circa i massimi valori che la velocità  $u$  potrebbe raggiungere, sarebbe interessante arrivare ad indicazioni quantitative per via teorica.

**Fisica.** — *Ulteriori ricerche sull'azione della luce su sottili lamine metalliche.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio Q. MAJORANA.

Si espongono talune ricerche sperimentali che fanno seguito a quelle su cui ho riferito in altre otto Note precedenti <sup>(2)</sup>. L'azione della luce, di solito periodicamente interrotta, su lamine metalliche sottili, forma oggetto di tali Note. Nel lungo periodo sperimentale da me dedicato a queste ricerche, ho rilevato la dipendenza degli effetti osservati, da numerose circostanze. Esse sono: la natura e lo spessore del metallo costituente la lamina; il modo di fissare questa su di un supporto isolante (vetro, quarzo, ebanite ecc.), mediante sostanza adesiva; oppure generarla sul supporto stesso, mediante precipitazione chimica, termica, meccanica o catodica; il far scorrere sull'altra faccia della lamina, fissata come ora si è detto, dell'acqua od un gas a più o meno grande velocità; l'adoperare la lamina senza alcun supporto (all'infuori dei suoi estremi) immersa in un gas (aria od idrogeno), oppure nel vuoto; ed infine, il mutare della natura e della intensità della sorgente di radiazioni, e della frequenza di interruzione di queste.

L'esame sperimentale completo della influenza di tutte queste circostanze, che possono essere mutate ciascuna dentro limiti assai estesi, sarebbe evidentemente assai lungo ed in certi casi poco conclusivo. Comunque, ho dato a suo tempo notizia dei risultati ottenuti sperimentando in talune delle condizioni su elencate. Più recentemente, nel continuare tali ricerche, ne ho ristretto il campo, scegliendo certe particolari condizioni tipiche, che più semplicemente possano essere controllabili *a priori* e facilmente riprodotte. In osservanza di tale criterio, le ricerche a cui accennerò in questa Nota ed in altre successive, sono state eseguite adoperando esclusivamente lamine di puro oro metallico, fissate, nei modi che saranno ora detti, su vetro. La scelta dell'oro, tra tutti i metalli che variamente mostrano l'effetto che si studia, è stata fatta in conseguenza delle sue caratteristiche di inalterabilità e di facilità di depositarsi catodicamente.

Queste lamine d'oro, se preparate a parte dalle lastrine di vetro su cui poi vengono fissate, sono state fabbricate da una Ditta specializzata, col solito processo della battitura; ed arrestando questa operazione, a spessori diversi dal solito. Più propriamente, questo spessore è risultato anche sedici volte maggiore di quello che comunemente viene scelto o raggiunto

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1938.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XVI, pp. 82, 172, 548; vol. XVII, p. 255; vol. XVIII, pp. 184, 260, 348, 433.



nella preparazione delle comuni foglie d'oro del commercio; e cioè di circa due micron. Lo spessore di tali lamine è così variato fra 0,8 e 1,6 micron. L'oro impiegato dalla suddetta Ditta in tale operazione è stato di assoluta purezza, ed i congegni necessari, ripuliti dalle tracce di precedenti preparazioni. Le lamine d'oro di detta provenienza, vengono fissate sulle lastrine di vetro delle dimensioni già indicate, di cmq.  $7 \times 0,7$  di superficie, e di cm. 0,3 di spessore.

In un altro gruppo di ricerche, ho adoperato lastrine di vetro delle dimensioni ora richiamate, ricoperte di uno strato di oro puro, ottenuto per precipitazione catodica. Per la natura stessa dell'operazione, si comprende che questa volta lo spessore possa essere regolato facilmente dentro limiti più discosti; e cioè, fra 0,04 e 4 micron, circa. Occorre però procedere in simile preparazione con qualche cautela, se si vogliono ottenere lamine d'oro presentanti aspetto superficiale costante ed uniforme, nei vari casi. Difatti, dipendentemente dalle condizioni in cui si è svolto il passaggio della scarica elettrica, può l'oro apparire con colorazioni o tinte diverse. Soprattutto, occorre evitare che sotto la campana pneumatica in cui avviene la scarica, vi sieno tracce di vapori organici (dovuti ai grassi impiegati per le tenute). Tali tracce possono dar luogo a depositi nerastri, dovuti probabilmente alla presenza di carbonio. E alle diverse condizioni superficiali dello strato, corrispondono valori diversi dei coefficienti di assorbimento di esso per le varie lunghezze d'onda (di solito maggiori per le più grandi). Ciò può falsare i confronti dei vari risultati sperimentali.

Lo spessore delle singole lamine viene determinato alla bilancia. Ciò si fa per pesata diretta, se si tratta di lamine preventivamente staccate dal vetro; cioè di quelle che poi vengono su di esso in qualche modo incollate. Per il caso delle lamine catodiche, si pesa la lastrina di vetro prima e dopo la precipitazione catodica.

Tali lamine d'oro ottenute con uno dei metodi descritti (e che diremo *incollate* oppure *catodiche*), vengono fornite di elettrodi metallici ai loro estremi, guarniti di stagnola e serrati con viti. Esse, se a turno, venissero inserite, insieme con una f. e. m. B<sup>(1)</sup>, nel circuito del trasformatore d'entrata T, dell'amplificatore termoionico A, darebbero luogo ad effetti non facilmente confrontabili, in causa della loro diversa resistenza elettrica, dovuta ai loro differenti spessori<sup>(2)</sup>. Per evitare tale inconveniente, la resistenza elettrica della lamina già fissata o generata sul rispettivo supporto di vetro, viene preventivamente riportata, per tutti gli spessori, al valore che essa presenta nel caso delle lamine più sottili ottenute (0,4 micron). Tale resistenza è di circa 15 ohm. A ciò si procede, mediante tagli praticati sulla superficie

(1) Ved. fig. a p. 261 del vol. XVIII di questi « Rendiconti ».

(2) Incidentalmente noto, che, anche trattandosi di spessori di qualche micron, non si ha esatta proporzionalità inversa, tra lo spessore e la resistenza della lamina.

di ciascuna lamina, come è indicato nella fig. 1. La distanza ed il numero di questi tagli vengono con una certa approssimazione determinati, mediante un semplice calcolo preventivo. La fig. 1 indica l'aspetto che presenta una lamina d'oro di circa 0,7 micron di spessore fissata su di una lastrina di vetro delle dette dimensioni, e che è stata portata alla resistenza prefissata di 15 ohm. Nel caso di lamine catodiche di un certo spessore, tali tagli sono stati ottenuti ponendo dinanzi alla lamina di vetro, che riceve la proiezione catodica, una mascherina sostenente tratti di sottili fili metallici, che colla loro *ombra*, generano mancanza di proiezione, là dove si vuol tagliare la lamina. Tale artificio è assolutamente necessario per spessori già appena superiori a circa 0,5 micron, per i quali un taglio meccanico, ne provocherebbe lo strappo totale.



Fig. 1.

Il dispositivo usato in connessione con tali lamine corrisponde allo schema già riportato e descritto nella stessa Nota citata. In esso sono stati introdotti, negli ultimi tempi, notevoli perfezionamenti costruttivi. Esso è rappresentato, nel suo insieme, nella fig. 2. D è un disco ruotante di *elektron* di cm. 50 di diametro, fornito, verso la periferia, di 48 tagli radiali. La larghezza dei tagli è uguale a quella dei *pieni*. Con ciò, la luce di una lampada L (che può essere ad incandescenza oppure a mercurio ed in quarzo, di potenza regolabile sino a circa 900 e 300 watt, rispettivamente), arriva periodicamente su di una lastrina di vetro comune M, sostenente la lamina metallica (in queste esperienze, di oro), preparata in uno dei modi a cui si è accennato. La velocità di rotazione del disco è regolata, in queste ricerche, in modo da generare, di solito, una frequenza di interruzione del raggio luminoso di 600 oppure di 1200 periodi a secondo. Mediante un congegno a forza centrifuga KK', sostenuto da una staffa S, ed un indice I scorrente sulla graduazione T, è possibile controllare in ogni caso il valore e la costanza di tale frequenza; C è una cellula fotoelettrica al potassio nel vuoto; L' è una lampada sussidiaria ad incandescenza, ad intensità regolabile, che illumina C, attraverso il bordo a tagli del disco girante D. La cellula C e la lampada L' sono portate da un braccio NN' calettato sull'asse di rotazione del disco, che può venire spostato angolarmente intorno a questo, mediante una vite micrometrica V, che porta un indice scorrente su di un cerchio orizzontale graduato B. La posizione angolare, relativa, fra i due sistemi lampada L - lastrina M e lampada L' - cellula C, può essere individuata mediante letture sul settore graduato HG (avente il centro

sull'asse del disco) e sul cerchio B. Speciali protezioni, non riprodotte nella figura, impediscono, alle correnti d'aria generate dal disco ruotante, di agire su M. L'apparecchio è connesso con gli altri accessori indicati nello schema di compensatore, già precedentemente pubblicato. Esso realizza così la formazione, l'amplificazione e la compensazione della corrente pulsante, che caratterizza l'effetto di cui è questione.

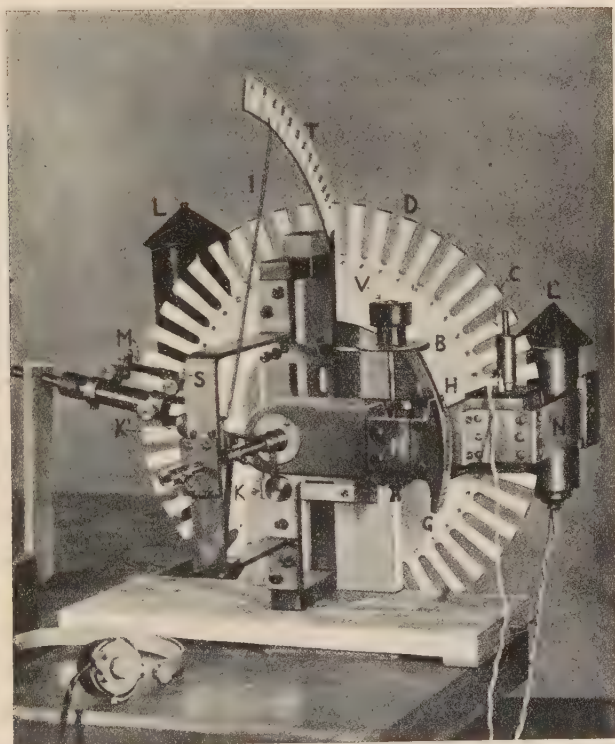


Fig. 2.

Circa l'uso di tale compensatore a cellula fotoelettrica, mi riferisco a quanto precedentemente è stato specificato <sup>(1)</sup>. Avverto inoltre che, a differenza di quanto è indicato nello schema richiamato, mi sono servito a turno delle due lampade ad incandescenza od a mercurio, ponendole semplicemente col loro cratere luminoso a circa cm. 20 di distanza dal disco ruotante; e ciò senza fare uso di alcuna lente (di vetro o di quarzo), come avveniva nelle prime mie esperienze. Con ciò, si raggiunge una più uniforme illuminazione della lamina, ed una maggiore costanza di essa, nelle varie esperienze.

(1) Loc. cit., pp. 261-265.

Il descritto dispositivo permette di determinare, come si disse, il valore di  $\Delta r/r$  (variazione massima della resistenza elettrica della lamina) e lo spostamento di fase  $\varphi$ , tra la pulsazione della luce e quella della resistenza elettrica. La grandezza  $\Delta r/r$  è uguale, come fu visto, al rapporto tra i massimi delle due correnti elettriche (a compensazione avvenuta) che circolano nella cellula fotoelettrica e nella lamina metallica. Tale grandezza dà, col suo valore, la misura dell'effetto. E come ho detto in precedenza, è da ammettersi che tale effetto debba, se mai, essere di natura promiscua: termico e fotoelettrico di nuova natura. In linea di orientamento, se ammettiamo che il comune effetto termico abbia la predominanza, si comprende che il fenomeno che si osserva dipenda da un certo numero di parametri: energia termica assorbita dalla lamina, sotto l'azione delle radiazioni, spessore di questa, caratteristiche termiche e di irraggiamento del metallo adoperato, natura e spessore del supporto isolante (in generale di vetro), coefficiente termico della resistività del metallo, ed infine, frequenza di interruzione del raggio, luminoso. Uno studio teorico per la determinazione di  $\Delta r/r$ , la quale grandezza si suppone dipendere esclusivamente da un semplice effetto termico inquadrabile nelle teorie fisiche classiche, sarà riportato in una prossima Nota. Ma sin d'ora osservo che sarebbe ben difficile controllare sperimentalmente i risultati di esso, data la complicazione del problema.

Più semplici appaiono questi controlli, quando ci si accontenti di determinare i valori di  $\varphi$ . L'esperienza fa vedere infatti, che, in prima indagine e con buona approssimazione (in confronto degli inevitabili errori od incertezze di osservazione), questa grandezza è indipendente da taluni parametri, compresi tra quelli su elencati. Risulta infatti, che, scelta una determinata sorgente di radiazioni, il valore di  $\varphi$  è indipendente dalla intensità della sorgente stessa. Ciò può verificarsi sia diminuendo il valore della corrente elettrica che la anima, sia allontanandola progressivamente dal disco ruotante.

Questa conclusione coincide per vero, con quella che si può trarre dallo studio teorico-termico preannunziato che esporrò in seguito. Da ciò potrebbe trarsi forse qualche argomento, per la sua immediata applicabilità alle attuali ricerche. Ma talune caratteristiche dei fatti constatati, non sono per nulla prevedibili, quali conseguenze dello studio in parola. Così, quando si sperimenti con lamine d'oro abbastanza sottili (di circa un dedimo di micron), l'uso di lampade di diversa natura dà luogo a valori di  $\varphi$  sensibilmente e sicuramente differenti. Tal differenza scompare del tutto, quando a parità delle altre condizioni, si aumenti solo lo spessore della lamina. In altri termini, al di là dello spessore per cui vi ha ancora una traccia di trasparenza ottica, le azioni di sorgenti di differente natura appaiono sensibilmente identiche.

Su tali risultati mi riservo di riferire più particolarmente in una prossima Nota.



**Fisica.** — *Azione della luce periodica su sottili lamine d'oro.*  
Nota <sup>(1)</sup> del Socio Q. MAJORANA.

Riferisco sui risultati ottenuti sperimentando nel modo esposto nella Nota precedente <sup>(2)</sup>, con sottili lamine d'oro. Queste sono state preparate fissandole con un adesivo su vetro, oppure generandole su tale supporto, mediante precipitazione catodica. Nei due casi, l'effetto constatabile, quando un raggio di luce periodica colpisce la lamina, è sensibilmente diverso. Ciò può rilevarsi già, mediante semplice ascoltazione al telefono dell'amplificatore, e senza bisogno di ricorrere a vere misure quantitative. A parità di altre condizioni, le lamine *incollate* danno un suono notevolmente più intenso che non le lamine *catodiche*. Questo fatto dimostra che il  $\Delta r/r$  è maggiore nel caso delle prime.

Un indizio, che spieghi tale diversità, si ha sperimentando, sempre a parità di altre condizioni, con lamine d'oro libere nell'aria, ma convenientemente fissate ai loro estremi su due elettrodi rigidi metallici. Il suono al telefono è ancora più forte; è massimo poi, se si sperimenta nel vuoto; alquanto più debole nell'idrogeno. Mediante il compensatore, si può ogni volta far sparire il suono al telefono, e determinare, come già si disse, il valore di  $\Delta r/r$ . Questo può arrivare persino a circa  $10^{-4}$ , nei casi più favorevoli, ora citati. Sebbene l'osservazione sistematica di tali valori non abbia grande importanza, in quanto si tratta di risultati corrispondenti alle numerose e svariate circostanze dell'esperimento (difficilmente controllabili tutte con esattezza), pure, le accennate osservazioni danno un sicuro indizio, circa la causa della diversità dei valori stessi. Essa, evidentemente, risiede nella diversa dispersione del calore da parte della lamina, dipendentemente dalle sue condizioni di isolamento termico, mutevoli da caso a caso. L'effetto udibile al telefono è massimo in un gas, o meglio nel vuoto, perchè così la lamina stenta a perdere il calore, fornitole dalle radiazioni, che essa ha assorbito. È piccolo, nel caso della lamina catodica (su vetro); è ancora minore se al vetro si sostituisce il quarzo. E nel caso delle lamine incollate, l'effetto ha valore intermedio; pur dovendosi ritenere che la capacità termica della materia adesiva sia praticamente nulla. Ma la conducibilità termica di tale strato, ossia quella tra metallo e vetro, è certamente più piccola di quella che si ha nel caso delle lamine catodiche, e maggiore di quella tra

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1938.

(2) Questi « Rendiconti », p. 132.



lamina libera e gas ambiente<sup>(1)</sup> o vuoto (in quest'ultimo caso, si tratta evidentemente di solo irraggiamento).

Per le lamine catodiche, è da ritenere che la conducibilità termica tra metallo e vetro, sia praticamente infinita, essendo assai intimo il contatto fra queste due sostanze; mentre essa può essere scarsa ma non nulla, nel caso delle lamine incollate. Se si tratta di lamine libere nell'aria o meglio nel vuoto, la conducibilità si avvicina a zero; ma in realtà essa non è mai nulla, in conseguenza dei fenomeni di irraggiamento.

Tutto ciò è conforme, come si è premesso, alle comuni vedute classiche della conduzione del calore; e, secondo quanto ho già annunziato nella Nota prededente, mi riservo di esporre al riguardo una particolare trattazione teorica, che tenga conto delle circostanze ora prospettate. L'effetto puramente termico è massimo, dunque, quando è massimo l'isolamento termico della lamina: ciò corrisponde al caso della lamina immersa in un gas o nel vuoto. In tale caso, gli scarti che possono essere osservati tra una previsione teorico-termica ed i fatti, debbono essere del tutto insensibili. Se si vuole osservare e studiare il nuovo effetto, si deve dare alla lamina una conducibilità calorifica esterna notevole<sup>(2)</sup>. Fu questo il criterio che mi aveva guidato altra volta, nell'immergere la lamina metallica in acqua ferma od in moto. Ma le particolari difficoltà di questo artificio, che per vero ho potuto sperimentare solo con vetri platinati a fuoco, me ne hanno fatto abbandonare l'uso.

È anche per queste ragioni, che ho limitato lo studio del valore di  $\varphi$ , che ora si espone, a lamine d'oro incollate o precipitate catodicamente su vetro, immerse nell'aria ambiente in quiete. Sui risultati così ottenuti passo ora a riferire.

*Lamine incollate.* — Gli spessori di queste lamine variano tra 0.08 e 1.4  $\mu$ . Il modo di fissarle su vetro conferisce ad esse caratteristiche termiche alquanto incerte, dipendentemente dallo spessore e dallo stato di essiccazione dell'adesivo adoperato. È impossibile controllare *a priori*, tali condizioni, ed occorre osservare i valori di  $\varphi$ , caso per caso.

Sperimentando indifferentemente con le due lampade ad incandescenza od a mercurio, si può dire, in generale, che  $\varphi$  varia tra un massimo di 42° ed un minimo, che può scendere eccezionalmente sino a circa 16°. I maggiori valori di  $\varphi$  si hanno per lamine alquanto spesse (1.4  $\mu$ ); i più piccoli per le più sottili (0.8  $\mu$ ). Ma non è solo lo spessore della lamina, che

(1) Qui, per *conducibilità*, si intende una grandezza *sui generis*, dipendente dai tre fatti concomitanti: conduzione, convezione, irraggiamento.

(2) A. ETZRODT ha ripetuto le mie esperienze («Phys. Zeitschr.», V, 36, pp. 433-441, 1935) facendo agire *nel vuoto*, della luce periodicamente interrotta, su fili di bismuto o di costantana. Da quanto si è detto, risulta che questa non è la disposizione più opportuna, per osservare tutti i fatti da me annunziati.

influisce sul valore di  $\varphi$ . Una stessa lamina incollata, dà luogo, in generale, a valori di  $\varphi$  più piccoli, appena preparata; col tempo, tale valore va di solito sensibilmente crescendo, per stabilizzarsi dopo qualche settimana. Così, detto valore di circa  $16^\circ$  fu constatato una volta, per una lamina incollata di fresco, di  $0.08\mu$ . Ma già dopo tre giorni, esso era salito a  $20^\circ$ ; dopo un mese finì per stabilizzarsi intorno a  $35^\circ$ .

Un attento esame di tali fatti me ne ha dato la spiegazione, applicando, anche ora, i semplici principi della propagazione del calore. Lo strato adesivo, specialmente se ha per solvente l'acqua, va essiccandosi col tempo. Appena preparata la lamina è isolata termicamente dal suo supporto alquanto di più, in causa della cattiva conducibilità termica dell'acqua; e ciò, come sarà dimostrato teoricamente, dà luogo a diminuzione dei valori di  $\varphi$ . Un altro risultato della teoria, dice che, tanto per grande conducibilità termica (fra metallo e vetro), che per piccolissima, il valore di  $\varphi$  è superiore a  $45^\circ$ . Si deduce da tutto ciò, che deve esistere un certo valore critico di tale conducibilità, intermedio, a cui debba corrispondere un minimo di  $\varphi$ . Il valore trovato nel citato caso, di  $16^\circ$ , deve essere stato prossimo a tale minimo, quantunque il completo controllo sperimentale di questa conclusione, non sia, per le accennate ragioni, possibile. Se la lamina ha spessori più forti, p. es. di  $1.4\mu$ , i fatti descritti possono ancora presentarsi; ma si hanno valori di  $\varphi$  alquanto superiori. Si tornerà in seguito a discutere questi risultati.

Si è detto, che quanto precede può venire osservato adoperando indifferentemente, una delle due lampade: ad incandescenza od a mercurio. Ciò avviene, se ci si limita a tener conto dell'andamento generale dei valori di  $\varphi$  in relazione con lo spessore e col modo di fissaggio della lamina sul vetro. Se ora si fa un preciso raffronto, sperimentando a turno immediato con le due lampade, si possono rilevare delle sensibili differenze. E più precisamente, si osserva che  $\varphi$  è più piccolo, quando la lamina è illuminata dalla luce periodica, proveniente dalla lampada a mercurio, anzichè ad incandescenza. Così, con la particolare lamina di  $0.08\mu$ , di cui si è già detto, si sono rilevati i seguenti valori, in epoche differenti, dopo la sua preparazione:

	Lamp. a mercurio	Lamp. ad incandescenza
appena preparata . . .	$16^\circ$	$16^\circ 20'$
dopo 3 giorni . . .	$20^\circ$	$20^\circ 40'$
» 15 » . . .	$32^\circ 40'$	$33^\circ 40'$
» un mese ed oltre	$35^\circ$	$36^\circ 20'$

Questa differenza di azione delle due lampade, è meno accentuata per lamine più spesse, e sparisce per spessori superiori a circa  $0.5\mu$ .

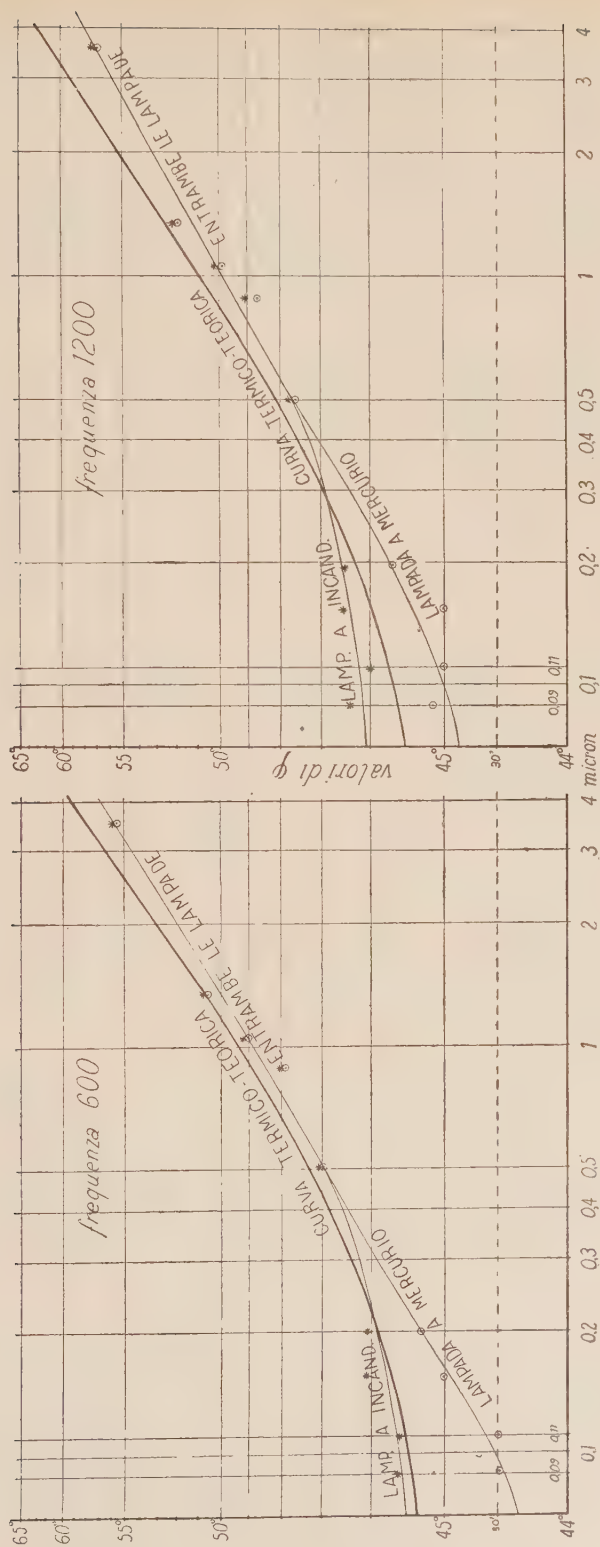
Tali ultimi fatti non trovano naturalmente alcuna spiegazione, nella pura teoria termica. Essi danno ancora una volta il chiaro indizio dell'esistenza di un fatto fotoelettrico di nuova natura.

Con tutto ciò, la complicazione dei fatti osservabili usando lamine incollate è tale, da sconsigliarne un'indagine sperimentale più approfondita. Del resto, con le ricerche, relativamente più semplici di cui ora sarà detto, si avrà una più precisa conferma dell'accennato indizio.

*Lamine catodiche.* — Meno complicati sono i fatti osservabili usando queste lamine. Per esse, come già si è detto, può ammettersi che la conducibilità termica fra oro e vetro sia praticamente infinita. È inoltre possibile variare a piacere, lo spessore delle lamine. Questo è risultato per nove lamine impiegate, rispettivamente di micron: 0.09, 0.11, 0.15, 0.20, 0.50, 0.88, 1.04, 1.34, 3.55. Tali lamine sono state ottenute mediante scariche catodiche, di durate variabili, tra una ventina di minuti primi ed otto ore, circa. Si è avuto cura, come si disse, che l'andamento di tale operazione fosse il più uniforme possibile. Per ciascuna lamina, è stato osservato replicatamente, durante un periodo complessivo di tempo di più mesi, il valore di  $\varphi$ , corrispondente all'uso a turno, delle due lampade e delle due frequenze 600 e 1200. Si sono avuti così, per ogni lamina, 4 valori di  $\varphi$ , corrispondenti ciascuno alla media di un certo numero (5 a 10) di osservazioni, fatte in tempi diversi. Per brevità, mi limito a riportare tali medie, nei diagrammi della figura, riferentisi alle frequenze 600 e 1200. Per ciascuna di tali frequenze, si hanno due curve, che si riferiscono a turno, all'impiego delle due sorgenti di radiazione. Queste curve sono state segnate, riportando in iscale logaritmiche: in ascisse gli spessori delle lamine espresse in micron; ed in ordinate i valori di  $\varphi$ , espressi in gradi d'arco, ma diminuiti di  $43^\circ$ . Per quanto le osservazioni diano luogo a punti, in generale non situati sulle curve tracciate, non v'ha dubbio alcuno sull'andamento reciproco di queste. Nella figura, insieme con le curve sperimentali, se ne sono segnate altre due a tratto più grosso: una per ciascuna delle frequenze 600 e 1200. Esse sono state ottenute, applicando la teoria classica della propagazione del calore, come sarà fatto in seguito; e corrispondono perciò all'ipotesi di un puro fenomeno termico. Esse, inoltre, risultano asintotiche, per spessori evanescenti delle lamine, a rette parallele all'asse delle ascisse e di ordinata  $45^\circ$ . L'impiego delle scale logaritmiche mette in maggior risalto gli scarti delle curve osservate, da quelle teoriche, per piccoli spessori delle lamine. Dall'esame di tutti questi diagrammi si deduce:

a) I valori sperimentali e quelli teorici-termici di  $\varphi$  sono prossimi a  $45^\circ$ , per lamine sottili; raggiungono i  $60^\circ$  circa per lamine dell'ordine di  $4\mu$ . Sono alquanto maggiori per la frequenza più alta.

b) Per ciascuna frequenza, i valori sperimentali di  $\varphi$  coincidono sensibilmente, quando lo spessore della lamina superi circa  $0.5\mu$ , adoperando a turno le due lampade.



Diagrammi dei valori dello spostamento di fase  $\varphi$  in funzione dello spessore della lamina.

c) Per ciascuna frequenza, un sensibile scarto si ha nei diagrammi di  $\varphi$ , al disotto di  $0.5 \mu$ . La lampada a mercurio genera un effetto caratterizzato da valori di  $\varphi$  più bassi per circa  $1^\circ$ . Tale scarto è massimo, per gli spessori minimi.

d) I diagrammi sperimentali si scostano sensibilmente da quelli teorici termici. Per i piccoli spessori e per ciascuna frequenza, essi sono intermedi, fra quelli sperimentali delle due lampade. Per grandi spessori, essi si svolgono nettamente al disopra, con uno scarto che può arrivare a circa  $5^\circ$ .

Questi risultati confermano la influenza della natura della radiazione sulla misura dell'effetto. Ulteriori considerazioni saranno svolte, dopo che sarà stato esposto lo studio teorico della pura ipotesi termica, che anche qui non appare sufficiente, a spiegare tutte le modalità dei fatti osservati.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Geometria.** — *Un'osservazione sui complessi lineari di spazi.*  
Nota <sup>(1)</sup> di G. GHERARDELLI, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. Un complesso lineare di spazi  $[k]$  di  $S_r$  ( $k < r$ ) è definito da una equazione lineare omogenea nelle  $\binom{r+1}{k+1}$  coordinate grassmanniane di  $[k]$ ; sulla varietà  $V$  di Grassmann di indici  $(r, k)$ , che rappresenta birazionalmente senza eccezione i  $[k]$  di  $S_r$ , i complessi lineari di  $[k]$  hanno per immagini le sezioni iperpiane. Scopo di questo brevissimo scritto è la caratterizzazione geometrica delle sezioni iperpiane di  $V$  corrispondenti ai complessi lineari speciali <sup>(2)</sup>.

2. Sieno:  $C$  un complesso lineare di  $[k]$  in  $S_r$ ;  $\gamma$  l'iperpiano immagine di  $C$  nello spazio di  $V$ ;  $\alpha$  un  $[k]$  di  $C$ ;  $A$  il punto immagine di  $\alpha$  su  $V$ . Si supponga poi:  $k \leq r - k - 1$ , ciò che non implica restrizione.

Se  $\alpha$  è  $\rho$ -plo per  $C$ , l'iperpiano  $\gamma$  contiene lo spazio  $\rho$ -tangente in  $A$  a  $V$  e quindi gli spazi  $S_{\rho-1}$  osculatori in  $A$  alle curve  $\Gamma^{\rho-1}$  razionali normali di  $V$  uscenti da  $A$  e perciò queste curve stesse. Ora alle curve

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1938.

(2) Cfr. F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare*. « Annali di Matematica », ser. 3<sup>a</sup>, to. 24, 1915, p. 89. Ved. in particolare il n. 2, p. 94; C. SEGRE, *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni*. « Annali di Matematica », ser. 3<sup>a</sup>, to. 27, 1918, p. 75. Ved. in particolare il n. 41, p. 107.



$\Gamma^{e-1}$  di  $V$  uscenti da  $A$  corrispondono in  $S_r$  varietà  $S_k - V_{k+1}^{e-1}$  razionali normali appartenenti a spazi  $[k + \rho - 1]$ ; se  $k + \rho - 1 > 2k$  e perciò  $\rho > k + 1$  due  $S_k$  di una  $S_k - V_{k+1}^{e-1}$  sono sghembi e allora  $C$ , contenendo ogni  $S_k - V_{k+1}^{e-1}$  per  $\alpha$ , verrebbe a contenere tutti i  $[k]$  di  $S_r$ : sarebbe indeterminato. Avremo pertanto:  $\rho \leq k + 1$ . Si conclude:

*Un complesso lineare di  $[k]$  non contiene spazi  $[k]$  di molteplicità superiore a  $k + 1$  <sup>(1)</sup>; affinché un  $[k]$  del complesso sia  $\rho$ -plo ( $\rho \leq k + 1$ ) occorre e basta che appartengano al complesso i  $[k]$  di  $S_r$  che lo incontrano secondo  $[k - \rho + 1]$ .*

3. Il complesso  $C$  sia ora *speciale*, cioè costituito dai  $[k]$  di  $S_r$  incidenti ad un  $[r - k - 1]$  fisso. Gli spazi  $[k]$  contenuti nello  $[r - k - 1]$  sono  $(k + 1)$ -pli per  $C$ ; viceversa, se questo avviene,  $C$  è speciale.

Sulla grassmanniana  $V$  si consideri la grassmanniana  $V'$  di indici  $(r - k - 1, k)$  che rappresenta i  $[k]$  di  $[r - k - 1]$ ; gli spazi  $(k + 1)$ -tangenti a  $V$  nei punti di  $V'$  appartengono ad un iperpiano che potremo dire  $(k + 1)$ -tangente a  $V$  lungo  $V'$ : questo iperpiano è l'immagine del complesso speciale  $C$ .

Pertanto:

*Sulla varietà  $V$  di Grassmann di indici  $(r, k)$ , che rappresenta i  $[k]$  di  $S_r$ , i complessi lineari speciali di  $[k]$  hanno per immagini gli iperpiani  $(k + 1)$ -tangenti a  $V$  lungo grassmanniane subordinate di indici  $(r - k - 1, k)$ .*

(1) La varietà  $V$  ammette solo spazi  $2-, 3-, \dots, (k + 1)$ -tangenti.

**Matematica.** — *Sulle funzioni univalenti dispari nel cerchio unitario.* Nota <sup>(1)</sup> di A. ROSENBLATT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Consideriamo la serie di potenze dispari

$$(1) \quad f(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots$$

univalente nel cerchio unità, e poniamo coi sigg. Szegő e Grandjot

$$(2) \quad g(z) = \left\{ f\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = z + \frac{b_3}{z^3} + \frac{b_7}{z^7} + \dots$$

Sussiste la disuguaglianza

$$(3) \quad \sum_1^{\infty} (4n-1) |b_{4n-1}|^2 \leq 1,$$

le  $b$  essendo legate alle  $a$  dalle relazioni

$$(4) \quad a_3 = -2b_3, \quad a_5 = -2b_7 + 3b_3^2, \quad a_7 = -2b_{11} + 6b_3b_7 - 4b_3^3, \\ a_9 = -2b_{15} + 6b_3b_{11} + 3b_7^2 - 12b_3^2b_7 + 5b_3^4, \dots$$

Si sa che sussistono altresì le disuguaglianze (ved. Levin, M. Fekete-G. Szegő)

$$(5) \quad |a_3| \leq 1, \quad |a_5| \leq e^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} = 1.013 \dots, \quad |a_7| < 1.25, \\ |a_9| < 1.38, \quad |a_{11}| < 1.70, \quad |a_{13}| < 2.05, \\ |a_{15}| < 2.46, \quad |a_{17}| < 2.95.$$

2. ... In un lavoro presentemente in corso di stampa nella « Revista de Ciencias de Lima » io ho dimostrato che

$$(6) \quad |a_7| < 1.194.$$

Applichiamo ora quello stesso metodo ad  $|a_9|$ . Ponendo

$$(7) \quad f_9 = 2\beta_{15} + 6\beta_3\beta_{11} + 3\beta_7^2 + 12\beta_3^2\beta_7 + 5\beta_3^4, \quad \beta_i = |b_i|,$$

$$(8) \quad \varphi_9 = 3\beta_3^2 + 7\beta_7^2 + 11\beta_{11}^2 + 15\beta_{15}^2 - 1,$$

$$(9) \quad F_9 = f_9 - \lambda\varphi_9,$$

<sup>(1)</sup> Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1938.

valgono le relazioni

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_9}{\partial \beta_3} = 6\beta_{11} + 24\beta_3\beta_7 + 20\beta_3^3 - 6\lambda\beta_3 = 0, \\ \frac{\partial F_9}{\partial \beta_7} = 6\beta_7 + 12\beta_3^2 - 14\lambda\beta_7 = 0, \quad \frac{\partial F_9}{\partial \beta_{11}} = 6\beta_3 - 22\lambda\beta_{11} = 0, \\ \frac{\partial F_9}{\partial \beta_{15}} = 2 - 30\lambda\beta_{15} = 0. \end{array} \right.$$

Ne segue

$$\beta_{11} = \frac{3}{11\lambda}\beta_3, \quad \beta_{15} = \frac{1}{15\lambda}, \quad \beta_7 = \frac{6\beta_3^2}{7\lambda - 3},$$

$$\frac{9}{11\lambda}\beta_3 + \frac{72\beta_3^3}{7\lambda - 3} + 10\beta_3^2 - 3\lambda\beta_3 = 0,$$

donde

$$\beta_3 = \beta_{11} = \beta_7 = 0, \quad 15\beta_{15}^2 = 1, \quad \lambda = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

$$f_9 = 2\beta_{15} = \frac{2\sqrt{15}}{15} < 1,$$

ovvero l'equazione

$$(11) \quad \frac{9}{11\lambda} + \frac{72\beta_3^3}{7\lambda - 3} + 10\beta_3^2 - 3\lambda = 0;$$

dunque

$$\beta_3^2 = \frac{(33\lambda^2 - 9)(7\lambda - 3)}{(70\lambda + 42) \cdot 11\lambda}, \quad \beta_{11} = \frac{3}{11\lambda}\beta_3, \quad \beta_{15} = \frac{1}{15\lambda}, \quad \beta_7 = \frac{6\beta_3^2}{7\lambda - 3},$$

ciò che dà l'equazione in  $\lambda$ :

$$3 \cdot \frac{(33\lambda^2 - 9)(7\lambda - 3)}{(70\lambda + 42) \cdot 11\lambda} + 7 \cdot \frac{36}{(7\lambda - 3)^2} \cdot \frac{(33\lambda^2 - 9)^2 (7\lambda - 3)^2}{(70\lambda + 42)^2 \cdot 121\lambda^2} +$$

$$+ 11 \cdot \frac{9}{121\lambda^2} \cdot \frac{(33\lambda^2 - 9)(7\lambda - 3)}{(70\lambda + 42) \cdot 11\lambda} + \frac{1}{15\lambda^2} - 1 = 0$$

ossia

$$(12) \quad 571725\lambda^6 - 243210\lambda^5 + 909315\lambda^4 - 346720\lambda^3 + 8295\lambda^2 +$$

$$+ 29826\lambda + 10935 = 0.$$

3. Questa equazione (12) possiede due radici positive delle quali una è situata fra 0 ed  $\frac{1}{2}$ , e quindi non interessa, dovendosi avere

$\lambda > \sqrt{\frac{3}{11}} = 0,520\dots$  Un calcolo sommario mostra che la seconda radice positiva cade fra 1.6 e 1.65.

Ora si ha

$$(13) \quad f_9 = \frac{2}{15\lambda} + \frac{18}{11\lambda} \frac{(33\lambda^2 - 9)(7\lambda - 3)}{(70\lambda + 42) \cdot 11\lambda} + 3 \cdot \frac{36 \cdot (33\lambda^2 - 9)^2}{(70\lambda + 42)^2 \cdot 121\lambda^2} + \\ + 12 \cdot \frac{6}{7\lambda - 3} \cdot \frac{(33\lambda^2 - 9)^2 (7\lambda - 3)^2}{(70\lambda + 42)^2 \cdot 121\lambda^2} + 5 \frac{(33\lambda^2 - 9)^2 (7\lambda - 3)^2}{(70\lambda + 42)^2 \cdot 121\lambda^2} = \\ = \frac{2}{15\lambda} + \frac{18(33\lambda^2 - 9)(7\lambda - 3)}{(70\lambda + 42) \cdot 121\lambda^2} + \frac{(33\lambda^2 - 9)^2 (245\lambda^2 + 294\lambda - 63)}{(70\lambda + 42)^2 \cdot 121\lambda^2};$$

quindi

$$f_9 < \frac{1}{12} + \frac{18(33 \cdot 1.65^2 - 9)(7 \cdot 1.65 - 3)}{121 \cdot 2.56 \cdot (70 \cdot 1.6 + 42)} + \\ + \frac{(33 \cdot 1.65^2 - 9)^2 (245 \cdot 1.65^2 + 2.94 \cdot 1.65 - 63)}{(70 \cdot 1.6 + 42)^2 \cdot 121 \cdot 2.56}.$$

Si perviene così alla disuguaglianza

$$(14) \quad |a_9| < 1.315$$

che è più vantaggiosa della precedente, e potrebbe essere ulteriormente perfezionata con un calcolo più approfondito.

4. Ciò posto, sia

$$(15) \quad s(\zeta) = \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + \dots$$

una serie univalente generale. Ponendo  $\zeta = t^2$ , si ha

$$s(t^2) = f^2(t) = t^2 + A_2 t^4 + \dots \\ f(t) = t + a_3 t^3 + \dots$$

e si giunge alle relazioni note

$$(16) \quad A_2 = 2a_3, \quad A_3 = a_3^2 + 2a_5, \quad A_4 = 2a_3 a_5 + 2a_7, \\ A_5 = 2a_9 + a_5^2 + 2a_3 a_7, \dots$$

Ne conseguono le disuguaglianze già da me indicate

$$(17) \quad |A_4| < 4.416,$$

nonchè

$$(18) \quad |A_5| < 6.047.$$

**Geodesia** (Fotogrammetria). — *Influenza degli errori di orientamento interno nella restituzione fotogrammetrica*. Nota <sup>(1)</sup> di L. SOLAINI, presentata dal Socio G. CASSINIS.

Poichè la determinazione dell'orientamento esterno delle camere viene eseguita in tutti i restitutori fotogrammetrici moderni per via ottico meccanica, osservando le lastre nelle camere di proiezione oppure proiettandole sopra appositi schermetti, è evidente l'importanza che gli errori di orientamento interno hanno sulla sistemazione delle camere e quindi sulla restituzione. A ciò bisogna aggiungere l'influenza degli errori nella determinazione delle costanti della camera di presa.

Allo scopo di esaminare compiutamente la natura e l'ammontare di questi errori, ho eseguito una ricerca analitica generale, appoggiata in una prima parte alle formule risolutive del problema del semplice vertice di piramide e valevole quindi in modo particolare per i restitutori a doppia proiezione, nei quali le camere vengono orientate, almeno in un primo tempo, ciascuna per proprio conto. Questa parte dello studio ha consentito di determinare gli errori in tutti gli elementi di orientamento esterno di ciascun proiettore, mentre nella seconda parte, con opportuno algoritmo, ho ricercato gli errori nelle coordinate del modello ottico.

Riassumo qui brevemente i risultati ottenuti <sup>(2)</sup>. Osserviamo, come è stato già accennato, che l'orientamento interno delle camere di proiezione può essere errato per due ragioni: per imprecisione nella determinazione della distanza principale e della posizione del punto principale della camera di presa, oppure nella imposizione di tali valori nel restitutore <sup>(3)</sup>.

Inoltre gli errori di orientamento interno devono essere considerati come sistematici, in quanto influenzano almeno tutti i punti che si restituiscono da una intera coppia. Perciò gli errori si ottengono differenziando semplicemente le formule che danno le espressioni dei vari elementi considerati e non applicando i principi del metodo dei minimi quadrati.

Anzitutto, ho ricercato la deformazione delle facce del triedro che ha per vertice il punto di presa ed i cui spigoli passano rispettivamente per

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1938.

(2) Una esposizione dettagliata apparirà prossimamente sulla « Rivista del Catasto e dei SS. TT. ».

(3) Vedi G. CASSINIS e L. SOLAINI, *Lezioni tenute al 2° Corso di cultura in Fotogrammetria*, Milano.



i tre punti del terreno di coordinate note, scelti di riferimento. Per una variazione  $\delta p$  della distanza principale si trova:

$$\delta' \mu_i = \frac{p \operatorname{ctg} \mu_i}{\Pi_i} \left( \cos^2 \mu_i \frac{\Delta_{i+1} + \Delta_{i-1}}{\Pi_i} - 2 \right) \rho'' \delta p \quad \left( \rho'' = \frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \right),$$

essendo  $\mu_i$  una faccia generica ed avendo  $\Pi_i$  e  $\Delta_i$  le seguenti espressioni:

$$\Pi_i = (x_{i+1} - x_0)(x_{i+1} - x_0) + (y_{i+1} - y_0)(y_{i-1} - y_0) + p^2$$

$$\Delta_i = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + p^2$$

dove con  $x_i, y_i$  sono indicate le coordinate di un punto immagine sulla lastra, riferite agli assi di questa e con  $x_0$  e  $y_0$  le coordinate del punto principale. Per variazioni  $\delta x_0$  e  $\delta y_0$  di  $x_0$  e  $y_0$  si ha invece:

$$\begin{aligned} \delta'' \mu_i = \operatorname{ctg} \mu_i \left[ \left( \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{\Pi_i} - \frac{x_{i+1}}{\Delta_{i+1}} - \frac{x_{i-1}}{\Delta_{i-1}} \right) \delta x_0 + \right. \\ \left. + \left( \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{\Pi_i} - \frac{y_{i+1}}{\Delta_{i+1}} - \frac{y_{i-1}}{\Delta_{i-1}} \right) \delta y_0 \right] \rho'' . \end{aligned}$$

Ammissa una variazione  $\delta \mu_i$  nelle facce della piramide, dovuta ad uno qualunque degli errori considerati o anche a tutti insieme, si possono trovare gli errori nelle coordinate del vertice della piramide, cioè del punto di presa, degli angoli di direzione dell'asse della camera e dello sbandamento.

Detti  $s_i$  gli spigoli della piramide, si ha in generale:

$$\delta s_1 = \frac{a_2 b_3 n_1 \delta \mu_1 - b_1 b_3 n_2 \delta \mu_2 - a_1 a_2 n_3 \delta \mu_3}{a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}$$

$$\delta s_2 = \frac{-a_2 a_3 n_1 \delta \mu_1 + a_3 b_1 n_2 \delta \mu_2 - b_1 b_2 n_3 \delta \mu_3}{a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}$$

$$\delta s_3 = \frac{-b_2 b_3 n_1 \delta \mu_1 - a_1 a_3 n_2 \delta \mu_2 + a_1 b_2 n_3 \delta \mu_3}{a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}$$

con

$$a_i = s_{i+1} - s_{i-1} \cos \mu_i ; \quad b_i = s_{i-1} - s_{i+1} \cos \mu_i ;$$

$$n_i = s_{i+1} s_{i-1} \operatorname{sen} \mu_i \operatorname{arc} 1'' .$$

Tali espressioni possono essere notevolmente semplificate facendo particolari ipotesi sulla natura del triangolo dei punti immagine, ipotesi in genere abbastanza prossime alla realtà.

Le coordinate  $X, Y, Z$  del vertice subiscono gli incrementi:

$$\delta X = \frac{\sum s_i (Y_{i+1} - Y_{i-1}) \delta s_i}{2 S} ; \quad \delta Y = \frac{\sum s_i (X_{i-1} - X_{i+1}) \delta s_i}{2 S} ;$$

$$\delta Z = \frac{s_i \delta s_i - (X - X_i) \delta X - (Y - Y_i) \delta Y}{Z} ,$$

essendo  $X_i$  ecc. le coordinate dei punti base ed  $S$  l'area del triangolo formato da questi.

Gli angoli di direzione  $\xi, \eta, \zeta$  dell'asse sono errati di:

$$\delta\xi = \frac{\sum \Lambda_i (Y_{i+1} - Y_{i-1})}{2 S \sin \xi} \rho'' \quad ; \quad \delta\eta = \frac{\sum \Lambda_i (X_{i-1} - X_{i+1})}{2 S \sin \eta} \rho'';$$

$$\delta\zeta = \frac{\rho''}{\sin \zeta} (\cos \xi \delta X + \cos \eta \delta Z + \cos \zeta \delta Z - (X - X_i) \sin \xi \operatorname{arc} r'' \delta\xi -$$

$$- (Y - Y_i) \sin \eta \operatorname{arc} r'' \delta\eta - \Lambda_i)$$

con

$$\Lambda_i = \cos \varphi_i \delta s_i - s_i \sin \varphi_i \delta \varphi_i \operatorname{arc} r'',$$

essendo  $\varphi_i$  l'angolo formato dall'asse con lo spigolo  $s_i$  della piramide.  $\delta \varphi_i$  si calcola in modo assai semplice.

Poichè lo sbandamento  $\tau$  è dato da <sup>(1)</sup>  $\tau = \lambda_i - \omega_i$ , si ha:

$$\delta\tau = \delta\lambda_i - \delta\omega_i;$$

$\lambda_i$  è l'angolo che la congiungente il punto immagine  $M'_i$  col punto principale della lastra forma con la direzione della retta di massima pendenza e  $\omega_i$  l'angolo che la stessa congiungente fa con l'asse  $x$  del fotogramma. Si trova:

$$\delta\lambda_i = \operatorname{tg} \lambda_i [-\operatorname{ctg} \psi_i \operatorname{tg} \xi_i \operatorname{ctg} \vartheta_i \delta\xi_i + \operatorname{ctg} \zeta_i (1 - \operatorname{ctg} \vartheta_i \operatorname{ctg} \psi_i) \delta\zeta_i - \operatorname{ctg} \varphi_i \delta\varphi_i + \\ + \operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{tg} \xi \operatorname{ctg} \psi_i \delta\xi + \operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{ctg} \zeta \operatorname{ctg} \psi_i \delta\zeta]$$

con  $\vartheta$  orientamento dell'asse e dove  $\xi_i$  ecc. hanno gli stessi significati di  $\xi$  ecc., riferiti però allo spigolo  $s_i$ . Inoltre:

$$\delta\omega_i = \frac{\rho''}{r_i} (\sin \omega_i \delta x_o - \cos \omega_i \delta y_o) \quad [r_i^2 = (x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2].$$

$\delta\xi_i$  e  $\delta\zeta_i$  sono dati dalle formule:

$$\delta\xi_i = \operatorname{ctg} \xi_i \left( \frac{\delta s_i}{s_i} - \frac{\delta X}{X - X_i} \right) \rho''$$

$$\delta\zeta_i = \operatorname{ctg} \zeta_i \left( \frac{\delta s_i}{s_i} - \frac{\delta Z}{Z} \right) \rho''.$$

Così si possono trovare le espressioni di tutti gli errori negli elementi di orientamento esterno. Le formule scritte non valgono nel caso di fotogrammi nadirali, per i quali occorre trovare espressioni particolari per cui rimando alla Memoria citata.

(1) Ved. le *Lezioni* sopra citate.

Per determinare gli errori nella restituzione, ho anzitutto cercato le coordinate di un punto del modello ottico a partire dalle immagini sulle due lastre *a*) e *b*), trovando:

$$Z = \frac{M_a M_b}{M_a N_b - M_b N_a} \left( Y_a - Y_b - \frac{N_a}{M_a} Z_a + \frac{N_b}{M_b} Z_b \right)$$

$$Y = Y_a - \frac{N_a}{M_a} (Z_a - Z) = Y_b - \frac{N_b}{M_b} (Z_b - Z)$$

$$X = X_a - \frac{P_a}{M_a} (Z_a - Z) = X_b - \frac{P_b}{M_b} (Z_b - Z),$$

con

$$M = \cos \nu + \sin \nu (m \sin \tau - n \cos \tau)$$

$$N = -\sin \vartheta \sin \nu + \cos \vartheta (m \cos \tau + n \sin \tau) + \sin \vartheta \cos \nu (m \sin \tau - n \cos \tau)$$

$$P = -\cos \vartheta \sin \nu - \sin \vartheta (m \cos \tau + n \sin \tau) + \cos \vartheta \cos \nu (m \sin \tau - n \cos \tau),$$

$$\text{essendo: } \nu = 180^\circ - \zeta \text{ ed } m = \frac{y - y_0}{p}, \quad n = \frac{x - x_0}{p}.$$

Se ne deduce:

$$\begin{aligned} \delta Z = \frac{1}{M_a N_b - M_b N_a} & \left[ \frac{N_a M_b}{M_a} (Z_a - Z) \delta M_a - \frac{N_b M_a}{M_b} (Z_b - Z) \delta M_b - \right. \\ & - M_b (Z_a - Z) \delta N_a + M_a (Z_b - Z) \delta N_b + M_a M_b (\delta Y_a - \delta Y_b) - \\ & \left. - M_b N_a \delta Z_a + M_a N_b \delta Z_b \right] \end{aligned}$$

$$\delta Y = (Z_a - Z) \left( -\frac{\delta N_a}{M_a} + \frac{N_a}{M_a^2} \delta M_a \right) - \frac{N_a}{M_a} (\delta Z_a - \delta Z) + \delta Y_a$$

$$\delta X = (Z_a - Z) \left( -\frac{\delta P_a}{M_a} + \frac{P_a}{M_a^2} \delta M_a \right) - \frac{P_a}{M_a} (\delta Z_a - \delta Z) + \delta X_a,$$

con:

$$\begin{aligned} \delta M = [\cos \nu (m \sin \tau - n \cos \tau) - \sin \nu] \delta \nu + \sin \nu (m \cos \tau + n \sin \tau) \delta \tau + \\ + \sin \nu (\sin \tau \delta m - \cos \tau \delta n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta N = [-\cos \vartheta \sin \nu - \sin \vartheta (m \cos \tau + n \sin \tau) + \cos \vartheta \cos \nu (m \sin \tau - \\ - n \cos \tau)] \delta \vartheta - \sin \vartheta [\cos \nu + \sin \nu (m \sin \tau - n \cos \tau)] \delta \nu + \\ + [\cos \vartheta (-m \sin \tau + n \cos \tau) + \sin \vartheta \cos \nu (m \cos \tau + n \sin \tau)] \delta \tau + \\ + (\cos \vartheta \cos \tau + \sin \vartheta \cos \nu \sin \tau) \delta m + (\cos \vartheta \sin \tau - \sin \vartheta \cos \nu \cos \tau) \delta n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P = & [\text{sen } \vartheta \text{ sen } \nu - \cos \vartheta (m \cos \tau + n \text{ sen } \tau) - \text{sen } \vartheta \cos \nu (m \text{ sen } \tau - \\ & - n \cos \tau)] \delta \vartheta - \cos \vartheta [\cos \nu + \text{sen } \nu (m \text{ sen } \tau - n \cos \tau)] \delta \nu + \\ & + [\text{sen } \vartheta (m \text{ sen } \tau - n \cos \tau) + \cos \vartheta \cos \nu (m \cos \tau + n \text{ sen } \tau)] \delta \tau - \\ & - (\text{sen } \vartheta \cos \tau - \cos \vartheta \cos \nu \text{ sen } \tau) \delta m - (\text{sen } \vartheta \text{ sen } \tau + \cos \vartheta \cos \nu \cos \tau) \delta n; \end{aligned}$$

$$\delta m = -\frac{\delta y_0}{p} - \frac{m}{p} \delta p \quad ; \quad \delta n = \frac{\delta x_0}{p} - \frac{n}{p} \delta p.$$

In particolare, per fotografie nadirali con  $\nu = 0^\circ$ ,  $\vartheta = 90^\circ$  e  $\tau = 180^\circ$ , al posto di  $m, n$  ecc., si possono introdurre gli elementi di presa e cioè l'altezza  $H$  di volo e la lunghezza  $b$  della base. Si hanno le formule seguenti, abbastanza semplici e molto espressive:

$$\begin{aligned} \delta Z = & \frac{H}{b} \left[ X (\delta \vartheta_a - \delta \vartheta_b) + \left( H + \frac{Y^2}{H} \right) \delta \nu_a - \left( H + \frac{(b-Y)^2}{H} \right) \delta \nu_b - \right. \\ & \left. - X (\delta \tau_a - \delta \tau_b) - \delta b + \frac{Y}{H} \delta Z_a + \frac{b-Y}{H} \delta Z_b - H (\delta n_a - \delta n_b) \right] \end{aligned}$$

$$\delta Y = X \delta \vartheta_a + \left( H + \frac{Y^2}{H} \right) \delta \nu_a - X \delta \tau_a - H \delta n_a + \frac{Y}{H} \delta H + \delta Y_a$$

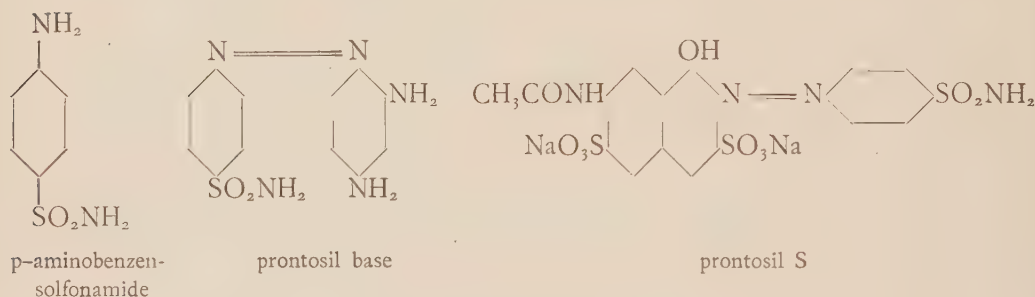
$$\delta X = -Y \delta \vartheta_a + \frac{XY}{H} \delta \nu_a + Y \delta \tau_a - H \delta m_a + \frac{X}{H} \delta H + \delta X_a.$$

Esse possono servire a trovare la deformazione del modello ottico, indipendentemente dalla causa che la produce.

In particolare risulta, come è da molto noto, l'influenza del rapporto di base  $\frac{H}{b}$  sugli errori di quota e l'effetto compensatore degli errori di orientamento esterno causati da quelli di orientamento interno su questi ultimi, espressi esplicitamente da  $\delta m$  e  $\delta n$ . Per fotogrammi esattamente nadirali gli errori residui del modello ottico sono assai limitati, tuttavia la compensazione non può avvenire in modo altrettanto completo in generale, per cui è necessario ottenere la coincidenza dell'orientamento interno delle camere di proiezione con quello delle camere di presa, con errori non superiori a 0.05 mm, sia per distanza principale, sia per il punto principale.

**Chimica** (Chimica biologica). — *Alcuni p-aminobenzensolfonil- $\alpha$ -aminoacidi e loro derivati*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> di F. P. MAZZA e C. MIGLIARDI, presentata dal Socio A. HERLITZKA.

La chemioterapia si è rivolta prevalentemente, sino a pochi anni or sono, alla cura delle infezioni protozoarie, giacchè i protozoi si dimostrano di solito assai più sensibili agli agenti chimici che non i batteri. Ma l'introduzione in terapia della p-aminobenzensolfonamide e dei suoi derivati Prontosil base e Prontosil S(3), che si sono rivelati attivissimi in vivo contro gli streptococchi ed altri cocci patogeni, mentre in vitro si manifestano inefficaci a combatterli, ha messo in luce la possibilità di servirsi di una chemioterapia anche per le affezioni batteriche.



È chiaro che questi ritrovati abbiano provocato una valanga di ricerche chimiche, farmacologiche e cliniche sui derivati solfonamidici aromatici, ricerche che non è qui il caso di ricordare. Diremo solo che le varie teorie proposte per spiegare il meccanismo di azione delle solfonamidi *in vivo*, mentre un'azione diretta è esclusa dall'inattività *in vitro*, ci sembrano ancora troppo poco confortate da fatti sperimentali, per poter servire di base ad una discussione. Noi, tuttavia, crediamo che la spiegazione più logica dei fatti, in particolar modo della specificità dell'azione delle solfonamidi, sia l'ammissione che esse subiscano nell'organismo mutamenti chimici, o colloidochimici, tali da poter legarsi ai gruppi aptenici tipici dei microorganismi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1938.

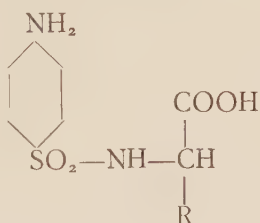
(3) DOMAGK, «Deut. Med. Wochschr.», 61, 1935, p. 250; TREFOUËL, TREFOUËL, NITTI, BORET, «C. R. Soc. Biol.», 120, 1936, p. 756; BUTTLE, GRAY e STEPHENSON, «Lancet», 1, 1937, p. 194; LONG e BLISS, «J. Am. Med. Assoc.», 108, 1937, p. 32; ROSENTHAL, BAUER e BRANHAM, «Public Health Reports», 52, 1937, p. 662; HÖRLEIN, «Mediniz. u. Chemie», III, 1936.

(4) DOMAGK, «Klin. Wochenschr.», II, 1937, p. 1412; LEVADITI e VAISMAN, «Presse Méd.», 43, 1935, p. 2097; UNSHELM, «Arch. f. Kinderheilk.», 109, 1936, p. 65; SOEHRING, «Bioch. Z.», 295, 1938, p. 265.



L'effetto chemioterapeutico sui cocci, in ogni modo, è legato certamente al gruppo sulfonamidico, perchè si perde o diminuisce negli acidi sulfonici corrispondenti (1), ma persiste nei derivati sostituiti del gruppo amidico con alchili od acili (dietilamide, anilide) (2), mentre inattivi sono la p-aminobenzensolfonil-piperide e cicloesilamide. La sostituzione nel gruppo aminico della p-aminobenzensolfonamide, mentre influenza la tossicità dei derivati, non pare faccia perdere l'attività chemioterapica. In quanto ai derivati azoici, quali il prontosil base e quello S, sembra agiscano, giacchè nell'organismo sono scissi, mettendosi in libertà la p-aminobenzensolfonamide. Una sinossi dei dati relativi all'attività e alla tossicità di una serie di derivati sulfonamidici può trovarsi in una recente comunicazione di Gray, Buttle e Stephenson (3), alla quale rimandiamo.

Questi composti, tuttavia, hanno o carattere acido o basico; nessuno di essi è un anfolita, nè in alcuno di essi i costituenti nel gruppo amidico hanno polarità propria. Ci è sembrato, pertanto, interessante studiare le proprietà farmacologiche e chemioterapiche dei p-aminobenzensolfonilderivati di alcuni aminoacidi, i quali possono considerarsi derivati di sostituzione delle sulfonamidi con un radicale fortemente elettronegativo



e sono anfoliti tipici. Il loro comportamento, quindi, può portare un contributo all'interpretazione del meccanismo d'azione di questi derivati, e d'altra parte è possibile che alcuni di essi possano presentare importanza pratica. Era, inoltre, presumibile che questi derivati fossero assai più solubili in acqua, della p-aminobenzensolfonamide. Abbiamo, perciò, preparato i p-aminobenzensolfonilderivati della glicina (2), della l(+)-alanina e della l(—)-tirosina, idrolizzando per breve ebollizione con HCl dil. i p-acetilaminobenzensolfonilderivati, ottenuti per azione del cloruro di p-acetilaminobenzensolfonile su gli aminoacidi in soluzione alcalina. I p-aminobenzensolfonilaminoacidi sono sostanze assai stabili e resistenti all'idrolisi con acidi diluiti: conforme alla nostra previsione, il derivato della glicina è mediocrementemente solubile in acqua, quello dell'alanina solubilissimo; meno solubile è quello della tirosina; le soluzioni acquose presentano reazione neutra.

(1) FULLER, «Lancet», 1, 1937, p. 194.

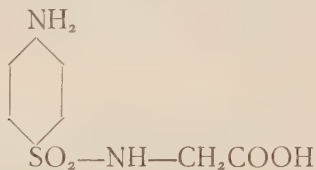
(2) TREFOUËL, TREFOUËL, NITTI e BORET, «Ann. Inst. Pasteur», 58, 1937, p. 30.

(3) GRAY, BUTTLE e STEPHENSON, «Bioch. J.», 1937.

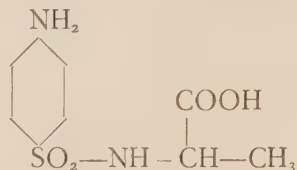
(4) Quando i risultati di quest'indagine erano già stati inviati al Congresso Internazionale di Chimica a Roma, ci è pervenuto il fascicolo di aprile 1938 del «J. Am. Chem. Soc.», dove è una Nota di KOLLOFF, che descrive la preparazione del derivato p-aminobenzensolfonilico della glicina.

Per azione di HCl conc. a 150° in tubo chiuso, o per prolungata ebollizione (4-5 ore) con H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> al 50 %, sono idrolizzati in acido solfanilico ed aminoacidi.

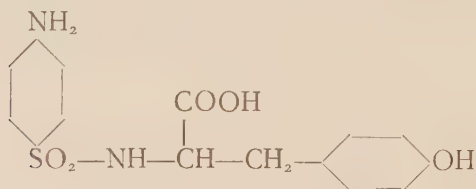
Ci riserviamo di studiarne il comportamento ionolitico, per riconoscere se esistono prevalentemente sotto forma di anioni come gli aminoacidi alifatici, oppure di molecole indissociate, come quelli aromatici.



p-aminobenzenesulfonylglicina

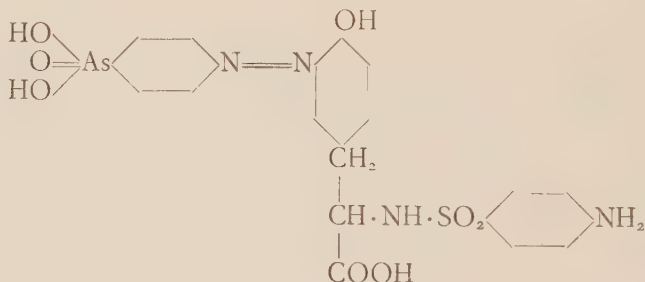


p-aminobenzenesulfonylalanina



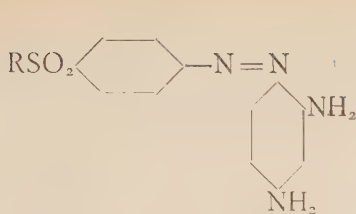
p-aminobenzenesulfonyltyrosina

La p-aminobenzenesulfonyltyrosina, copulata in soluzione alcalina con il diazoico dell'acido p-aminofenilarsinico, ha dato l'acido p-aminobenzenesulfonyltyrosin-4-azo-p-fenilarsinico

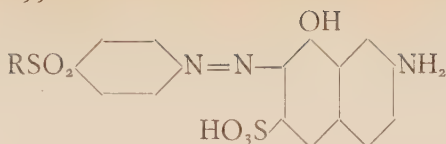


sostanza colorata in rosso intenso, il cui sale sodico è solubile, e la cui costituzione lascia prevedere possa svolgere una azione sia sui protozoi che sui batteri.

Abbiamo, poi, preparato i composti di copulazione dei diazoici dei p-aminobenzenesulfonylderivati con la m-fenilendiamina e con l'acido γ, la cui azione chemioterapica sui tripanosomi è nota. Questi composti azoici, per la loro complessità, potrebbero esercitare azioni colloidochimiche più spiccate che non le semplici solfonamidi.



azoici con la m-fenilendiamina



azoici con l'acido  $\gamma$ .

Sono sostanze intensamente colorate: gli azoici con la m-fenilendiamina sono poco solubili, mentre solubili sono i loro sali; solubilissimi, invece, sono i derivati dell'acido  $\gamma$ .

I risultati delle ricerche farmacologiche e chemioterapiche saranno pubblicati tra breve.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Il cloruro di p-acetilaminobenzensolfonile è stato preparato per azione di  $\text{SO}_3\text{HCl}$  su acetanilide, secondo le indicazioni di Stewart (1). Gli aminoacidi erano preparati di Kahlbaum. Gli acetilaminobenzensolfonilaminoacidi si preparavano trattando una soluzione di 0.2 mol di aminoacido in 100 cc. di NaOH 2n con una soluzione di 0.2 mol di acicloruro nella minima quantità di etere etilico. Si agitava in agitatore a carrello sino a totale reazione (1 h circa), si separava lo strato acquoso e si acidificava con HCl al rosso congo. Dopo qualche tempo si separava una massa di cristalli dell'acetilaminobenzensolfonilderivato, che si raccoglieva alla pompa. Rendimento pressochè quantitativo.

*p-acetilaminobenzensolfonilglicina.* - Cristallizza dall'acqua in lamelle incolori brillanti, fondenti a  $235^\circ$ , facilmente solubili in acqua calda, poco a freddo, solubili in alcool. Acetile  $\%$  15.52 (secondo Kuhn e Roth); calc. per  $\text{C}_{10}\text{H}_{12}\text{O}_5\text{N}_2\text{S}$ : 15.80  $\%$ .

*p-acetilaminosolfonilalanina.* - Cristallizza dall'acqua in tavolette di un bianco lievemente giallastro, fondenti a  $208^\circ$ , poco solubili in acqua, facilmente in alcool. Acetile  $\%$  15.10; calc. per  $\text{C}_{11}\text{H}_{14}\text{O}_5\text{N}_2\text{S}$ : 15.03  $\%$ .

*p-acetilaminosolfoniltirosina.* - Cristallizza dall'alcool acquoso in aghetti microscopici, fondenti, se scaldati lentamente a  $216^\circ$ - $217^\circ$ ; a  $221^\circ$ - $222^\circ$ , se scaldati rapidamente. È pochissimo solubile in acqua fredda, meglio a caldo, facilmente in alcool acquoso. Acetile  $\%$  11.40; calc. per  $\text{C}_{17}\text{H}_{18}\text{O}_6\text{N}_2\text{S}$ : 11.37  $\%$ .

Gli acetilderivati sono stati idrolizzati facendoli bollire e ricadere per 40 min. con 2 p. di HCl 5 n. Con i p-aminobenzensolfonilderivati della glicina e dell'alanina, si separavano lentamente a freddo i cloridrati cristallini, che si raccoglievano alla pompa, si trattavano con la quantità teorica di NaOH 2 n. Il derivato della glicina si separa allo stato cristallino, quello dell'alanina è tanto solubile da non precipitare. Si è isolato evaporando il liquido a b.m. e riprendendo il residuo con acetone acquoso bollente. Il soluto acetoneico, filtrato dal NaCl, evaporato nel vuoto su  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , ha lasciato separare cristallina la p-aminobenzensolfonilalanina.

Il derivato della tirosina non si separa come cloridrato: si tratta la soluzione con un eccesso di acetato sodico, e precipita così la p-aminobenzensolfoniltirosina. I rendimenti dell'idrolisi sono quantitativi.

(1) STEWART, «J. Chem. Soc.», 121, 1922, p. 2558.

*p*-aminobenzensolfonilglicina. — Cristallizza dall' $H_2O$  in aghi incolori riuniti a druse, fondenti a  $150^\circ$ , facilmente solubili in  $H_2O$  e in alcool. Le microanalisi hanno dato: C % 41.50; H % 4.50; N % 12.30; S % 13.70. Calc. per  $C_8H_{10}O_4N_2S$ : C 41.73 %; H 4.34 %; N 12.16 %; S 13.91 %.

*p*-aminobenzensolfonilalanina. — Cristallizza dall'acetone acquoso in aghi incolori, fondenti a  $107^\circ$ – $108^\circ$  solubilissimi in acqua, meno in alcool assoluto. C % 44.10; H % 4.90; N % 11.42; S % 11.20. Calc. per  $C_9H_{12}O_4N_2S$ : C 44.19 %; H 4.80 %; N 11.30 %; S 13.60 %.

*p*-aminobenzensolfoniltirosina. — Cristallizza dall'alcool acquoso in aghi raggiati incolori, che ingialliscono a  $190^\circ$ , si rattappiscono a  $215^\circ$  e fondono a  $230^\circ$ , decomponendosi. Poco solubile in acqua, meglio in alcool. C % 53.30; H % 4.80; N % 8.35; S % 9.60. Calc. per  $C_{15}H_{16}O_5N_2S$ : C 53.55 %; H 4.64 %; N 8.20 %; S 9.52 %.

Acido *p*-aminobenzensolfoniltirosin-4-azo-*p*-fenilarsinico. — 0.1 mol di *p*-aminobenzensolfoniltirosina si sono disciolti in un lieve eccesso di NaOH 0.5 n ed il liquido si è trattato a poco a poco con la soluzione di 0.1 mol di acido *p*-aminofenilarsinico nella minima quantità di HCl 2 n diazotata con  $NaNO_2$ , avendo cura che la miscela conservasse debole reazione alcalina, che si manteneva aggiungendo di tanto in tanto NaOH 2 n.

Il liquido rosso sangue si è lasciato a sè per qualche tempo, poi si è cautamente acidificato. Si è separato così una sostanza giallo bruna, assai poco solubile in acqua, che cristallizza dall'alcool acquoso in microcristalletti ad *habitus* sferoidale, che non fondono sino ai  $300^\circ$ . Il composto ha dato all'analisi: N % 10.05; As % 13.20. Calc. per  $C_{21}H_{21}O_8N_4SAs$ : N 9.92 %; As 13.29 %. Esso è poco solubile in acqua e poco in alcool; solubile negli alcali con bella colorazione porporina, poco solubile negli acidi minerali.

Composti azoici di copulazione con la *m*-fenilendiamina. — Si sono preparati trattando una soluzione di 0.1 mol di *p*-aminobenzensolfonilaminoacido in HCl 2 n con la quantità necessaria di  $NaNO_2$ , raffreddando con ghiaccio. La soluzione diazotata veniva versata lentamente in una soluzione di 0.1 mol di *m*-fenilendiamina nella minima quantità di HCl 2 n. Il liquido si è colorato in rosso, poi, ad un certo punto, incominciava la precipitazione di una sostanza rossa, che si completava, a reazione terminata, per aggiunta di acetato sodico.

1-3-diamino-4-azobenzensolfonilglicin-benzene. — Si separa da alcool al 70 % in piccolissimi cristalli, ad *habitus* prismatico, di un rosso vivo splendente, fondenti a  $118^\circ$ – $119^\circ$ , decomponendosi. È poco solubile in acqua fredda, meglio a caldo, facilmente in alcool, insolubile in etere. Il cloridrato è poco solubile a freddo, e dà soluzioni rosso-arancione. In alcali si scioglie con colorazione rosso-bruna. All'analisi ha dato: C % 48.00; H % 4.40; N % 20.17. Calc. per  $C_{14}H_{15}O_4N_5S$ : C 48.13 %; H 4.25 %; N 20.05 %.

1-3-diamino-4-azobenzensolfonilalanin-benzene. — Si separa da alcool a 95 % in cristalletti finissimi prismatici, scarlatti, che a  $107^\circ$  si rattappiscono e a  $114^\circ$  fondono decomponendosi. È solubile facilmente in acqua, meno in alcool, insolubile in etere. Si scioglie facilmente negli acidi minerali e negli alcali con colorazione rosso scura. C % 49.40; H % 4.80; N % 19.35. Calc. per  $C_{15}H_{17}O_4N_5S$ : C % 49.60; H % 4.68; N % 19.28.

1-3-diamino-4-azobenzensolfoniltirosin-benzene. — Si separa dall' $H_2O$  in fiocchi di color rosso chiaro, poco solubili in acqua fredda, facilmente in alcool, insolubili in etere. Fonde a  $158^\circ$ – $160^\circ$  decomponendosi. Facilmente solubile in acidi e alcali. C % 55.25; H % 4.75; N % 15.50. Calc. per  $C_{21}H_{21}O_5N_5S$ : C % 55.38; H % 4.61; N % 15.38.

Composti azoici di copulazione con l'acido  $\gamma$ . — Una soluzione di 0.1 mol di *p*-aminobenzensolfonilaminoacido in HCl 2 n diazotata con la quantità teorica di  $NaNO_2$ , si ver-

sava lentamente in una soluzione di 0.1 mol di acido  $\gamma$  in un eccesso di NaOH 2 n., avendo cura di mantenere lievemente alcalina la reazione mediante aggiunta di NaOH 2 n. La soluzione assumeva una bella colorazione rosso vinosa e per acidificazione con HCl lasciava deporre i composti.

*Acido 2-amino-8-naftol-7-azobenzenzolfonilglicin-6-solfonico.* — Si purifica per ripetute soluzioni in  $\text{NaHCO}_3$  al 5 % e riprecipitazione con HCl. È una polvere cristallina rosso bruna, che non fonde sino a  $300^\circ$ , si scioglie facilmente in acqua e in alcool, ed è insolubile in etere. Negli alcali si scioglie con bella colorazione porporina. C % 44.90; H % 3.50; N % 11.75. Calc. per  $\text{C}_{18}\text{H}_{16}\text{O}_8\text{N}_4\text{S}_2$ : C % 45.00; H % 3.35; N % 11.66.

*Acido 2-amino-8-naftol-7-azobenzenzolfonilalanin-6-solfonico.* — Cristallizza da una miscela di acetone ed etere acetico in polvere cristallina leggera rosso sangue, che non fonde sino a  $300^\circ$ . È solubile in acqua calda, meno a freddo e in alcool. Negli alcali si scioglie con colorazione violacea. C % 46.00; H % 3.70; N % 11.50. Calcolato per  $\text{C}_{19}\text{H}_{18}\text{O}_8\text{N}_4\text{S}_2$ : C 46.15 %; H 3.64 %; N 11.33 %.

*Acido 2-amino-8-naftol-7-azobenzenzolfoniltirosin-6-solfonico.* — Cristallizza da alcool al 95 % sotto forma di una polvere microcristallina pesante, rosso oscura, che non fonde sino ai  $300^\circ$ . Dà, con NaOH, soluzioni rosso-violette, ed è insolubile in alcool assoluto, solubile a caldo in alcool a 95 %. Negli alcali si scioglie con una bella colorazione violetta. C % 51.10; H % 3.90; N % 9.70. Calc. per  $\text{C}_{25}\text{H}_{22}\text{O}_9\text{N}_4\text{S}_2$ : C 51.19 %; H 3.75 %; N 9.56 %.

**Botanica** (Batteriologia). — *Ricerche sui microrganismi acidificanti dei foraggi insilati* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di C. ARNAUDI, presentata dal Socio A. MENOZZI.

È noto da tempo, per le ricerche di molti studiosi e specialmente di C. Gorini <sup>(3)</sup>, che ammassando piante verdi si possono determinare in esse diverse trasformazioni, a seconda del grado di umidità e di aerazione della massa del foraggio. In altre parole, la conservazione quantitativa e qualitativa dei principii nutritivi contenuti nei vegetali è in relazione con la natura e l'intensità delle fermentazioni microbiche od enzimatiche e si possono svolgere nel foraggio insilato.

Quando l'ammassamento è fatto in modo da permettere lo svolgimento di intensi fenomeni respiratorii nei tessuti, la temperatura può giungere a  $65-70^\circ \text{C.}$  ed anche più, determinando — qualora rimanga pressochè costante per qualche giorno — una fortissima eliminazione dei microrganismi presenti. La conservazione qualitativa è da attribuirsi in tale evenienza, all'azione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia agraria e tecnica della R. Università di Milano e nella Stazione sperimentale di Batteriologia agraria di Crema.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1938.

(3) C. GORINI, *Ueber die Mikroflora des italienischen Silofutters (Milchsäure-Ensilage)*. «Milchwirtschaftliche Forschungen», 1929. Questo lavoro riporta tutte le indicazioni bibliografiche dell'A. dal 1904 in poi.



termica; essa è però conseguita a spese del materiale conservato, che subirà perdite assommanti al 20-30 % ed anche più.

Se i fenomeni respiratorii sono limitati da una opportuna compressione, la temperatura non raggiungerà i 65-70° C. ed oscillerà invece entro limiti nei quali si trovano le condizioni ambientali che favoriscono una fermentazione prevalentemente lattica o prevalentemente butirrica, il che è quanto dire una buona od una cattiva conservazione del foraggio.

La fermentazione prevalentemente butirrica conferisce infatti al foraggio delle proprietà che sono nocive alla salute del bestiame e determina la comparsa nel latte, di una microflora butirrica contraria alla sua serbevolezza ed alle normali fermentazioni casearie.

Indubbiamente, una parte degli acidi organici fissi e volatili comparenti nella fermentazione dei foraggi insilati, è di provenienza enzimatica, ma è da ritenersi che la maggior parte di essi sia dovuta alle fermentazioni microbiche. Il Cuřin<sup>(1)</sup>, operando su vegetali sterili, in confronto con altri normali, ha visto che soltanto il 15.5 % dell'acidità formatasi durante la conservazione, era di provenienza non microbica. L'opinione prevalente fra gli AA. che si sono occupati dell'argomento, considera la buona conservazione dei foraggi come dipendente dal prevalere della fermentazione lattica operata sui materiali fermentescibili dei vegetali, dai comuni *fermenti lattici* (*B. Bulgaricum*, *B. casei*, lattobacilli, micrococchi) e dai fermenti acidoproteolitici, dagli agenti cioè della acidificazione naturale del latte e dei latticini. Di conseguenza, il controllo batteriologico dei foraggi insilati si è essenzialmente orientato verso la ricerca e la valutazione quantitativa diretta od indiretta dei suddetti microrganismi, impiegandosi come terreni culturali il latte stesso oppure liquidi contenenti del lattosio. Altra conseguenza della funzione acidificatrice attribuita ai fermenti lattici nei foraggi insilati, è la serie di tentativi escogitati da molti studiosi, onde arricchire i foraggi da conservare di culture pure di fermenti lattici. Questi tentativi sortirono però sempre dei risultati incerti o negativi, quali ad esempio, quelli avuti recentemente dal Piraux<sup>(2)</sup>.

Appare strano che non siano state sufficientemente considerate fino ad ora, nello studio di questo problema, le proprietà fisiologiche dei comuni fermenti lattici, in confronto con la composizione chimica dei foraggi insilati e particolarmente delle leguminose. Valga l'osservazione circa le capacità fermentative del più tipico fra i fermenti lattici: il *B. Bulgaricum*, che fermenta in modo lieve ed incostante, con comportamento diverso da ceppo a ceppo, il saccarosio ed il maltosio, mentre attacca vigorosamente e rapidamente il lattosio, il quale zucchero però non è contenuto nei comuni

(1) Boh. CUŘIN, *O puvodu Kyseliny mléčné v siláži*. «Sbornic Vyzkumnych ustavu Zemedelskych C. S. R.», 1932.

(2) E. PIRAUX, F. JOASSIN, R. CAPPENS, *L'ensilage des fourrages verts en Belgique*. «Bull. de l'Inst. agronomique et des Stations de recherche de Gembloux», to. V, n. 2, 1936.

vegetali che si conservano infossati. Da quanto è sopra detto e da quanto esporrò brevemente, pare legittimo concludere *che i comuni fermenti lattici non sono i principali agenti della acidificazione naturale dei foraggi insilati.*

Recentemente Allen, Watson e Fergusson<sup>(1)</sup>, hanno osservato che gli streptococchi lattici hanno una trascurabile influenza sulla produzione di acido lattico nei foraggi insilati. Ad analoghe conclusioni sono giunti Van Beynum e Pette<sup>(2)</sup>, i quali, al pari degli AA. surricordati, ritengono che lo *Streptobacterium plantarum* costituisca la specie acidificante tipica dei foraggi insilati.

Iniziando nel 1936 degli studii in questo campo, il Politi<sup>(3)</sup> eseguiva, su mie indicazioni, alla Stazione Sperimentale di Batteriologia Agraria di Crema, una serie di ricerche batteriologiche e chimiche. Egli poteva osservare come la microflora acidificante dei foraggi insilati, a grado di umidità e con metodi diversi, sia costituita in maniera quasi assoluta — specialmente per quelli a maggior grado di umidità — da batteri non sporigeni, lunghi  $\mu$  1-2.5; grampositivi, non fondenti la gelatina, formanti colonie puntiformi. Essi sono capaci di utilizzare: glucosio, saccarosio, levulosio, maltosio, ma risultano quasi completamente inattivi sopra il lattosio, non coagulano il latte o soltanto dopo 20 giorni e più. Carattere particolarmente importante: questi microrganismi fermentano attivamente lo xilosio e l'arabinosio. Il loro ottimo di temperatura oscilla fra 30 e 37° C.

Altri 26 campioni di foraggi insilati con buon esito, esaminati nell'Istituto di Microbiologia agraria e tecnica della R. Università di Milano, hanno mostrato di possedere una microflora costituita in prevalenza assoluta dagli acidificanti in parola e se ne poterono conteggiare da 5.000.000 a 30.000.000 per grammo di foraggio insilato.

Lo studio comparativo dei vari ceppi di acidificanti isolati, studio che è tuttora in corso, permette di differenziare per i caratteri morfologici e biochimici, tre o quattro tipi fondamentali, caratterizzati però tutti da una attività lieve o nulla sopra il lattosio e da una capacità fermentativa dello xilosio e dell'arabinosio, più o meno energica. Alcuni stipiti mostrano caratteri culturali e biochimici assai simili a quelli presentati dal *Lactobacillus pentoaceticus* di Fred, Peterson e Davenport<sup>(4)</sup>, microbo che il Virtanen<sup>(5)</sup> ha

(1) L. A. ALLEN, S. J. WATSON, W. S. FERGUSON, *The effect of the addition of various materials and bacterial cultures to grass silage at the time of making on the subsequent bacterial and chemical changes.* « Journ. of Agricultural science », 27, II, 1937, p. 294.

(2) J. VAN BEYNUM, J. W. PETTE, *Bacteriologische onderzoekingen over ensileering met Toovolving van zure wei ondermelk of suiker.* « Rijkslandbouwprefestation k Hoor », 1936.

(3) I. POLITI, *Ricerche sopra i foraggi insilati.* Note I, II, III. « Annali della Sperimentazione agraria », vol. XXIX, 1938.

(4) E. B. FRED, W. H. PETERSON, A. DAVENFORT, *Acid fermentation of xilose.* « Journ. of biological Chemistry », 1919.

(5) A. J. VIRTANEN, *The microbiology of ensilage production.* « Atti II Congresso internazionale di Microbiologia », Londra 1936.

segnalato anche nei foraggi insilati con l'aggiunta di acidi minerali. Non tutti gli stipiti isolati possono venire però identificati con questo microrganismo; probabilmente si tratta di specie diverse ma molto prossime come proprietà generali e caratterizzate tutte dall'importante comportamento sopra i pentosi e dalla inattività sopra il lattosio. Questo gruppo di microbi che, per differenziarlo dai comuni fermenti lattici tipici del latte inacidito, ho altrove<sup>(1)</sup> denominato: *fermenti lattici dei vegetali*, ed al quale molto probabilmente va aggiunto anche qualche micrococco, è da considerare il costituente principale della normale microflora acidificante dei foraggi insilati verdi. Esso è molto diffuso sui vegetali da foraggio: con apposite esperienze, si è accertata la presenza di questi acidificanti sopra piante foraggiere diverse, prelevate sterilmente pianta per pianta (in certi casi anzi, vennero prelevate soltanto alcune foglie), ed esaminate immediatamente. In tutti i campioni analizzati (37 di leguminose e 14 di graminacee), sono stati riscontrati in quantità più o meno abbondante: 1.200-23.000 per grammo di pianta verde.

Il potere acidificante di questi microbi è molto elevato: essi abbassano il pH dei liquidi nutritivi fino a 3.4-3.2, mentre il pH ottimo per l'inizio della loro attività è di 5.5. L'acidità prodotta è dovuta ad acido lattico ed acetico, che nei ceppi simili al *L. pentoaceticus*, si trovano in quantità pressochè eguali, mentre negli altri ceppi si riscontrano in quantità variabile, ma sempre con prevalenza per l'acido lattico.

I liquidi nutritivi più favorevoli per i microrganismi di tutto il gruppo, sono i succhi vegetali ottenuti per spremitura e gli infusi d'erba.

Un mezzo nutritivo di facile preparazione, che presenta una forte elettività per questi microbi, è il seguente:

Nitrato ammonico . . . . .	1 gr.
Solfato ammonico . . . . .	1 »
Fosfato monopotassico . . . . .	1.5 »
Solfato di magnesio . . . . .	0.5 »
Xilosio . . . . .	10 »
Peptone . . . . .	5 »
Acqua potabile . . . . .	1000 cmc.

Si porta il pH a circa 6-; si sterilizza a 1/2 atm. per 20'. Si può agarizzare e serve bene per la ricerca ed il conteggio degli acidificanti dei vegetali. Ho potuto osservare che essi crescono però anche in un mezzo nutritivo costituito di segatura di legno (pioppo) o di tutoli di mais sbri-

(1) C. ARNAUDI, *Lezioni di Microbiologia agraria e tecnica*. G. U. F., Milano, 1938.

ciolati finemente, aggiunti in misura del 5-10 % in luogo dello xilosio alla stessa soluzione minerale sopraricordata. In esso si moltiplicano bene tutti i ceppi provati, i quali abbassano il pH portato a 6— prima della semina, in misura variabile: da 4.42 a 3.90 dopo 5 giorni, in termostato a 30° C.

Sulla base di questi risultati, ho voluto provare il comportamento dei ceppi in istudio sopra lo xilano. Ho preparato questo pentosano seguendo il metodo indicato da Menozzi e Pratolongo nel loro trattato <sup>(1)</sup>, estraendolo da tutoli di mais polverizzati. Lo xilano greggio così ottenuto è stato sospeso all'1 % in una soluzione acquosa di fosfato monopotassico al 1.5 ‰ e solfato ammonico all'1 ‰, solfato di magnesio al 0.5 ‰; nitrato ammonico all'1 ‰; pH portato a 6—. Il tutto è stato sterilizzato in provette per 20' a 1/2 atmosfera.

Controllato sul liquido di Fehling, che il trattamento di sterilizzazione non aveva determinato comparsa di zuccheri riduttori, ho inseminato tre ceppi degli acidificanti (indicati provvisoriamente con le lettere M, F, T), ed ho portato il tutto in termostato a 30° C., unitamente ad una provetta di controllo, contenente il liquido nutritivo sterile.

Dopo 4 giorni di termostato si è notato un lieve intorbidamento nelle provette e si è constatato un abbassamento del pH e precisamente: ceppo M pH = 4.6; ceppo T pH = 4.9; ceppo F pH = 5.4; controllo pH = 6. Il liquido culturale del ceppo T, dopo precipitazione con alcool assoluto del residuo di xilano, filtrazione susseguente ed evaporazione dell'alcool, ha dato una lieve riduzione del liquido di Fehling. Il liquido culturale del ceppo M, ha dato una riduzione più lieve; quello del ceppo F, nessuna riduzione. Il liquido di controllo, trattato allo stesso modo, non ha presentata alcuna modificazione.

I tre ceppi: M, F, T sono stati coltivati allora in grandi piastre con agar all'infuso d'erba e dopo 5 giorni di permanenza in termostato, si sono raccolti i microrganismi con soluzione fisiologica. La sospensione microbica ottenuta è stata sottoposta a prolungata centrifugazione in modo da raccogliere i corpi microbici che si risospesero e centrifugarono in soluzione fisiologica sterile altre due volte, in modo da allontanare il materiale nutritizio solubile, proveniente eventualmente dal terreno culturale, controllando da ultimo che la sospensione fosse negativa al Fehling.

I microrganismi così trattati sono stati aggiunti a sospensioni dello xilano all'1 % in acqua, in misura tale da far sì che per 10 cmc. di sospensione, corrispondessero i quantitativi sottosegnati di microrganismi (peso umido). Si è aggiunto l'1 % di toluolo e si è portato il tutto in termostato a 37° C. per tempi diversi. Dopo precipitazione con alcool assoluto, filtrazione ed evaporazione dell'alcool, ha avuto luogo la prova con liquido di

(1) A. MENOZZI, U. PRATOLONGO, *Chimica Agraria*, vol. I. Ed. Hoepli, Milano, 1931.



Fehling, mettendo 2 volumi di soluzione di xilano per 1 volume di Fehling. I risultati ottenuti sono raccolti nella tabella I.

TABELLA I.

Riduzione del liquido di Fehling dopo:	Ceppo M		Ceppo T		Ceppo F		Controllo
	gr. 0.010	gr. 0.050	gr. 0.010	gr. 0.050	gr. 0.010	gr. 0.050	
Ore 6	o	tracce	tracce	tracce	o	o	o
» 12	o	tracce	tracce	tracce	o	o	o
» 24	tracce	netta riduzione	netta riduzione	netta riduzione	tracce	tracce	o

Anche questi saggi, che naturalmente hanno carattere puramente orientativo, sembrano indicare la capacità che hanno i microrganismi acidificanti, di idrolizzare lo xilano. Dei tre ceppi sperimentati, si è mostrato più attivo il T, che come acidificante non è invece il più energico. Appare quindi molto probabile che essi elaborino una *xilanasi*, capace di idrolizzare lo xilano.

Questo comportamento nei riguardi dei pentosani e particolarmente dello xilano, costituente cospicuo delle comuni foraggere, è nuovo elemento probativo per considerare questo gruppo di microrganismi come il vero agente di acidificazione e quindi, di conservazione dei foraggi insilati<sup>(1)</sup>.

Appariva pertanto logico ricercare quale effetto sortisse l'aggiunta di culture pure di questi microbi a foraggi insilati, arricchendo così la microflora acidificante naturale delle piante foraggere. Alle svariate modalità di trattamento sperimentale dei foraggi insilati, in corso di studio per opera dei miei collaboratori dott. I. Politi e dott. G. Pepoli, aggiungemmo quindi quelle comprendenti l'arricchimento artificiale della microflora acidificante. Anche per queste, come per le altre prove in corso, si impiegarono microsili in vetro della capacità di litri 2, usando come foraggio da conservare il *Trifolium repens*, che è dei più delicati fra i foraggi conservabili.

(1) Può essere interessante ricordare a questo proposito che il Seillière (G. SEILLIÈRE, *Sur la digestion de la xylane chez les mammifères*, « C. R. Soc. de Biologie », LXVI, 1909) ha dimostrato fin dal 1909 la presenza di un enzima idrolizzante lo xilano nell'intestino degli erbivori, attribuendogli la funzione di idrolizzare lo xilano contenuto nei foraggi ed ha supposto che esso fosse di origine microbica, pur senza darne la diretta dimostrazione. Data la notevole diffusione che, come più sopra ho detto, hanno i microbi acidificanti sui foraggi verdi, non è improbabile che la *xilanasi* trovata dal Seillière, derivi da questi microbi i quali, giunti nell'intestino insieme con gli erbaggi, esplicherebbero così una importante funzione nei processi digestivi degli erbivori stessi.



TABELLA II.

N.	Trattamento del foraggio	Umidità dopo giorni			pH dopo giorni			Acidità totale % sost. secca dopo giorni			N solubile % sost. secca dopo giorni			N ammoniacale % sost. secca dopo giorni		
		8	15	30	8	15	30	8	15	30	8	15	30	8	15	30
1	Foraggio preventivamente torchiato . . . . .	83.7	83.5	84.1	4.9	4.8	4.85	4.91	5.18	5.78	1.80	1.95	2.06	0.264	0.369	0.384
2	Foraggio torchiato ed aggiunto di 1.5 % di melasso . . . . .	83.7	84.3	84.5	4.7	4.7	4.7	6.01	5.5	7.31	1.83	2.15	2.14	0.283	0.388	0.374
3	Foraggio torchiato ed aggiunto di 1 % di cultura microbica . . . . .	82.9	83.3	83.7	4.9	4.8	4.8	5.78	5.21	5.57	1.55	1.75	2.02	0.222	0.355	0.368
4	Foraggio torchiato + melasso 1.5 % e cultura microbica 1 % . . . . .	82.0	83.4	83.2	4.2	4.3	4.3	8.89	8.90	9.16	1.57	2.35	1.8	0.123	0.157	0.155
5	Foraggio preventivamente trinciato a pezzetti di circa 2 cm. . . . .	86.3	87.2	87.4	6.15	5.85	5.67	2.56	2.86	5.72	2.31	2.34	2.71	0.787	0.828	1.01
6	Foraggio trinciato + melasso 1.5 % . . . . .	84.4	84.5	84.5	4.47	4.75	4.5	7.1	8.13	8.9	1.88	2.—	1.97	0.269	0.303	0.303
7	Foraggio trinciato + 1.5 % di melasso e 1 % di cultura microbica . . .	83.6	83.9	83.7	4.2	4.3	4.27	9.—	9.—	9.06	1.55	1.75	1.68	0.122	0.143	0.135
8	Foraggio insilato tal quale e senza alcun trattamento	85.2	87.5	90.7	5.22	5.9	5.55	4.11	2.9	6.59	1.66	2.40	3.3	0.31	1.—	1.45

Ogni vaso venne riempito col foraggio diversamente trattato (circa 700 gr.), chiuso ermeticamente e munito di valvola pescante in olio di vaselina. Tutti i vasi vennero tenuti in termostato a 37° C. per tutta la durata dell'esperienza. Per ogni modalità vennero allestiti 3 vasi che si aprirono dopo 8, 15, 30 giorni. Sul materiale vennero fatte alcune determinazioni chimiche, atte a dare un criterio circa il grado di conservazione del foraggio. Quantunque la sperimentazione in proposito continui ancora, ritengo interessante riportare alcuni dei dati finora raccolti, dai quali emerge non soltanto l'importanza (ai fini della conservazione) del trattamento fisico cui viene sottoposto il foraggio verde (torchatura, trinciatura), ma altresì l'influenza utile esplicita dall'arricchimento della microflora acidificante. Il risultato migliore, rilevabile dal basso tenore in azoto solubile ed ammoniacale, è stato ottenuto mediante il contemporaneo impiego di culture microbiche e melasso. Evidentemente, con tale aggiunta si rende possibile un immediato processo fermentativo ad opera dei microrganismi apportati e di quelli preesistenti e si raggiunge quindi più rapidamente l'acidità necessaria ad arrestare i processi degradativi delle sostanze azotate.

**Zoologia** (Parassitologia). — *Tentativo di ricostruzione del ciclo generale dei Plasmodi nell'ospite vertebrato*. Nota <sup>(1)</sup> di A. CORRADETTI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Il recente rinvenimento di forme schizogoniche apigmentate nel citoplasma di alcune cellule dei tessuti (cellule endoteliali dei capillari cerebrali, monociti e macrofagi) dopo inoculazione di sporozoit di alcune specie di Plasmodi ha dato origine all'ipotesi che tali forme rappresentino « un ciclo monogonico primario che precede quello monogonico secondario il quale si svolge nei globuli rossi (Raffaele) ».

Contro questa suggestiva ipotesi stanno vari dati di fatto. Anzitutto le forme osservabili nei tessuti si rinvencono anche quando sono già avvenuti numerosi cicli schizogonici negli eritrociti: rimane perciò difficile sostenere che le numerosissime forme cerebrali che si osservano per esempio nel *P. gallinaceum* rappresentino forme di evoluzione diretta degli sporozoit inoculati molto tempo prima.

Inoltre l'interpretazione di Raffaele è dimostrata errata dal fatto fondamentale che negli stessi Plasmodi è possibile ottenere forme identiche quando l'infezione venga trasmessa anzichè con sporozoit con inoculazione di sangue infetto.

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1938.

In un mio lavoro precedente <sup>(1)</sup> dall'osservazione dell'esistenza di specie di Emosporidi che pur presentando tutti i caratteri dei Plasmodi hanno anche la facoltà di svilupparsi in alcune cellule dei tessuti o in altre cellule ematiche ed ematopoietiche diverse dagli eritrociti deducevo che appariva probabile che tali differenze di comportamento esprimano il diverso *grado di adattamento* raggiunto nelle relazioni tra ciascuna specie e il rispettivo ospite.

Riguardo al ciclo di sviluppo facevo notare che occorreva riempire la lacuna esistente tra il momento dell'ingresso degli sporozoiti nell'ospite vertebrato e il momento del rinvenimento delle forme del ciclo schizogonico che si svolge nei globuli rossi o nelle cellule dei tessuti.

Recentissimamente è stato pubblicato un lavoro di Missiroli <sup>(2)</sup> che chiarisce notevolmente il problema. Missiroli ha osservato tre ore dopo l'inoculazione di sporozoiti la presenza nel tessuto cellulare sottocutaneo di corpi rotondeggianti *liberi* contenenti da 4 a 8 granuli di cromatina, che presentavano gli stessi caratteri della cromatina nucleare degli sporozoiti osservati dopo due minuti di permanenza sotto la cute. L'A. conclude che ciò che fu definito come sporozoito non è che una sporocisti immatura che completa il suo sviluppo negli spazi linfatici dell'ospite vertebrato.

Sulla base di tutti i fatti finora accertati espongo nella presente Nota un *tentativo* di ricostruzione del ciclo generale dei Plasmodi nell'ospite vertebrato, mettendo in chiaro ciò che allo stato odierno delle ricerche è sicuramente dimostrato, da ciò che attende ancora una base sperimentale.

Lo schema annesso riassume *il probabile ciclo generale* dei Plasmodi.

Gli sporozoiti già nelle ghiandole salivari presentano un numero di masse cromatiniche variabile da 1 a 8.

Inoculati nella cute ciascuno di essi si trasforma, come ha notato Missiroli, in corpi rotondeggianti multinucleati *liberi* che vengono assorbiti per via linfatica.

Da questo punto in poi i corpi in questione non sono più stati seguiti e si manca di notizie sicure sul loro destino nella circolazione generale e negli organi interni.

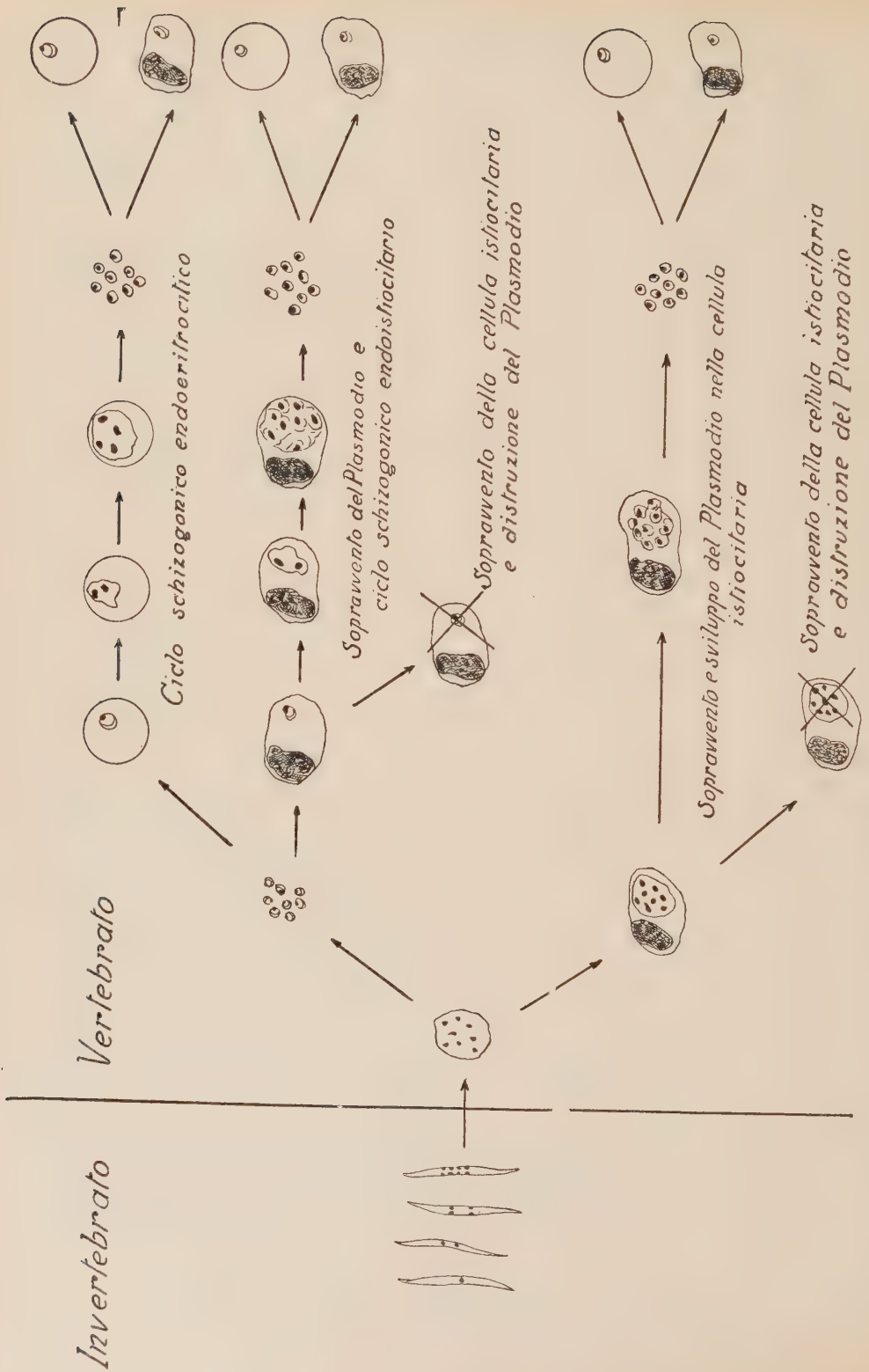
Tuttavia le ipotesi possibili sul loro destino ulteriore non possono essere che due:

1. I corpi in moltiplicazione derivati dagli sporozoiti proseguono *liberi* nel loro sviluppo e giungono, *sempre liberi*, a sporulare e a dare un certo numero di merozoiti.

2. I corpi in questione, che sono per l'ospite corpi estranei, vengono fagocitati da cellule appartenenti all'apparato reticolo endoteliale (macrofagi, monociti, cellule endoteliali). Penetrati nella cellula istiocitaria possono

(1) « Riv. Parass. », 2; 1938, pp. 23-37.

(2) « Riv. Parass. », 2; 1938, pp. 39-43.



venire distrutti, o prendere il sopravvento e proseguire nel loro sviluppo fino a dare un certo numero di merozoiti.

Le due ipotesi non si escludono ed è possibile che ambedue i fenomeni si verifichino parallelamente.

*Questo è un punto fondamentale di difficile chiarimento e che probabilmente richiederà una somma di ricerche non indifferente.*

I merozoiti liberati dal primo ciclo schizogonico possono andare incontro a tre diverse possibilità:

1. Penetrare nei globuli rossi e dare origine al ciclo schizogonico endoeritrocitico.

2. Essere fagocitati da cellule dell'apparato reticolo-endoteliale ed essere distrutti.

3. Essere fagocitati da cellule dell'apparato reticolo-endoteliale (o penetrarvi), prendere il sopravvento sulla cellula istiocitaria e svilupparvisi dando origine al ciclo endoistiocitario.

L'esistenza di due diversi cicli è oggi dimostrata per almeno quattro specie di Plasmodi. È anche dimostrato che i merozoiti derivati dal ciclo endoeritrocitico possono successivamente produrre il ciclo entro le cellule dell'apparato reticolo-endoteliale: infatti negli animali inoculati con sangue infetto il ciclo dell'apparato reticolo-endoteliale si verifica ugualmente. Analogamente è molto verosimile, benchè non se ne abbia ancora la prova assoluta, che i merozoiti derivati dal ciclo schizogonico che si verifica nelle cellule dell'apparato reticolo endoteliale possano infettare i globuli rossi.

Il ciclo ora descritto è uno schema generale che illustra le varie possibilità e che va quindi considerato come una ipotesi di lavoro da verificarsi punto per punto in ogni specie di Plasmodio.

Tenendo presente il fatto del diverso grado di adattamento di ciascuna specie di Plasmodio al rispettivo ospite, non è da meravigliarsi che il ciclo non si presenti colle stesse modalità nelle diverse specie di Plasmodi e che in alcune specie si osservi la contemporanea presenza dei due cicli schizogonici, in altre specie il ciclo schizogonico endoistiocitario sia scarso, transitorio, o assente, e che nel gruppo degli *Haemoproteus* sia assente invece il ciclo schizogonico endoeritrocitico.



**Fisiologia.** — *Nuove osservazioni sui riflessi condizionati dell'ammiccamento (per stimoli acustici)* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di G. MARTINO e A. ALIBRANDI, presentata dal Corrisp. C. CIACCIO.

Il riflesso dell'ammiccamento del cane, che consiste nella contrazione rapida dell'orbicolare palpebrale per effetto della stimolazione artificiale adeguata di una determinata zona cutanea riflessogena, è stato da noi utilizzato in questi ultimi anni per lo studio delle reazioni condizionate. L'associazione di stimoli sensoriali indifferenti (di varia natura) coll'atto del riflesso assoluto ci ha infatti consentito l'elaborazione di *riflessi condizionati dell'ammiccamento*.

L'analisi di tali reazioni condizionate ha fornito risultati non privi di interesse, particolarmente in relazione all'intimo meccanismo dei riflessi associativi. Dal Pavlov e dagli sperimentatori successivi si era sempre pensato che l'elaborazione di un atto riflesso condizionato avvenisse mercè la sostituzione della via afferente congenita (dell'arco del riflesso assoluto o incondizionato) con una nuova via centripeta (la condizionata); noi dimostrammo invece che per il manifestarsi della reazione associativa è indispensabile la pervietà della via afferente innata e che l'azione dell'eccitatore condizionato consiste nell'agevolazione (o facilitazione o *Bahnung*) del riflesso congenito. In altri termini, solo apparentemente l'eccitatore condizionato acquista la capacità di provocare lo stato attivo del centro riflesso; in realtà esso determina solo l'aumento dell'eccitabilità di quest'ultimo, e lo stato attivo del centro in ultima analisi è sempre promosso — nella reazione associativa esattamente come in quella congenita — dagli eccitamenti afferenti incondizionati (del riflesso assoluto). Vedemmo infatti che dopo la stovainizzazione della zona riflessogena dell'arco congenito gli stimoli condizionati — fotici <sup>(3)</sup> o acustici <sup>(4)</sup> — perdevano la capacità, già acquisita, di suscitare la reazione dell'ammiccamento; e vedemmo altresì che sotto l'azione dello stimolo condizionato aumentava l'eccitabilità faradica del centro riflesso (centro sigmoideo dell'orbicolare), e risultava favorita la provocazione in via riflessa del clono da stricninizzazione centrale, nonchè dell'accesso epilettiforme da eccitamenti

(1) Dall'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1938.

(3) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, *Analisi di un particolare riflesso condizionato (dell'ammiccamento), nel cane*. «Boll. Soc. it. Biol. sper.», 11, 1936, p. 763.

(4) A. ALIBRANDI, *Nuova conferma sperimentale per la necessaria partecipazione della via afferente congenita al meccanismo dei riflessi condizionati*. «Rend. R. Acc. Lincei», vol. XXVII, 1938, p. 479.

afferenti<sup>(1)</sup>. Un aumento dell'eccitabilità nel centro riflesso sotto l'azione di stimoli condizionati è stato pure riscontrato, in ricerche cronassimetriche, da Chauchard e Drabovitch<sup>(2)</sup>; ed un'altra (indiretta) conferma è fornita ancora da risultati sperimentali di G. Martino e E. Fulchignoni.

Era stata dimostrata, con precedenti osservazioni sperimentali eseguite in questo Istituto, l'esistenza di collegamenti funzionali tra un determinato punto della corteccia occipitale ed il centro sigmoideo per l'orbicolare palpebrale dello stesso emisfero, nel cane; per cui l'attività riflessa di quest'ultimo centro risultava facilitata dalla stricninizzazione diretta e circoscritta di quel punto della corteccia occipitale. Vennero allora elaborati in un cane due distinti riflessi condizionati dell'ammiccamento per stimoli luminosi: coll'occhio sinistro per luce rossa, col destro per luce violetta. Dopo stricninizzazione della corteccia occipitale dell'emisfero sinistro la luce violetta mostrava la capacità di provocare il clono dell'orbicolare destro e successivamente l'insorgenza (da questo muscolo) di accessi epilettiformi generalizzati, mentre invece nessun effetto si aveva per la stimolazione con luce rossa; dopo stricninizzazione della corteccia occipitale dell'emisfero destro si ottenevano, al contrario, scosse cloniche dell'orbicolare sinistro — e successivi accessi epilettiformi — per azione della luce rossa, ma non per la violetta. Ciò costituisce appunto un'altra dimostrazione dell'aumento di eccitabilità nel centro riflesso sensitivo-motore sotto l'azione dello stimolo luminoso condizionato (3).

Questo è dunque l'effettivo meccanismo delle reazioni associative. È ovvio infatti che, se l'eccitabilità centrale si esalta oltre certi limiti, allora anche eccitamenti afferenti minimi, ordinariamente inefficaci, come quelli che presumibilmente sempre viaggiano per la via centripeta dell'arco congenito possono rivelarsi sufficienti a suscitare lo stato attivo del centro riflesso<sup>(4)</sup>.

In altre ricerche<sup>(5)</sup>, eseguite sperimentando su di un cane educato ad un doppio riflesso condizionato dell'ammiccamento per segnali luminosi (luce violetta per un occhio, luce rossa per l'altro), fu possibile riconoscere alcuni effetti, riferibili alla *qualità* dello stimolo luminoso condizionato, sugli opposti processi dell'agevolazione e dell'inibizione. Precisamente,

(1) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, *L'attività riflessa dei centri sensitivo-motori corticali sotto l'azione di stimoli condizionati*. « Arch. di Fisiol. », 37, 1937, p. 534.

(2) A. et B. CHAUCHARD et W. DRABOVITCH, *La chronaxie de l'écorce cérébrale aux divers temps du réflexe conditionné*. « C. R. Soc. de Biol. », vol. II, 1936, p. 57.

(3) G. MARTINO e E. FULCHIGNONI, *Il fenomeno dell'agevolazione nell'epilessia riflessa da stricninizzazione occipitale, sotto l'azione di stimoli luminosi condizionati*. « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XXVII, 1938, p. 125; *Ueber die Bedeutung bedingter Reize (für den Bahnungsprozess) bei der durch Strychninisierung der occipitalen Rinde reflektorisch erzeugten Epilepsie*. « Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. », 240, 1938, p. 212.

(4) v. a. G. MARTINO, *Necessità dell'ordinaria via afferente, costante ed insostituibile nel meccanismo del riflesso associativo*. « Atti R. Acc. Peloritana », vol. XXXVIII, 1936, p. 67; *Sobre el mecanismo de los reflejos condicionados*. « Tribuna Universitaria », Asunción, Paraguay, 1936.

(5) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, *L'agevolazione e l'inibizione, in rapporto alla qualità dello stimolo luminoso nel riflesso condizionato dell'ammiccamento*. « Arch. di Fisiol. », 38, 1938, p. 200.

la luce rossa ( $\lambda = 7200-6000 \text{ \AA}$ ) si manifestò meno efficace della violetta ( $\lambda = 5500-4250 \text{ \AA}$ ) per l'elaborazione del riflesso associativo, e quest'ultimo risultò in quel caso meno resistente che in questo al fenomeno dell'inibizione interna (estinzione). Poichè la maggiore o minore efficacia dell'agente condizionato essenzialmente dipende dalla maggiore o minore sensibilità dell'analizzatore sensoriale, questo risultato dimostra che l'analizzatore ottico del cane è più sensibile ai raggi di lunghezza d'onda corrispondente a quella della nostra luce violetta piuttosto che ai raggi di  $\lambda$  corrispondente a quella della nostra luce rossa. Tale comportamento è presso a poco analogo a quello dell'analizzatore ottico dell'uomo<sup>(1)</sup>. Anche per il ripristino della reazione associativa già estinta si manifestò più efficace la luce violetta rispetto alla rossa; ed inoltre, nel caso della luce rossa gli eccitamenti mostrarono maggiore tendenza alla *irradiazione*, in quello della luce violetta maggiore tendenza alla *concentrazione*. Ciò che costituisce appunto la prova di una « differenza di energia », riferibile alla *qualità* dello stimolo luminoso.

Nel corso delle precedenti ricerche avevamo più volte rilevato una maggiore efficacia (cioè una « maggiore energia ») dei segnali sonori rispetto alle luci monocromatiche per l'elaborazione del nostro riflesso associativo; ciò che perfettamente concorda colle osservazioni eseguite dagli sperimentatori russi sul riflesso della secrezione salivare. Dopo le qui ricordate osservazioni sulla diversa efficacia di luci monocromatiche di differente lunghezza d'onda, parve opportuno esplorare comparativamente l'efficacia dei segnali sonori di diversa qualità.

Colla medesima tecnica altrove descritta<sup>(2)</sup> vennero contemporaneamente elaborati in un cane due riflessi condizionati dell'ammiccamento, e cioè per l'occhio sinistro colla nota  $mi^7$  (5520 vibrazioni) e per il destro colla nota  $fa^7$  (5568 vibrazioni). L'inizio della stimolazione acustica (eseguita a mezzo di un fischietto del Galton) precedeva esattamente di due secondi l'applicazione dello stimolo incondizionato (elettrofardico) sulla cute riflesso-gena. Nonostante fosse corrispondente ad appena un semitono l'intervallo fra le due note, il cane cominciò molto presto a discriminare i due segnali, cosicchè in breve tempo si ottennero risposte condizionate assolutamente corrette<sup>(3)</sup>. Il segnale  $mi^7$  si manifestò più efficace del  $fa^7$  per l'elaborazione del riflesso condizionato dell'ammiccamento, e questo risultò nel primo caso notevolmente più resistente che nel secondo al fenomeno dell'estinzione.

(1) G. MARTINO, *Sulla sensibilità dell'analizzatore ottico del cane per raggi luminosi di diversa lunghezza d'onda*. « Att. R. Acc. Peloritana », 1938.

(2) G. MARTINO e A. ALIBRANDI, loc. cit. in (4) a p. 168.

(3) È interessante evitare in questo tipo di esperimenti l'applicazione alterna, con ritmo costante, dei due segnali (e del successivo stimolo elettrofardico), poichè allora anche il ritmo può trasformarsi in agente condizionato della reazione motoria.

Nel corso dell'esperimento osservammo più volte tipici fenomeni d'inibizione esterna, per cui il riflesso associativo già consolidato si affievoliva o addirittura svaniva per effetto di rumori accidentalmente penetrati nel laboratorio; ed osservammo pure talvolta, in tali casi, una netta diminuzione del *potere di discriminazione*, per cui il cane rispondeva, per esempio, al segnale mi<sup>7</sup> colla contrazione dell'orbicolare destro ovvero al fa<sup>7</sup> con quella dell'orbicolare sinistro. Qualche rara volta fu dato di rilevare analoga diminuzione del potere discriminativo per effetto della stanchezza alla fine di qualche seduta eccessivamente prolungata. Effetti inibitori, che vanno logicamente imputati al rilasciamento dell'attenzione. L'applicazione di stimoli incondizionati (elettrofaradici) troppo intenso sulla cute riflessogena del riflesso incondizionato provocava la scomparsa delle successive reazioni condizionate. Questa ed altre osservazioni concordano con quanto è stato descritto dal *Pavlov* a proposito dell'inibizione nei riflessi associativi della secrezione salivare.

Durante l'elaborazione dei nostri due riflessi condizionati osservammo inoltre un progressivo abbassamento della soglia dello stimolo faradico per il riflesso incondizionato dell'ammiccamento a mano a mano che, per l'aumento del numero delle associazioni, progressivamente (presumibilmente) cresceva l'efficacia dei segnali sonori precedenti; cosicchè uno stimolo faradico, insufficiente a provocare da solo la contrazione riflessa dell'orbicolare palpebrale, diveniva efficace se preceduto da un segnale condizionale, esso pure ancora insufficiente a suscitare da solo la reazione dell'ammiccamento. Vediamo in questo risultato un'ulteriore dimostrazione degli effetti dell'agente sensoriale condizionato sull'eccitabilità del centro riflesso.



**Geografia.** — *Notizie idrografiche sui laghi dell'A. O. I.*  
Nota preliminare<sup>(1)</sup> di A. VATOVA, presentata dal Corrisp.  
G. BRUNELLI.

I laghi Galla da noi visitati tra il dicembre 1937 ed il maggio 1938, per incarico del prof. Brunelli, Direttore del R. Laboratorio di Idrobiologia di Roma, si seguono a varie quote da S a N sul fondo irregolare della grande doccia orografica dell'Auasc, posta tra la dorsale del Gughè (4200 m.) a W e l'altipiano somalo ad E e costituita in gran parte da rocce vulcaniche mesozoiche e da colate laviche recenti, di cui le sorgenti termali oggi esistenti sono l'ultima manifestazione.

Il principale lago esplorato è il Regina Margherita, lungo circa 75 km. e largo circa 35 km. nella parte settentrionale, più stretto (circa 15 km.) nella parte meridionale; questa presenta a N della barriera di isole e isolotti che lo attraversano da NW a SE una profonda strozzatura. Le sponde occidentali sono in qualche tratto rocciose o sabbiose, per lo più paludose, fasciate da *Herminiera Elaphroxylon* G. P. o coperte da piante palustri, mentre le sponde orientali sono in massima parte formate da densi quasi impenetrabili boschi di *Herminiera* e da vaste paludi malfide. Molto caratteristiche per il Margherita sono le isole galleggianti, consistenti in ammassi vegetali (per lo più *Typha*) del diametro da 0.5 a 10 m., che strappate alle paludi della sponda dal moto ondoso vanno, sospinte dal vento, vagando per il lago e ricoprono alle volte specialmente la parte settentrionale.

Le sue acque sono dolci, torbide, azzurro-giallastre, spesso con strie verde smeraldo verso la costa, dovute ad accumulo di plancton. Il suo fondo è melmoso, molle, grigio ed alberga una poverissima fauna bentonica. In base a 90 stazioni idrografiche possiamo stabilire con sufficiente esattezza la sua profondità, che è in genere più forte nella parte meridionale. Mentre infatti nella parte settentrionale si nota una profondità di 3-5 m. verso le sponde, e nella parte nord-occidentale una zona a profondità leggermente superiori ai 10 m., nella parte meridionale del lago si osservano già verso la costa profondità di 6-8 m. e verso l'asse mediano profondità superiori agli 11 m., con un nucleo sud occidentale di 12 m. La profondità massima di 13.1 m., venne constatata tra le isole Don Bosco e De Vito su fondo ciottoloso. Nella strozzatura le profondità vanno aumentando da E a O (6.1-9.6 m.). Dopo la stagione delle piogge il livello del lago aumenterebbe di circa  $1\frac{1}{2}$  m.

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1938.



Il lago Auasa, lungo da S a N circa 12.5 km., si continua a SW nella palude dello Scialo ed è circondato da una spiaggia con sabbia da pietra pomice e da qualche breve tratto paludoso o roccioso. L'acqua è dolce, leggermente torbida, giallastra; il suo fondo è per lo più costituito da una poltiglia rossastra, mollissima. La profondità va nella zona costiera da 4-9 m.; più al largo ed a N dello Scoglio Pulvirenti, già a poca distanza dalla costa si hanno profondità da 15 a 17 m., mentre verso NW vi è una zona centrale con profondità di 20 m. La massima profondità di 21.6 m. si osserva ad E dello Scoglio Pulvirenti.

Il più profondo e forse il più interessante lago esplorato è lo Sciala, lungo da E a O circa 27 km. e largo 12.5 km. Le sponde sono brulle, qua e là sabbiose con numerose sorgenti termali, per lo più sassoso-rocciose, ricoperte da boscaglia, con numerosi promotori a picco, per lo più nudi e ferrigni, che spingendosi verso il largo, alterano la sagoma quadrangolare del lago. Caratteristico tra altri isolotti lo Scoglio Nesazio, formato esclusivamente da colonne basaltiche. Le sue acque azzurre ricordano il mare; sono salmastro-amare, fortemente alcaline; quantunque bevute dal bestiame, albergano una fauna assai scarsa e vi mancano le formazioni di piante palustri così caratteristiche per altri laghi. Il fondo è melmoso, nerastro, simile a finissimo limo, ricco di  $H_2S$ .

La profondità che nella parte occidentale a sponde sabbiose, basse è di 10-45 m., va rapidamente aumentando verso il mezzo del lago a 95 e 164 m. e sorpassa nella parte orientale, circondata da alti roccioni a picco di pietra verde i 250 m.; quivi già a poca distanza dalla costa si constata profondità di 130-220 m. Il punto più profondo (266 m.) è situato nella parte nord orientale del lago.

A sud dello Sciala avvi il piccolo lago craterico di Zappalà.

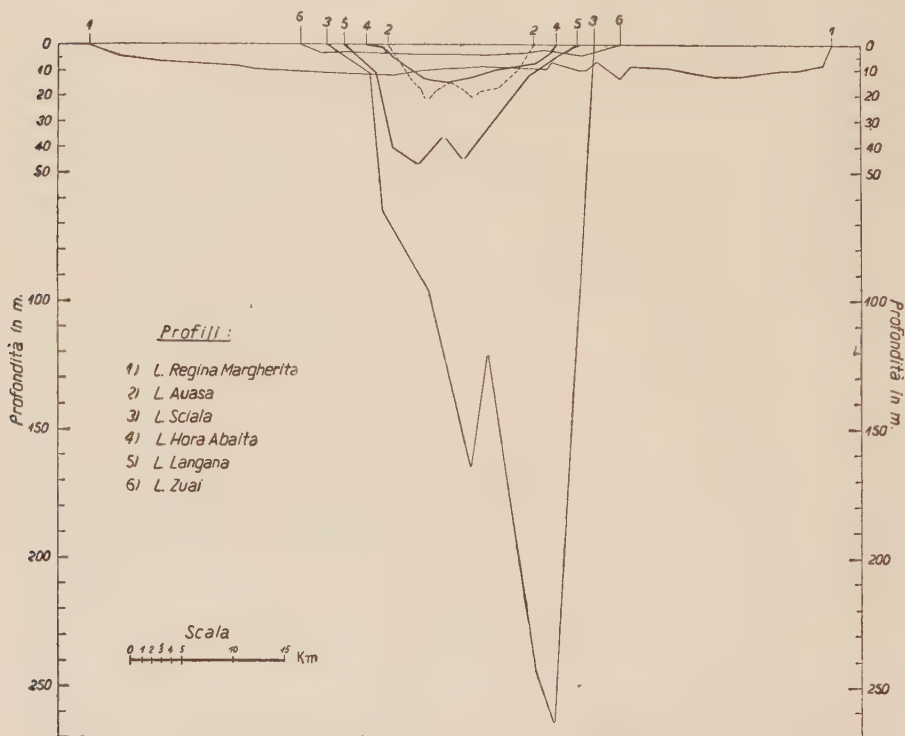
A nord dello Sciala, separato da una ampia e dirupata barriera rocciosa sulla quale s'erge maestoso il vulcano spento di Fichè, s'estende l'Hora Abaita, lungo 21 km. e largo circa 12 km. dall'acqua azzurro-grigia, torbida, salmastro-amara, molto alcalina, dalle sponde per lo più basse, sabbiose, che si continuano a nord in una immensa arida piana, coperta da graminee rigide e striscianti con qualche promontorio roccioso, che si spinge nel lago. Il fondo è per lo più melmoso, molle, grigiastro o bruno-nerastro con  $H_2S$ .

La zona costiera con profondità di 2-4 m. molto stretta nel tratto NW del lago risulta invece nel rimanente tratto di costa più ampia. Verso il mezzo del lago si estende un'ampia zona dove vennero osservate profondità da 10.6 a 14.2 m.; quest'ultima è la massima finora constatata.

Ad E dell'Hora Abaita incontrasi il Langana dalle coste per lo più rocciose con ampi tratti sabbiosi; presenta nel tratto NE varie e spesso profonde insenature. Ad occidente è separato dall'Hora Abaita da un lungo istmo roccioso, dirupato, coperto da cespugli, che va abbassandosi

verso N dove corre il tortuoso emissario, che trasporta le sue acque nell'Abaita.

L'acqua è dolce, torbida, grigiastrea; il suo fondo è per lo più melmoso, molle, giallastro o nerastro con  $H_2S$ . Le ampie baie a NE si rivelano poco profonde (1-7 m.), bassa è anche la zona costiera a NW; profonda quella a SE ed a E (18.7 m.). Grandi profondità di oltre 40 m. si osservano verso il centro del lago con un massimo di 46.2 m. verso S.



A N del Langana incontrasi il vasto e pittoresco lago Zuai, dalle sponde basse, paludose, fasciate da giganteschi sicomori e verso le foci del Machi a N ed a NE da *Herminiera Elaphroxylou* G. P. La sua massima lunghezza è di circa 33 km., la sua larghezza di 20 km. Possiede quattro grandi isole dai fianchi terrazati, abitate ed intensamente coltivate per lo più a grano turco (specialmente l'isola Tulugudu). L'acqua è dolce, torbida, giallastra; il suo fondo è per lo più melmoso, molle, grigiastro.

Lo Zuai è in generale assai basso: nella fascia costiera, ampia circa 7 km. la profondità non supera i 3 m., soltanto verso il mezzo del lago a NW della grossa isola di Tulugudu, si osservano profondità superiori ai 4 m. con un nucleo di circa 7 m. che è la massima profondità finora riscontrata.

Di minore importanza sono gli altri laghetti da noi esplorati sulla via del ritorno verso Asmara. Il primo è quello di Hora Arsodi, presso Ada, dal fondo melmoso, molle, verdastro con profondità massime di 38.7 m. Il lago Haic presso Dessiè dalle sponde per lo più sabbiose, è circondato da dossi collinosi, intensamente coltivati, cui fanno corona alte catene montuose. L'acqua è torbida, giallo-verdastra. Il fondo melmoso, nerastro, molle. Il lago risulta abbastanza profondo, poichè già verso la costa si hanno profondità da 13 a 42 m. Una zona molto profonda si estende da E verso NW con 65.9 m. ed a NE dell'Isola di Santo Stefano con 88.2 m.

Il piccolo Lago Ascianghi presso Quoram dall'acqua limpida, verdastra, circondato da catene montuose brulle e confinante a N con la pianura di Golgolà, ha sponde terroso-paludose con qualche promontorio roccioso. Il fondo è melmoso, molle, giallo, ricco di  $H_2S$ . La massima profondità si osserva verso la sponda E con 24.2-25.5 m.

U. A.

---



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1938 (Anno XVII).*

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

**Fisica.** — *Teoria termica della «fotoresistenza metallica».*  
Nota <sup>(1)</sup> del Socio Q. MAJORANA.

Come ho già riferito in Note precedenti, chiamo *fotoresistenza metallica*, l'aumento di resistenza elettrica che subisce una lamina metallica, quando è esposta alla luce. Tale effetto viene più facilmente constatato, mediante i dispositivi già descritti, se la luce è periodicamente interrotta.

Ho già detto che la pura azione termica della luce non basta a spiegare tutte le caratteristiche dell'effetto in parola. Può dunque essere interessante stabilire, in base alla classica teoria della propagazione del calore, la misura dell'effetto prevedibile per tale via, per vedere, in seguito, se e come una previsione del genere si scosti dai fatti realmente osservati. Una simile trattazione forma oggetto della presente Nota.

In conseguenza della grande conducibilità termica dei metalli, si può ammettere che lungo lo spessore  $\varepsilon$ , di una sottilissima lamina metallica ed in ogni istante, quando un flusso calorifico traversa tale spessore, non si abbia alcuna caduta termica. Ciò vale, almeno per le frequenze d'interruzione del fascio luminoso, usate nelle già descritte ricerche, e cioè dell'ordine di un migliaio di periodi a secondo.

Supponiamo ora dapprima, che sulla lamina cadano, in modo continuo, delle radiazioni, di qualsiasi lunghezza d'onda. Esse vengono parzialmente assorbite. Diciamo che ciò avvenga nella misura di  $W$  calorie per  $\text{cm}^2$

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1938.



della lamina e per secondo. Se invece, le dette radiazioni vengono rese periodiche, mediante un disco a tagli radiali, possiamo ammettere che l'interruzione avvenga con legge sinusoidale e con la frequenza angolare  $\omega$ . Questo risultato può raggiungersi con sufficiente approssimazione, conformando opportunamente i tagli del disco ed il profilo della lamina metallica.

Col detto artificio, l'energia  $w$ , che così vien ceduta alla lamina in ogni unità di tempo, da costante diviene variabile e si può indicare con l'espressione:

$$w = \frac{W}{2} (1 + \cos \omega t).$$

Sotto l'azione di questa energia termica, la temperatura della lamina va sopraelevandosi, rispetto all'ambiente, fintanto che il suo regime diventa permanente, in conseguenza della dispersione esterna. Così, si può dire che l'energia assorbita dalla lamina nell'unità di tempo, sia espressa da:

$$(1) \quad q = A \cos \omega t,$$

essendo  $A = W/2$ . Questa relazione stabilisce la pulsazione dell'energia termica posseduta dalla lamina. Tale energia, perciò, si accresce durante mezzo periodo, e diminuisce durante l'altro; ciò dicasi, per quanto, assorbimento e dispersione della detta energia verso l'esterno, avvengano continuamente in modo periodico e con fasi opposte.

In tali condizioni, la temperatura della lamina pulsa con un'ampiezza  $T_m$ , intorno ad una certa temperatura, alquanto superiore a quella dell'ambiente esterno. La fase di tale fenomeno periodico è in ritardo, rispetto a quella della pulsazione luminosa, per l'angolo  $\varphi$ . Ai fini della presente trattazione, interessa determinare soltanto  $T_m$  e  $\varphi$ .

Per procedere a ciò, occorre precisare le condizioni secondo cui avviene la dispersione, verso l'esterno, del calore assorbito dalla lamina. Questa è fissata, mediante un adesivo, su di un supporto termicamente semi-isolante, di solito di vetro. Tale adesivo ha spessore che si può considerare praticamente nullo. Il calore che si sviluppa nella lamina, in conseguenza dell'assorbimento delle radiazioni, si disperde verso il detto supporto; ed in piccolissima parte verso l'aria. L'esperienza fa vedere che i fenomeni osservabili mutano molto sensibilmente, con le caratteristiche dello strato adesivo. Questo, pur essendo, come si è detto, di spessore trascurabile, può presentare una certa conducibilità termica finita  $\eta$ ; mentre la sua capacità termica è praticamente nulla. Se lo strato adesivo manca ed il contatto tra lamina metallica e vetro è perfetto, come nel caso delle lamine ottenute per precipitazione catodica, si deve ammettere  $\eta = \infty$ .

Il coefficiente di dispersione del calore della lamina dalla parte esposta alla luce, cioè verso l'aria, è assai piccolo di fronte ad  $\eta$  e lo si indichi con  $h$ .

Sia ora  $\rho$  la densità,  $c$  il calore specifico del metallo;  $\delta, e$ , le analoghe grandezze per il vetro. Diciamo  $C = c\rho e$  la capacità termica della lamina per ogni  $\text{cm}^2$ ;  $E = e\delta$ , la capacità termica del vetro per ogni  $\text{cm}^3$ . Sia ancora  $k$  la conducibilità termica del vetro.

La parte variabile della temperatura della lamina può indicarsi con

$$(2) \quad T = M \cos \omega t + N \sin \omega t,$$

essendo  $M, N$  delle costanti, incognite.

La superficie anteriore del vetro, che trovasi a contatto più o meno perfetto con la lamina, ha una temperatura, pure variabile,  $T'_0$ , alquanto differente; ciò, in conseguenza della scarsa conducibilità termica dell'adesivo e della notevole propagazione del calore nel vetro. Potremo dire:

$$(3) \quad T'_0 = P \cos \omega t + Q \sin \omega t,$$

essendo  $P, Q$  altre due costanti incognite. In generale:

$$\frac{N}{M} \neq \frac{Q}{P},$$

perchè le fasi delle pulsazioni termiche del metallo e della superficie del vetro sono differenti.

Il ritardo di fase  $\varphi$  cercato, corrisponde a:

$$(4) \quad \tan \varphi = \frac{N}{M};$$

l'ampiezza massima della pulsazione termica della lamina è data da:

$$(5) \quad T_m = \sqrt{M^2 + N^2}.$$

Si tratta di trovare quattro equazioni che permettano di determinare  $M, N, P, Q$ . Si osservi anzitutto, che il calore assorbito dalla lamina è impiegato in parte ad aumentarne la temperatura ed in parte viene disperso verso l'aria ed il vetro. Si ha così:

$$(6) \quad A \cos \omega t = C \frac{dT}{dt} + bT + \eta(T - T'_0).$$

Da questa, per le (2) e (3), ed eguagliando i coefficienti di  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$ , si deducono due delle quattro equazioni cercate:

$$(I) \quad A = C\omega N + (b + \eta)M - \eta P,$$

$$(II) \quad 0 = -C\omega M + (b + \eta)N - \eta Q.$$

Per ottenere le altre due, si deve esaminare il modo con cui avviene la propagazione del calore dentro il vetro. Essendo conosciuta la temperatura  $T'_0$  di questo alla sua superficie, quella alla profondità  $x$  si ottiene con procedimento noto, ed è espressa da:

$$(7) \quad T'_x = e^{-\alpha x} [(P \cos \alpha x - Q \sin \alpha x) \cos \omega t + (Q \cos \alpha x + P \sin \alpha x) \sin \omega t],$$

dove:

$$\alpha = \sqrt{\frac{E\omega}{2k}}.$$

Si deve ora eguagliare la quantità di calore trasmessa dalla lamina alla superficie del vetro, con quella che, da questa superficie, penetra verso l'interno. Si ha così:

$$\eta (T - T'_0) = -k \left( \frac{\partial T'}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

Sostituendo, mediante (2), (3) e (7), eguagliando al solito i coefficienti di  $\cos \omega t$  e  $\sin \omega t$  e ponendo:

$$p = \sqrt{\frac{E k \omega}{2}},$$

si hanno le altre due equazioni cercate:

$$(III) \quad \eta (M - P) = p (P + Q),$$

$$(IV) \quad \eta (N - Q) = p (Q - P).$$

Le quattro equazioni (I), (II), (III), (IV) debbono permettere di determinare  $M, N, P, Q$ . Per avere, poi,  $T$  e  $\varphi$ , basta servirsi di (5) e (4).

Le scritte equazioni sono così soddisfatte dalle seguenti espressioni:

$$(8) \quad T_m = \frac{A}{\sqrt{\left[ C\omega + p \frac{\eta^2}{(p + \eta)^2 + p^2} \right]^2 + \left[ b + p \frac{2p\eta + \eta^2}{(p - \eta)^2 + p^2} \right]^2}} =$$

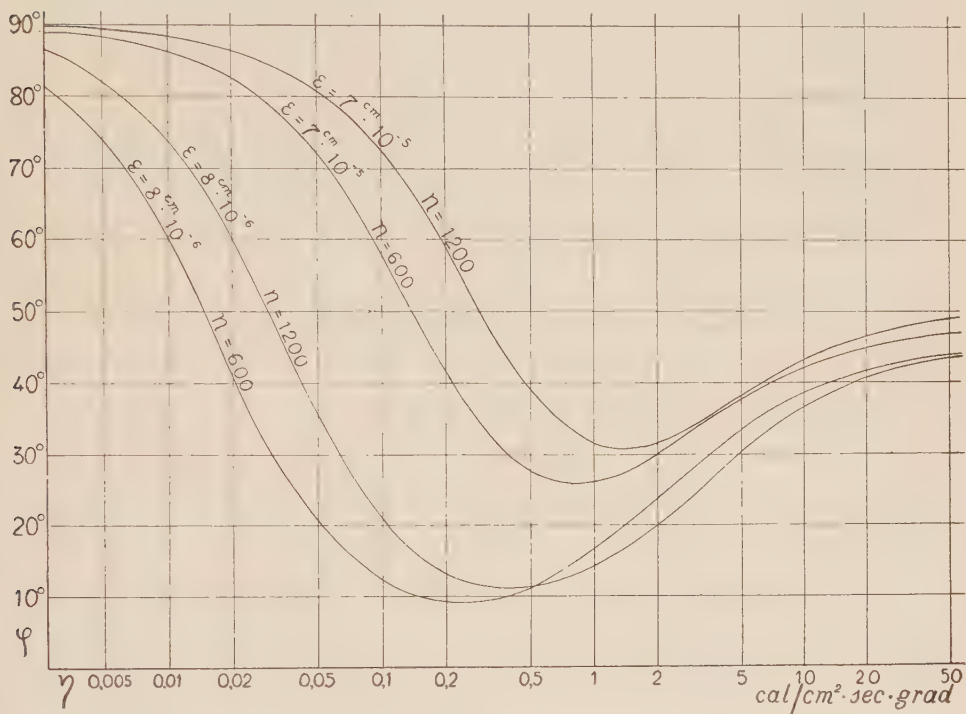
$$= \frac{A \cos \varphi}{b + p \frac{2p\eta + \eta^2}{(p + \eta)^2 + p^2}},$$

$$(9) \quad \text{tang } \varphi = \frac{C\omega + p \frac{\eta^2}{(p + \eta)^2 + p^2}}{b + p \frac{2p\eta + \eta^2}{(p + \eta)^2 + p^2}}.$$

Per chiarire il significato delle precedenti formule, si può farne una rappresentazione grafica, al variare di qualcuno dei parametri in esse con-

tenuti. È più interessante e semplice far ciò per la (9), la quale formula dà il valore di  $\varphi$ , che, come si vede da essa, e come è confermato sensibilmente dall'esperienza, è indipendente dalla quantità  $A$  di calore assorbita dalla lamina, ossia anche dall'intensità delle radiazioni che battono su questa.

Mi riferisco al caso sperimentale che ha formato oggetto delle precedenti Note: lamine d'oro fissate su vetro. Si possono scegliere i seguenti valori per i vari parametri già indicati:  $\rho = 19.2$  ;  $\delta = 2.51$  ;  $c = 0.030$  ;



$e = 0.21$  ;  $k = 0.0017$  ;  $h = 0.00018$ . Fra questi, gli ultimi due (conducibilità interna termica del vetro, ed esterna dell'oro immerso nell'aria) presentavano maggiore incertezza. Ho perciò, con metodo diretto, determinato  $k$  per lo speciale vetro usato;  $h$ , per la sua piccolezza, ha poca importanza e ne ho tratto il valore dai manuali correnti. Sono state scelte due frequenze di interruzione del raggio luminoso: 600 e 1200; da cui si hanno i due valori di  $\omega$ . Nella (9), restano così variabili  $\varphi$  e  $\eta$ . Sperimentalmente, come si disse, nessuna previsione si può fare del valore di  $\eta$ . Suppongo qui che esso possa variare tra i limiti estesi: 50 e 0.005 p. calorie per  $\text{cm}^2$  di lamina, per secondo, e per grado di differenza termica tra metallo e superficie anteriore del vetro. Si costruiscono così per punti, i grafici della figura, per le due frequenze suddette e per due differenti spessori di

lamina d'oro: 0.08 e 0.7 micron. Nel calcolo dei punti di tali diagrammi, è stato trascurato il valore di  $h$ . Ciò è perfettamente lecito, dentro i limiti di approssimazione grafica. I diagrammi sono riferiti ai valori di  $\eta$  riportati in iscala logaritmica, per dar maggior risalto a ciò che avviene per i piccoli valori; ed ai gradi d'arco segnati in iscala lineare, da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Essi presentano un minimo, che, per lamine di  $0.08 \mu$ , è di circa  $10^\circ$ . Sono asintotici, in causa della rappresentazione logaritmica ad una parallela alle ascisse di ordinata  $90^\circ$ , per  $\eta$  tendente a zero (ossia isolamento infinito). Dal lato dei grandi valori di  $\eta$  sono ancora asintotici (e lo sarebbero anche per una rappresentazione lineare di  $\eta$ ) ad un'ordinata prossima a  $45^\circ$ , ma alquanto superiore a tale valore, per  $\eta$  tendente all'infinito (conducibilità perfetta, come per le lamine catodiche).

Se si suppone permanentemente  $\eta = \infty$ , le formule (8) e (9) si semplificano, tanto più che allora diventa del tutto trascurabile il valore di  $h$ . Le pulsazioni termiche della lamina si incanalano, in tal caso, quasi esclusivamente nel vetro. Le dette formule diventano:

$$(10) \quad T_m = \frac{A}{\sqrt{(C\omega + p)^2 + p^2}} = \frac{A \cos \varphi}{p},$$

$$(11) \quad \tan \varphi = 1 + \frac{C\omega}{p}.$$

Due diagrammi corrispondenti alla valutazione teorica di  $\varphi$ , fatta mediante la formula (11), sono già stati tracciati nella figura della Nota precedente, e messi così in raffronto con quelli sperimentali.

Il procedimento sperimentale per osservare gli effetti di fotoresistenza, già precedentemente descritto, consiste nel rilevare le caratteristiche di una corrente elettrica variabile, sia servendosi della ascoltazione telefonica, sia mediante opportuni strumenti di misura. Tali caratteristiche dipendono, fra l'altro, dai valori di  $T_m$  e di  $\varphi$ , ora previsti teoricamente, appoggiandosi alla semplice ipotesi termica. La corrispondenza tra la pulsazione di  $T$  e quella della detta corrente elettrica, si basa sull'ammissione di una variazione lineare della resistenza del metallo impiegato, colla temperatura; e sulla trascurabilità degli effetti induttivi di quella corrente, nel circuito stesso della lamina.

In una successiva Nota, mostrerò sino a qual punto la esposta teoria possa applicarsi ai risultati sperimentali, precedentemente esposti.



## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico.* Nota I<sup>(1)</sup> di CATALDO AGOSTINELLI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. In una Nota precedente<sup>(2)</sup>, occupandomi del problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico, problema che, com'è noto, è strettamente connesso colla teoria delle aurore boreali<sup>(3)</sup>, dopo aver stabilito un nuovo integrale primo delle equazioni del moto, il quale esprime la velocità areolare del punto mobile P intorno all'asse polare  $O_1 O_2$ , in funzione della sua posizione, ho ridotto la questione a quella del moto di un punto nel semipiano  $P(O_1 O_2)$ , sotto l'azione di una forza conservativa e posizionale, e quindi a determinare un integrale, con una nuova costante arbitraria, dell'equazione di Jacobi

$$(1) \quad (u^2 - a^2) \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + (u^2 - v^2) \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 + \Phi(u) + \Psi(v) - \\ - 2h(u^2 - v^2) = \frac{a^2 \mu^2 v^2}{u^2 - v^2},$$

nella quale, essendo  $r_1, r_2$ , rispettivamente le distanze del punto P dai due poli  $O_1, O_2$ , è

$$u = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad v = \frac{1}{2}(r_1 - r_2);$$

$$(2) \quad \Phi(u) = \frac{a^2(c^2 - 2\mu cu + \mu^2 a^2)}{u^2 - a^2}, \quad \Psi(v) = \frac{a^2 c^2}{a^2 - v^2}.$$

Inoltre,  $a$  è la semidistanza dei due poli;  $h$  è la costante delle forze vive, e più precisamente  $h = \frac{1}{2}v_0^2$ , essendo  $v_0$  il valore numerico, costante, della velocità del punto nobile;  $c$  è la costante dell'integrale primo trovato;

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1938.

(2) C. AGOSTINELLI, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico*. «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino», vol. 73, 1937-38.

(3) Cfr. l'Articolo di G. ARMELLINI, *Le aurore boreali*. «Scienza e Tecnica, Rivista della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», vol. 2°, fasc. 3°, marzo 1938.

infine,  $\mu = \frac{2ek}{am}$  è anch'essa una costante, che dipende, oltre che da  $a$ , dalla massa  $m$  del corpuscolo, dalla sua carica elettrica  $e$ , e dalla costante magnetica  $k$  del dipolo.

Della (1), nella stessa Nota citata, ho data una soluzione approssimata, nell'ipotesi che il rapporto  $\frac{\mu a}{c} = \frac{2ek}{mc}$ , che è un puro numero, sia, in valore assoluto, sufficientemente piccolo da poterne trascurare il quadrato in confronto dell'unità.

Riprendendo la questione mi sono proposto di assegnare qui, per qualsiasi valore della costante  $c$ , e mediante una serie assolutamente convergente, per  $u, v$  variabili entro limiti opportuni, un integrale della (1) con una nuova costante arbitraria.

Con esso, per quanto ho osservato, il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico, entro i limiti di variabilità assegnati per le coordinate  $u, v$ , è da ritenersi risolto.

2. Per raggiungere lo scopo prefisso, invece della (1), consideriamo l'equazione

$$(3) \quad (u^2 - a^2) \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + (a^2 - v^2) \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 + \Phi(u) + \Psi(v) - \\ - 2b(u^2 - v^2) = \lambda \frac{a^2 \mu^2 v^2}{u^2 - v^2},$$

ove  $\lambda$  è un parametro arbitrario, che porremo in seguito uguale all'unità per avere la soluzione cercata della (1).

Considerando la  $W$  come funzione di  $\lambda$ , sviluppiamola in serie intera, ordinata secondo le potenze crescenti di  $\lambda$ , ponendo cioè,

$$(4) \quad W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \lambda^3 W_3 + \dots,$$

e determiniamo le funzioni  $W_0, W_1, W_2, W_3, \dots$ , di  $u, v$  in modo che la serie (4) soddisfi formalmente all'equazione (3), con  $W_0$  contenente una costante arbitraria, mentre le  $W_1, W_2, W_3, \dots$  siano tali che, per  $u$  uguale al suo valore iniziale  $u_0$ , esse si annullino identicamente.

Ciò posto calcoliamo, mediante la (4), le derivate parziali  $\frac{\partial W}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial v}$ , formiamo i quadrati delle serie così ottenute, ordinandoli secondo le potenze crescenti del parametro  $\lambda$ , e sostituiamo quindi nella (3). Dopo aver eguagliato i coefficienti del primo e del secondo membro, corrispon-

denti alle potenze di  $\lambda$  collo stesso esponente, si ha il seguente sistema di equazioni:

$$(5) \quad (u^2 - a^2) \left( \frac{\partial W_o}{\partial u} \right)^2 + (a^2 - v^2) \left( \frac{\partial W_o}{\partial v} \right)^2 + \Phi(u) + \Psi(v) - \\ - 2h(u^2 - v^2) = 0,$$

$$(6) \quad (u^2 - a^2) \frac{\partial W_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial W_I}{\partial u} + (a^2 - v^2) \frac{\partial W_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial W_I}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \mu^2 v^2}{u^2 - v^2},$$

$$(6') \quad \left. \begin{aligned} (u^2 - a^2) \frac{\partial W_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial u} + (a^2 - v^2) \frac{\partial W_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial v} &= F_1, \\ \dots\dots\dots \\ (u^2 - a^2) \frac{\partial W_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial W_{2n}}{\partial u} + (a^2 - v^2) \frac{\partial W_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial W_{2n}}{\partial v} &= F_{2n-1}, \\ (n = 2, 3, \dots), \\ (u^2 - a^2) \frac{\partial W_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial W_{2n+1}}{\partial u} + (a^2 - v^2) \frac{\partial W_0}{\partial v} \cdot \frac{\partial W_{2n+1}}{\partial v} &= F_{2n}, \\ (n = 1, 2, 3, \dots), \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

ove per semplicità si è posto

$$(7) \quad -F_I = \frac{I}{2} (u^2 - a^2) \left( \frac{\partial W_I}{\partial u} \right)^2 + \frac{I}{2} (a^2 - v^2) \left( \frac{\partial W_I}{\partial v} \right)^2,$$

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} -F_{2n-1} &= (u^2 - a^2) \left[ \frac{\partial W_1}{\partial u} \frac{\partial W_{2n-1}}{\partial u} + \frac{\partial W_2}{\partial u} \frac{\partial W_{2n-2}}{\partial u} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W_{n-1}}{\partial u} \frac{\partial W_{n+1}}{\partial u} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_n}{\partial u} \right)^2 \right] + (a^2 - v^2) \left[ \frac{\partial W_1}{\partial v} \frac{\partial W_{2n-1}}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W_2}{\partial v} \frac{\partial W_{2n-2}}{\partial v} + \dots + \frac{\partial W_{n-1}}{\partial v} \frac{\partial W_{n+1}}{\partial v} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_n}{\partial v} \right)^2 \right], \\ &\quad (n = 2, 3, \dots), \\ -F_{2n} &= (u^2 - a^2) \left[ \frac{\partial W_1}{\partial u} \frac{\partial W_{2n}}{\partial u} + \frac{\partial W_2}{\partial u} \frac{\partial W_{2n-1}}{\partial u} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W_n}{\partial u} \frac{\partial W_{n+1}}{\partial u} \right] + (a^2 - v^2) \left[ \frac{\partial W_1}{\partial v} \frac{\partial W_{2n}}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial W_2}{\partial v} \frac{\partial W_{2n-1}}{\partial v} + \dots + \frac{\partial W_n}{\partial v} \frac{\partial W_{n+1}}{\partial v} \right], \\ &\quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\}$$

L'equazione (5) si integra evidentemente per separazione di variabili, dopo di che l'equazione (6), che è lineare nelle derivate di  $W_1$ , permette di determinare la funzione  $W_1$ . Nota la funzione  $W_1$ , mediante la (7) risulta nota la funzione  $F_1$ , e perciò la prima delle equazioni (6'), che è anch'essa lineare, consente di determinare la funzione  $W_2$ .

Così continuando, e avendo riguardo alle (8), le funzioni

$$W_3, \dots, W_{2n}, W_{2n+1}, \dots,$$

si ottengono integrando successivamente le equazioni del sistema (6'), che sono tutte lineari rispetto alle derivate delle funzioni incognite.

3. Incominciando allora dalla equazione (5) e ponendo

$$(9) \quad W_0 = U_0(u) + V_0(v),$$

ove  $U_0$  è funzione della sola  $u$ , e  $V_0$  funzione soltanto di  $v$ , si può scrivere,

$$\begin{aligned} (u^2 - a^2) \left( \frac{dU_0}{du} \right)^2 + \Phi(u) - 2bu^2 = \\ = - \left[ (a^2 - v^2) \left( \frac{dV_0}{dv} \right)^2 + \Psi(v) + 2bv^2 \right] = -\alpha, \end{aligned}$$

con  $\alpha$  costante arbitraria, e quindi

$$(10) \quad U_0 = \int_u^{u_0} \sqrt{\frac{2bu^2 - \Phi(u) - \alpha}{u^2 - a^2}} du, \quad V_0 = \int_v^{v_0} \sqrt{\frac{\alpha - \Psi(v) - 2bv^2}{a^2 - v^2}} dv.$$

Per la determinazione della funzione  $U_0$  si è assunto negativo il valore di  $\frac{dU_0}{du}$ , per far sì che nel moto incipiente, durante il quale la coordinata  $u$  si suppone decrescente, la funzione  $U_0$  risulti invece crescente.

Convien inoltre osservare che, dovendo essere

$$0 \leq |v| \leq a,$$

la funzione  $\Psi(v) = a^2 c^2 / (a^2 - v^2)$ , è sempre positiva, e poichè  $b = \frac{1}{2} v_0^2$ , è costante essenzialmente positiva, dalla seconda delle (10) segue che, per la realtà del problema, la costante  $\alpha$  deve essere essenzialmente positiva.

L'equazione (6) diventa ora

$$(6_1) \quad (u^2 - a^2) \frac{dU_0}{du} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial u} + (a^2 - v^2) \frac{dV_0}{dv} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \mu^2 v^2}{u^2 - v^2},$$

ovvero, per le (10),

$$- \sqrt{(u^2 - a^2) [2hu^2 - \Phi(u) - \alpha]} \frac{\partial W_1}{\partial u} + \\ + \sqrt{(a^2 - v^2) [\alpha - \Psi(v) - 2hv^2]} \frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \mu^2 v^2}{u^2 - v^2},$$

che equivale, com'è noto, al seguente sistema di equazioni simultanee

$$(11) \quad - \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{dv}{\sqrt{g(v)}} = \frac{dW_1}{F_0},$$

ove si è posto

$$(12) \quad \begin{cases} f(u) = (u^2 - a^2) [2hu^2 - \Phi(u) - \alpha], \\ g(v) = (a^2 - v^2) [\alpha - \Psi(v) - 2hv^2], \end{cases}$$

$$(12') \quad F_0 = \frac{1}{2} \frac{a^2 \mu^2 v^2}{u^2 - v^2}.$$

Per integrare il sistema (11) poniamo

$$(13) \quad \xi = \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \quad , \quad \eta = \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{\sqrt{g(v)}},$$

e osserviamo che, essendo per le (2) e (12)

$$(12'') \quad \begin{cases} f(u) = 2hu^4 - (2ha^2 + \alpha)u^2 + 2\mu ca^2u - a^2(c^2 + \mu^2 a^2 - \alpha), \\ g(v) = 2hv^4 - (2ha^2 + \alpha)v^2 + a^2(\alpha - c^2), \end{cases}$$

gli integrali (13) risultano integrali ellittici. Le coordinate  $u, v$  sono perciò esprimibili rispettivamente mediante funzioni ellittiche di  $\xi$  e di  $\eta$ . Ciò fatto il sistema (11) diventa

$$(11') \quad d\xi = d\eta = \frac{dW_1}{F_0[u(\xi), v(\eta)]}.$$

La 1<sup>a</sup> di queste equazioni porge

$$(14) \quad \eta = \xi + C,$$

con  $C$  costante, e per conseguenza dalla seconda delle (11') si ricava

$$W_1 = \int_{\xi_0}^{\xi} F_0[u(\xi), v(\xi + C)] d\xi + C_1,$$



cioè, indicando con  $\zeta$  la variabile di integrazione, ponendo la costante  $C_1$  uguale a una funzione arbitraria  $\Gamma_1(C)$ , e tenendo conto della (14), si ha

$$W_1 = \int_{\xi_0}^{\xi} F_0[u(\zeta), v(\zeta + \eta - \xi)] d\zeta + \Gamma_1(\eta - \xi),$$

che è l'integrale generale del sistema (11'), cioè della (6<sub>1</sub>).

Essendo  $\xi_0$  il valore di  $\xi$  per  $u = u_0$ , risulta, per la prima delle (13),  $\xi_0 = 0$ , e dovendo essere  $W_1 = 0$ , per  $u = u_0$ , dovremo porre  $\Gamma_1 = 0$ .

Si ha pertanto, per la (12')

$$(15) \quad W_1 = \frac{1}{2} a^2 \mu^2 \int_0^{\xi} \frac{v^2(\zeta + \eta - \xi)}{u^2(\zeta) - v^2(\zeta + \eta - \xi)} d\zeta.$$

In modo perfettamente analogo si vede che le equazioni (6') equivalgono ai seguenti sistemi di equazioni simultanee

$$(16) \quad -\frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{dv}{\sqrt{g(v)}} = \frac{dW_i}{F_{i-1}}, \quad (i = 2, 3, 4, \dots),$$

i quali porgono

$$(17) \quad W_i = \int_0^{\xi} F_{i-1}[u(\zeta), v(\zeta + \eta - \xi)] d\zeta, \quad (i = 2, 3, 4, \dots),$$

che è la formula ricorrente, la quale avendo riguardo alle (7) ed (8), fornisce successivamente le funzioni  $W_2, W_3, \dots$ , che si annullano per  $\xi = 0$ , cioè per  $u = u_0$ .

**Matematica.** — *Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico.* Nota II <sup>(1)</sup> di C. AGOSTINELLI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

4. Continuando lo studio iniziato nella Nota I, determiniamo ora i limiti entro cui la serie (4) converge assolutamente, e a tal fine esaminiamo intanto le funzioni  $f(u)$ ,  $g(v)$ , definite dalle (12'').

Incominciando dalla prima si vede facilmente che risulta

$$f(a) = -a^2(c - \mu a)^2 \quad ; \quad \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = +\infty,$$

e quindi, per  $c \neq \mu a$ , essendo  $f(a) < 0$ , ed  $f(u \rightarrow \infty) > 0$ , l'equazione  $f(u) = 0$  possiede certamente una radice reale compresa fra  $a$  e  $+\infty$ , contenuta cioè nell'intervallo di variabilità della coordinata  $u$ . Se ne possiede più di una, queste dovranno essere in numero dispari; cioè la  $f(u) = 0$  possiederà o una, o tre radici reali (distinte o coincidenti), comprese nell'intervallo  $(a, +\infty)$ .

Si può osservare che se la costante  $c$  è positiva ed è  $\alpha > c^2 + \mu^2 a^2$ , la  $f(u) = 0$ , per la regola dei segni di Cartesio, possiede al più due radici reali positive, e in questo caso nell'intervallo  $(a, +\infty)$  cadrà una sola radice dell'equazione  $f(u) = 0$ .

Nello stesso modo si vede che se  $c < 0$ , ed  $\alpha < c^2 + \mu^2 a^2$ , si ha una sola radice reale positiva, e questa cade certamente nell'intervallo  $(a, +\infty)$ .

Se in questo intervallo vi sono tre radici, e siano in ordine crescente  $u'$ ,  $u''$ ,  $u'''$ , allora per

$$a \leq u < u', \quad \text{ed} \quad u'' < u < u''',$$

risulterà  $f(u) < 0$ , e quindi per la realtà del problema, gli intervalli  $(a, u')$ ,  $(u'', u''')$  devono escludersi. Resteranno perciò da considerare gli intervalli  $(u', u'')$ ,  $(u''', +\infty)$ , entro i quali è  $f(u) > 0$ . Allora, a seconda che

$$u' < u_0 < u'', \quad \text{oppure} \quad u''' < u_0,$$

essendo  $u^*$  un numero positivo tale che nel primo caso si abbia  $u' < u^* < u_0$ , e nel secondo  $u''' < u^* < u_0$ , per

$$(18) \quad u^* \leq u \leq u_0,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1938.

risulterà  $f(u) > 0$ , e chiamando  $A^2$  il più piccolo dei valori che la funzione  $f(u)$  assume nell'intervallo (18), si avrà

$$(19) \quad \sqrt{f(u)} \geq A > 0.$$

È chiaro che se l'equazione  $f(u) = 0$  ha, nell'intervallo  $(a, +\infty)$ , una sola radice, e questa sia  $u_1$ , il numero  $u^*$  va scelto in modo che si abbia

$$u_1 < u^* < u_0.$$

È utile osservare che, relativamente al problema del moto dei corpuscoli elettrizzati lanciati dalle macchie solari verso la terra, determinando le aurore boreali, essendo  $u_0$  molto grande, gli intervalli da considerare sono, a seconda dei casi  $(u'', +\infty)$ , oppure  $(u_1, +\infty)$ .

In ogni modo la discussione fatta rivela che quando l'equazione  $f(u) = 0$  ammette tre radici reali  $u', u'', u'''$  (con  $a < u' < u'' < u'''$ ), comprese fra  $a$  e  $+\infty$ , ed è  $u_0$  compreso fra  $u'$  ed  $u''$ , si può realizzare un moto del corpuscolo nel quale la coordinata  $u$  varia alternativamente tra  $u'$  ed  $u''$ . Abbiamo escluso il caso in cui si abbia  $c = \mu a$ . Se ciò avviene risulta  $f(a) = 0$ , e quindi si ha  $u' = a$ , oppure  $u_1 = a$ , ed è ovvio come in questo caso va scelto il numero  $u^*$ .

5. Passiamo ora a considerare la funzione

$$g(v) = 2hv^4 - (2ha^2 + \alpha)v^2 + a^2(\alpha - c^2).$$

Da questa si ricava

$$g(0) = a^2(\alpha - c^2) \quad ; \quad g(\pm a) = -a^2c^2 \quad ; \quad \lim_{v \rightarrow \pm \infty} g(v) = +\infty;$$

e si vede facilmente che se  $\alpha < c^2$ , con  $c \neq 0$ , l'equazione  $g(v) = 0$ , possiede solo due radici reali comprese negli intervalli  $(-\infty, -a)$ ,  $(a, +\infty)$ , e allora nell'intervallo  $(-a, +a)$ , in cui deve variare la  $v$ , risulta  $g(v) < 0$ . Questo caso, per la realtà del problema, deve escludersi, e deve essere pertanto

$$(20) \quad \alpha > c^2.$$

Essendo  $\alpha > c^2$ , la  $g(v) = 0$  ha tutte e quattro le radici reali, a due a due eguali e di segno contrario, due comprese nell'intervallo  $(-a, a)$ , che indichiamo con  $-v_1$  e  $v_1$  ( $0 < v_1 < a$ ), e le altre due esterne a questo intervallo.

Se allora  $v^*$  è un numero positivo, compreso fra zero e  $v_1$ , ( $0 < v^* < v_1$ ), per

$$(21) \quad 0 \leq |v| \leq v^*,$$

si avrà  $g(v) > 0$ , e detto  $B^2$  il più piccolo dei valori che la funzione  $g(v)$  assume nell'intervallo (21), risulterà

$$(22) \quad \sqrt{g(v)} \equiv B > 0.$$

Va osservato che se  $\alpha = c^2$ , si ha  $v_1 = 0$ , e per  $v \neq 0$  risulta, nell'intervallo  $(-a, a)$ ,  $g(v) < 0$ . Questo caso va perciò escluso, salvo quando durante il moto del corpuscolo sia sempre  $v = 0$ . Questo caso può effettivamente realizzarsi, cioè può avvenire che il corpuscolo si muova nel piano equatoriale  $v = 0$ , come ho mostrato in un'altra Nota <sup>(1)</sup>, in cui quel caso è stato risolto con quadrature ellittiche. Osserviamo ancora che si è escluso il caso di  $c = 0$ . Quando ciò avviene risulta  $v_1 = a$ , e quindi basta scegliere  $v^*$  compreso tra zero ed  $a$  ( $0 < v^* < a$ ), perchè si possano realizzare le condizioni (21) e (22).

In base alle (18), (19); (21) e (22), possiamo concludere che quando  $\alpha > c^2$ , si possono sempre determinare due numeri positivi  $u^*$ ,  $v^*$  e una quantità positiva  $Q$ , tali che, essendo

$$(23) \quad u^* \leq u \leq u_0 \quad , \quad 0 \leq |v| \leq v^* ,$$

si abbia

$$(24) \quad \sqrt{f(u)} \equiv Q > 0 \quad , \quad \sqrt{g(v)} \equiv Q > 0 ,$$

ove  $Q$  è la più piccola delle quantità  $A, B$ , definite dalle relazioni (19) e (22).

6. In base all'analisi fatta nei due numeri precedenti possiamo ora facilmente determinare i limiti di convergenza della serie (4).

Dalla (12') per  $u, v$  variabili negli intervalli (23), si ha intanto

$$(25) \quad |F_0| \leq \frac{1}{2} \frac{a^2 u^2 v^{*2}}{u^{*2} - v^{*2}} = M ,$$

e quindi per le equazioni (11) e le relazioni (24), risulta

$$(26) \quad \left| \frac{\partial W_1}{\partial u} \right| < \frac{M}{Q} \quad ; \quad \left| \frac{\partial W_1}{\partial v} \right| < \frac{M}{Q} \quad ; \quad |W_1| < \frac{M}{Q} (u_0 - u^*) .$$

In virtù di queste si deduce dalla (7)

$$|F_1| < \frac{1}{2} (u_0^2 - a^2) \left( \frac{M}{Q} \right)^2 + \frac{1}{2} a^2 \left( \frac{M}{Q} \right)^2 = \frac{1}{2} M \cdot \frac{u_0^2}{Q^2} ,$$

(1) C. AGOSTINELLI, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo magnetico simmetrico rispetto a un asse e integrazione del problema in un caso particolare.*

mentre la (16), per  $i = 2$ , porge

$$(27) \quad \left| \frac{\partial W_2}{\partial u} \right| < \frac{1}{2} \frac{M}{Q} \cdot \frac{u_0^2 M}{Q^2} \quad ; \quad \left| \frac{\partial W_2}{\partial v} \right| < \frac{1}{2} \frac{M}{Q} \cdot \frac{u_0^2 M}{Q^2} ;$$

$$(27') \quad |W_2| < \frac{1}{2} \frac{M}{Q} \cdot \frac{u_0^2 M}{Q^2} (u_0 - u^*) .$$

Per conseguenza la seconda delle (8), per  $n = 1$  dà

$$|F_2| < (u_0^2 - a^2) \left| \frac{\partial W_1}{\partial u} \right| \cdot \left| \frac{\partial W_2}{\partial u} \right| + a^2 \left| \frac{\partial W_1}{\partial v} \right| \cdot \left| \frac{\partial W_2}{\partial v} \right| < \frac{1}{2} M \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^2 ,$$

e quindi ancora dalla (16), per  $i = 3$ , si ha

$$(28) \quad \left| \frac{\partial W_3}{\partial u} \right| < \frac{1}{2} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^2 \quad ; \quad \left| \frac{\partial W_3}{\partial v} \right| < \frac{1}{2} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^2 ;$$

$$(28') \quad |W_3| < \frac{1}{2} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^2 (u_0 - u^*) .$$

Così continuando e ponendo

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2} ,$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{2i} = a_{2i-1} + a_1 a_{2i-2} + a_2 a_{2i-3} + \dots + a_{i-1} a_i , \\ \hspace{25em} (i = 1, 2, \dots), \\ a_{2i-1} = a_{2i-2} + a_1 a_{2i-3} + a_2 a_{2i-4} + \dots + a_{i-2} a_i + \frac{1}{2} a_{i-1}^2 , \\ \hspace{25em} (i = 2, 3, \dots), \end{array} \right.$$

dalle (8) e (16) si ottiene:

$$|F_{2i}| < a_{2i} \cdot M \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^{2i} , \quad (i = 1, 2, \dots) ;$$

$$|F_{2i-1}| < a_{2i-1} \cdot M \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^{2i-1} , \quad (i = 2, 3, \dots) ;$$

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial W_{2i}}{\partial u} \right| < a_{2i-1} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^{2i-1} ; \quad \left| \frac{\partial W_{2i}}{\partial v} \right| < a_{2i-1} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^{2i-1} , \\ \hspace{25em} (i = 2, 3, \dots) ; \\ \left| \frac{\partial W_{2i+1}}{\partial u} \right| < a_{2i} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^{2i} \quad ; \quad \left| \frac{\partial W_{2i+1}}{\partial v} \right| < a_{2i} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^{2i} , \\ \hspace{25em} (i = 1, 2, \dots) ; \end{array} \right.$$



$$(30') \quad \begin{cases} |W_{2i}| < a_{2i-1} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^{2i-1} \cdot (u_0 - u^*), & (i = 2, 3, \dots); \\ |W_{2i+1}| < a_{2i} \frac{M}{Q} \left( \frac{u_0^2 M}{Q^2} \right)^{2i} \cdot (u_0 - u^*), & (i = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

ove i coefficienti  $a_{2i}, a_{2i-1}$ , si calcolano successivamente mediante le formule ricorrenti (29).

Da esse si ricava

$$a_2 = a_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_3 = \frac{5}{8} \quad ; \quad a_4 = \frac{7}{8} < 1;$$

e continuando si vede facilmente che risulta

$$a_5 < 2a_4 \quad ; \quad a_6 < 2a_5; \dots; a_i < 2a_{i-1}; \dots$$

e quindi in generale

$$a_i < 2^{i-4}, \quad (i = 4, 5, \dots).$$

Allora, in virtù delle relazioni (30) e (30'), la serie (4), e quelle che si ottengono derivando termine a termine rispetto ad  $u$  e rispetto  $v$ , risultano assolutamente ed uniformemente convergenti se

$$2 \frac{u_0^2 M}{Q^2} |\lambda| < 1.$$

Facendo  $\lambda = 1$ , si ha che la serie

$$(31) \quad W = W_0 + W_1 + W_2 + \dots$$

e quelle delle derivate rispetto ad  $u$ , ovvero rispetto a  $v$ , risultano assolutamente ed uniformemente convergenti quando è soddisfatta la condizione

$$(32) \quad \frac{2 u_0^2 M}{Q^2} = \frac{a^2 \mu^2 u_0^2 v^{*2}}{Q^2 (u^{*2} - v^{*2})} < 1.$$

Possiamo allora concludere che, fissato il valore iniziale  $u_0$  della coordinata  $u$ , e determinati i due numeri positivi  $u^*, v^*$ , compresi negli intervalli definiti nei numeri 4 e 5, e tali che sia soddisfatta la condizione (32), per

$$u^* \leq u \leq u_0 \quad , \quad 0 \leq |v| \leq v^*,$$

la serie (31), ove le funzioni  $W_0, W_1, W_2, \dots$ , sono espresse dalle relazioni (9) e (15), e dalla relazione ricorrente (17), risulta assolutamente ed uniformemente convergente. Inoltre, poichè essa è, per il modo stesso con cui è stata ottenuta, un integrale dell'equazione (1), contenente la costante arbitraria  $\alpha$ , quella serie risolve il problema proposto.

**Meccanica** (Aerodinamica). — *L'azione aerodinamica su una superficie portante in moto oscillatorio*. Nota <sup>(1)</sup> di C. POSSIO, presentata dal Corrisp. M. PANETTI.

1. Nella presente Nota si espongono i risultati di una ricerca intesa a determinare l'azione aerodinamica che si esercita su una superficie portante d'apertura finita, dotata di un moto oscillatorio, come si verifica per l'ala e per i piani di coda nel moto perturbato del velivolo attorno alla posizione a cui corrisponde un volo di regime. Riassumeremo i principii in base ai quali si calcola il campo di velocità attorno alla superficie portante, e riporteremo le espressioni di alcuni coefficienti, per i quali le divergenze coi risultati degli usuali metodi approssimati sono notevoli: i particolari del procedimento di calcolo e l'applicazione ai singoli casi particolari di moto perturbato saranno esposti in due Note <sup>(2)</sup> di prossima pubblicazione.

2. Consideriamo la superficie portante  $\Sigma$  investita da una corrente uniforme di velocità  $\mathbf{V}_0$ : il moto di  $\Sigma$  è un'oscillazione, che supponiamo di ampiezza infinitesima e di tipo sinoidale semplice, attorno ad una posizione media che indichiamo con  $\Sigma_m$ . Disponiamo gli assi di riferimento solidali con  $\Sigma_m$ , assumendo il piano di simmetria di  $\Sigma_m$  come piano  $xy$ ; e facendo coincidere l'asse  $x$  colla direzione di  $\mathbf{V}_0$ : si suppone che  $\Sigma$  abbia spessore nullo, e che la sua incidenza rispetto a  $\mathbf{V}_0$  sia piccola, per cui il problema consiste ovviamente nel determinare un campo di moto  $C$ , tale che la componente  $v$  secondo  $y$  della velocità del fluido abbia, in ogni punto di  $\Sigma$ , un valore dato  $v_f$ .

Esprimeremo il campo di velocità attorno a  $\Sigma$  in un modo che, almeno formalmente, differisce dal solito metodo di calcolare la velocità indotta dai vortici aderenti alla superficie portante e dal sistema vorticoso che se ne stacca. Mostreremo, infatti, che la velocità che ha il fluido in un moto vario si può mettere molto facilmente in relazione col campo di velocità del moto stazionario attorno ad una superficie portante colla stessa pianta di  $\Sigma$ . Per giungere a quest'espressione, la via più semplice è quella di considerare la relazione che esiste fra velocità e pressione, ricorrendo al metodo del potenziale dell'accelerazione, di cui il Prandtl ha recentemente <sup>(3)</sup> indicato l'applicazione allo studio del moto di una superficie portante. Supponendo che il

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1938.

(2) C. POSSIO, *Sulla determinazione dei coefficienti aerodinamici che interessano il problema della stabilità del velivolo*. «Pontificia Accademia delle Scienze»; *Determinazione dell'azione aerodinamica corrispondente alle piccole oscillazioni del velivolo*. «Aerotecnica».

(3) PRANDTL, *Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche*. «ZMM», 1936.

fluido sia incompressibile e che la perturbazione introdotta in esso dall'ostacolo sia molto piccola, il Prandtl ha trovato che è:

$$(1) \quad p - p_0 = -\rho\varphi$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$(3) \quad v(x, y, z, t) = \frac{1}{V_0} \int_{-\infty}^x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left( \xi, y, z, t - \frac{x - \xi}{V_0} \right) d\xi$$

dove con  $\varphi$  si indica il potenziale dell'accelerazione, con  $\rho$  la densità (costante) del fluido, con  $p$  la pressione, ed è  $p = p_0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $v = 0$  all'infinito a monte di  $\Sigma$ . La (1) risulta immediatamente dal teorema di D'Alembert per un fluido perfetto in assenza di forze di massa, mentre le (2) e (3) sono conseguenza della semplificazione che introduce il Prandtl ponendo  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x}$ , cioè *linearizzando* l'operazione di derivata totale

rispetto al tempo: è precisamente in grazia di questa semplificazione, che il potenziale dell'accelerazione, la cui esistenza era già nota da molto tempo, può avere applicazione pratica. Osserviamo che l'equazione indefinita (2) a cui deve soddisfare  $\varphi$  non contiene le derivate parziali rispetto al tempo, e che d'altra parte le condizioni ai limiti sono dello stesso genere, sia o no il moto permanente: ne segue che, se  $\varphi(x, y, z, t)$  è il potenziale dell'accelerazione del campo  $C$  che vogliamo studiare, la funzione  $\varphi(x, y, z, t_0)$ , per  $t_0 = \text{cost.}$ , è il potenziale di un campo di moto stazionario  $C_p$ , di velocità assintotica  $V_0$ , attorno ad una superficie portante che ha la stessa pianta di  $\Sigma$ . I due campi  $C$  e  $C_p$  hanno in ogni punto la stessa pressione, in quanto ad entrambi corrisponde la stessa funzione  $\varphi$ :  $C_p$  si può perciò definire come quel campo di moto stazionario che realizza, nell'istante  $t = t_0$  considerato, la stessa distribuzione di pressione che si ha in  $C$ . La pressione dinamica  $p - p_0$  in  $C_p$  si ricava dal teorema di Bernoulli: poichè la perturbazione creata dalla superficie portante è molto piccola, sarà  $p - p_0 = -\rho V_0 u'$ , essendo  $V_0 + u'$  la componente secondo  $x$  della velocità  $V_p$  di  $C_p$ . Dalla (1) si ricava così  $\varphi = V_0 u'$ : ora è  $\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x}$  indicando con  $v'$  la componente

di  $V_p$  secondo  $y$ , di modo che si ha  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V_0 \frac{\partial v'}{\partial x}$ . Essendo la legge del moto sinoidale, conviene adottare la notazione complessa, ponendo  $v = \bar{v} e^{i\Omega t}$ ,  $v' = w e^{i\Omega t}$ : la (3) diventa così, sostituendo a  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  il suo valore  $V_0 \frac{\partial w}{\partial x} e^{i\Omega t}$  e integrando per parti,

$$(4) \quad \bar{v}(x, y, z) = w(x, y, z) - \frac{i\Omega}{V_0} \int_{-\infty}^x w(\xi, y, z) \cdot e^{-\frac{i\Omega}{V_0}(x-\xi)} d\xi.$$

La (4) è precisamente l'espressione cercata, in quanto  $\bar{v}e^{i\Omega t}$  è la velocità del campo di moto vario  $C$ , mentre  $w$  è la velocità di un moto stazionario  $C_p$ .

Per determinare la vorticità aderente a  $\Sigma$ ,  $\gamma = \bar{\gamma}e^{i\Omega t}$ , occorre ancora esprimere  $w$  in funzione di  $\bar{\gamma}$ : ora però si tratta di un moto stazionario, per cui basta ricorrere alla nota teoria dell'ala finita del Prandtl. Introducendo l'espressione di  $w$  in funzione di  $\bar{\gamma}$  nella (4), si ottiene il valore della velocità  $v$ ; uguagliando  $v$  a  $v_f$ , si ricava l'equazione integrale che determina  $\bar{\gamma}$ . La soluzione di quest'equazione integrale sarebbe assai difficile, dovendosi determinare la funzione di due variabili  $\bar{\gamma}(x, \chi)$ : si dimostrerà però come, restando nei limiti d'approssimazione della teoria dell'ala finita del Prandtl, ci si riduca facilmente a determinare una funzione di una sola variabile, e precisamente la circuitazione  $\bar{\Gamma}(\chi)$  <sup>(1)</sup> che corrisponde alla distribuzione di vorticità  $\bar{\gamma}$ . Si tratta dunque di risolvere un'equazione analoga a quella notissima che si presenta nel moto stazionario, e la cui soluzione, nel caso dell'ala ellittica, si può ottenere in modo abbastanza agevole.

Nota la distribuzione di vorticità, si risale immediatamente all'azione aerodinamica  $dP$  che si esercita su ogni elemento  $d\Sigma$  della superficie portante, in quando  $dP$  si calcola nel campo  $C_p$  col teorema di Kutta-Joukowski:  $dP = \rho V_0 \cdot \bar{\gamma}e^{i\Omega t} \cdot d\Sigma$ . Alla risultante di queste pressioni, si deve aggiungere l'aspirazione  $A$  allo spigolo: la sua espressione è subito determinata, in quanto si dimostra facilmente che il valore di  $A$ , in un istante  $t = t_0$ , è quello stesso che si ha nel moto stazionario corrispondente alla distribuzione di vorticità  $\bar{\gamma}e^{i\Omega t_0}$ .

3. I risultati che ora esporremo sono validi nell'ipotesi dell'ala ellittica, colla restrizione che i fuochi delle varie corde <sup>(2)</sup> siano allineati su una retta che assumiamo come asse  $\chi$ : inoltre, le espressioni dei coefficienti di resistenza sono rigorose solo se l'ala è una lamina piana. I coefficienti aerodinamici sono ricavati sotto forma di uno sviluppo in serie di potenze del parametro adimensionale  $\omega = \frac{\Omega b}{2 V_0}$  ( $\Omega$  è la pulsazione del moto e  $b$  è l'apertura alare): per semplicità ci limitiamo a dare i valori dei primi due termini dello sviluppo, esprimendo cioè i coefficienti come funzione lineare di  $\omega$ , rimandando, per la determinazione dei coefficienti sino a  $\omega = 1.75$ , alla Nota citata, nella quale è anche considerato il caso in cui la linea luogo dei fuochi abbia una forma qualsiasi.

Il moto di  $\Sigma$  è definito dalle tre componenti  $\xi, \eta, \zeta$  dello spostamento del fuoco  $F_0$  che nella posizione  $\Sigma_m$  coincide coll'origine delle coordinate,

(1) Com'è noto,  $\bar{\Gamma}(\chi_0)$  è la vorticità complessiva distesa sulla corda  $\chi = \chi_0$ , cioè è  $\bar{\Gamma}(\chi_0) = \int \bar{\gamma}(x, \chi_0) dx$ , essendo l'integrazione estesa a tutta la corda.

(2) S'intende per corda la sezione di  $\Sigma_m$  con un piano  $\chi = \text{cost.}$ , e per fuoco il punto al 25 % della corda.

e dalle rotazioni  $\varphi, \psi, \alpha$  attorno agli assi  $x, y, z$ : i sensi positivi di  $\xi, \eta, \zeta$  sono quegli stessi degli assi  $x, y, z$  rispettivamente, mentre i versi positivi delle rotazioni  $\varphi, \psi, \alpha$  sono indicati dalle frecce di fig. 1. I coefficienti che definiscono l'azione aerodinamica saranno espressi nella forma adimensionale ormai consueta nella teoria delle vibrazioni dell'ala: come già si è accennato, riporteremo soltanto quei coefficienti per i quali il noto metodo approssimato che utilizza le formole valide per il moto permanente dà valori lontani dal vero.

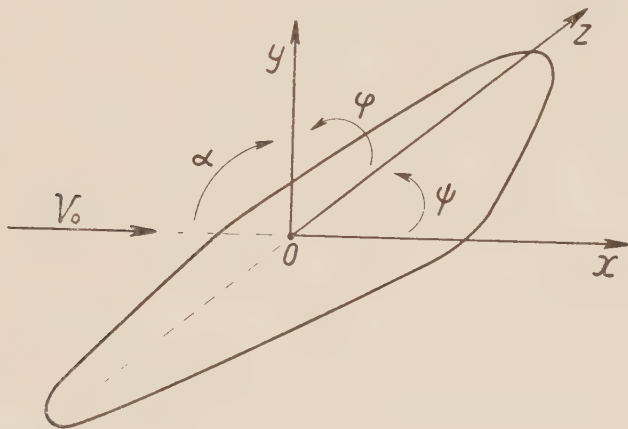


Fig. 1.

Le espressioni dei coefficienti relativi al moto di traslazione parallela a  $y$ , sono (1)

$$\frac{V_0^2}{b} \frac{\partial c_p}{\partial \ddot{\eta}} = k_1 - \frac{\pi^2 \lambda}{8(\lambda + 2)^2} \omega, \quad V_0 \frac{\partial c_r}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\pi \lambda (\lambda - 2)}{(\lambda + 2)^2} \alpha_m$$

indicando con  $\dot{\eta}$  e  $\ddot{\eta}$  la velocità e l'accelerazione del moto, con  $\alpha_m$  l'incidenza dell'ala nel moto di regime, e con  $k_1$  una funzione dell'allungamento alare  $\lambda = b^2/S$  ( $S$  è la superficie dell'ala), i cui valori sono riportati nel diagramma di fig. 2. La portanza in fase con  $\ddot{\eta}$  si può interpretare come

una forza d'inerzia dovuta ad una massa addizionale  $m_a = -\rho S b \cdot \left( \frac{V_0^2}{b} \frac{\partial c_p}{\partial \ddot{\eta}} \right)$

che oscilla solidamente coll'ala:  $m_a$  risulta praticamente sempre negativa e tanto maggiore in valore assoluto, quanto più elevato è l'allungamento. Il metodo approssimato avrebbe dato  $m_a = 0$ , mentre, calcolando l'azione

(1) I coefficienti di portanza  $c_p$  e di resistenza  $c_r$  sono riferiti a  $\rho S V_0^2$ , e sono positivi se portanza e resistenza sono dirette nei versi positivi degli assi  $y$  e  $x$  rispettivamente. A proposito della resistenza, si deve osservare che si tratta naturalmente della sola resistenza indotta.



aerodinamica su ciascuna corda colle espressioni della teoria rigorosa dell'ala infinita, si avrebbe per  $\omega \rightarrow 0$ ,  $m_a$  infinito come  $\log \omega$  (1): basta questo esempio per convincersi che, per avere valori soddisfacenti per tutti i coefficienti aerodinamici, è indispensabile lo studio rigoroso del moto non stazionario dell'ala finita. Per quanto riguarda il coefficiente  $V_0 \frac{\partial c_r}{\partial \dot{\eta}}$ , è interessante osservare come, ricorrendo alle note formole valide per il moto stazionario,

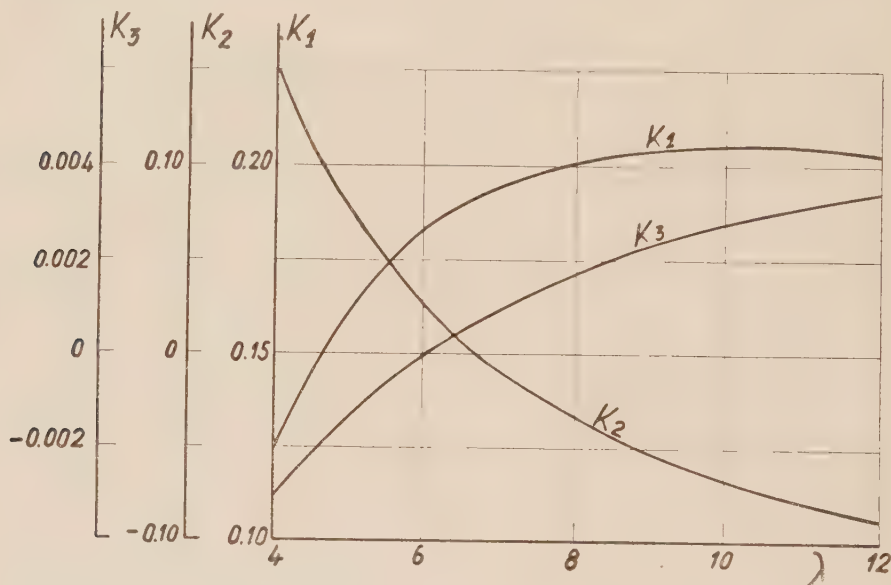


Fig. 2.

$c_r = \frac{2}{\pi\lambda} c_p^2$ ,  $c_p = \pi \frac{\lambda}{\lambda + 2} \left( \alpha_m - \frac{\dot{\eta}}{V_0} \right)$ , si ottenga il valore  $V_0 \frac{\partial c_r}{\partial \dot{\eta}} = - \frac{4\pi\lambda}{(\lambda + 2)^2} \alpha_m$ , che è completamente diverso da quello esatto. La resistenza in fase con  $\dot{\eta}$  e il momento di beccheggio si possono trascurare.

Nel moto di traslazione parallela a  $x$ , le uniche azioni che non siano trascurabili sono la portanza in fase con  $\xi$ , per cui si può ricorrere al metodo approssimato, e la resistenza di *profilo* in fase con  $\xi$ , determinabile col metodo della striscia.

(1) A prima vista, il procedimento di ricorrere alle formole valide per l'ala infinita parrebbe abbastanza soddisfacente. Bisogna però osservare che nella (4) compare la espressione di  $w$  nei punti a monte dell'ala, sino all'infinito: ora, per  $x = -\infty$ ,  $w(x) = \infty 1/x^2$ , per cui l'ipotesi dell'ala infinita, che darebbe invece  $w(x) = \infty 1/x$ , conduce a calcolare l'integrale in modo assai diverso dal vero.

I coefficienti che definiscono l'azione aerodinamica corrispondente al moto di beccheggio, cioè alla rotazione attorno all'asse  $\chi$ , sono <sup>(1)</sup>:

$$\frac{V_o}{b} \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\alpha}} = k_2 + \frac{\pi^2 \lambda}{8(\lambda + 2)^2} \omega, \quad \frac{V_o}{b} \frac{\partial c_{mb}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{3}{2\pi\lambda}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial \alpha} = \frac{4\pi\lambda}{(\lambda + 2)^2} \alpha_m, \quad \frac{V_o}{b} \frac{\partial c_r}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{32}{3\pi(\lambda + 2)} \alpha_m$$

essendo  $k_2$  il coefficiente definito dal diagramma di fig. 2. Col metodo della striscia sarebbe  $\frac{V_o}{b} \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{16}{3\pi\lambda}$ ,  $\frac{V_o}{b} \frac{\partial c_{mb}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{3}{4\pi\lambda}$ : come si vede, le divergenze con i valori esatti sono assai sensibili. Colle espressioni rigorose per l'ala infinita, si ottiene per  $V_o \frac{\partial c_{mb}}{\partial \dot{\alpha}}$  il valore esatto, mentre  $\frac{V_o}{b} \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\alpha}}$  è ancora, come  $m_a$ , infinito come  $\log \omega$  per  $\omega = 0$ .

Per il moto di rollio (rotazione attorno all'asse  $x$ ) è <sup>(2)</sup>:

$$\frac{V_o^2}{b^2} \frac{\partial c_{mr}}{\partial \ddot{\phi}} = -k_3, \quad \frac{V_o}{b} \frac{\partial c_{mi}}{\partial \ddot{\phi}} = \frac{\pi\lambda(\lambda - 2)}{16(\lambda + 2)(\lambda + 4)} \alpha_m$$

mentre il momento d'imbardata in fase con  $\phi$  è trascurabile. Il coefficiente  $\frac{V_o^2}{b^2} \frac{\partial c_{mr}}{\partial \ddot{\phi}}$  rappresenta un'azione che ha i caratteri di una coppia d'inerzia dovuta ad un momento d'inerzia addizionale  $J_a = \rho S b^3 \cdot \left( \frac{V_o^2}{b^2} \frac{\partial c_{mr}}{\partial \ddot{\phi}} \right)$ . Per  $\lambda > 6$  circa,  $J_a$  è negativo, cambiando segno per  $\lambda < 6$ , di modo che per gli ordinari allungamenti ( $\lambda = 7$  circa),  $J_a$  risulta, appena il carico alare sia forte, quasi trascurabile.

Le espressioni dei coefficienti che definiscono l'azione corrispondente al moto d'imbardata, cioè alla rotazione intorno all'asse  $y$ , sono, con grande approssimazione,

$$\frac{\partial c_{mi}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{4\lambda\alpha_m\delta}{(\lambda + 2)(\lambda + 4)} - \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2} h\alpha_m$$

$$\frac{V_o}{b} \frac{\partial c_{mi}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{2\alpha_m\delta}{\pi(\lambda + 2)} + \frac{3\pi\lambda\alpha_m^2}{8(\lambda + 2)(\lambda + 4)}, \quad \frac{V_o}{b} \frac{\partial c_{mr}}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{\pi\lambda(\lambda + 3)\alpha_m}{8(\lambda + 2)(\lambda + 4)}$$

(1) Il coefficiente di momento di beccheggio (cioè attorno all'asse  $\chi$ )  $c_{mb}$  è riferito a  $\rho S l_m V_o^2$ , essendo  $l_m$  la corda media ( $l_m = S/b$ ), ed è positivo se agisce in senso contrario a quello indicato dalla freccia di fig. 1 per  $\alpha$  (sono positivi i momenti picchianti).

(2) I coefficienti di momento di rollio  $c_{mr}$  e d'imbardata  $c_{mi}$  sono riferiti a  $\rho S b V_o^2$ , e sono positivi se i momenti agiscono in senso contrario a quello indicato per  $\phi$  e  $\psi$  dalle frecce di fig. 1.

indicando con  $\delta$  il diedro trasversale dell'ala e con  $h$  il valore che assume il coefficiente  $\frac{\partial c_{mr}}{\partial \psi}$  per  $\delta = 0$ . La teoria del Prandtl non è in grado di determinare  $h$ ; del resto, tutte le teorie sinora tentate per lo studio dell'ala in deriva non hanno dato risultati soddisfacenti, sicchè è necessario assumere per  $h$  il valore dato dalle esperienze eseguite nel moto stazionario.

Per il moto di traslazione parallela a  $z$ , è  $V_0 \frac{\partial c_{mr}}{\partial \zeta} = \frac{\partial c_{mr}}{\partial \psi}$ , mentre le azioni in fase con  $\zeta$  sono trascurabili: il coefficiente di momento d'imbarcata in fase con  $\zeta$  ha l'espressione:

$$V_0 \frac{\partial c_{mi}}{\partial \zeta} = - \left[ \frac{2}{3} \frac{\lambda(\lambda-2)}{(\lambda+2)(\lambda+4)} \delta + \frac{\lambda-2}{\lambda+2} h \right] \cdot \alpha_m.$$

4. È interessante conoscere anche il campo di velocità a valle della superficie portante, in modo da dedurre l'influenza che il moto dell'ala esercita sui piani di coda. Per semplicità, ci si è limitati a calcolare la velocità  $v_i$  indotta dall'ala nei punti dell'asse  $x$  (gli assi sono riferiti all'ala); si è ottenuto come espressione di  $v_i$  nel punto di ascissa  $x = \xi \frac{b}{2}$ , sempre nell'ipotesi dell'ala ellittica:

$$(5) \quad \frac{v_i}{V_0} = \frac{c_p}{\pi \lambda} \cdot \left[ -2 - \frac{4E}{\pi k \xi} + 2i\omega \left( \xi + 2 \frac{E-K}{\pi k} \right) + \frac{\pi}{4} i\omega^2 \right]$$

essendo  $c_p$  il coefficiente di portanza dell'ala,  $\lambda$  il suo allungamento, e  $K, E$  i noti integrali ellittici completi relativi al parametro  $k = 1/\sqrt{1+\xi^2}$ . Il metodo approssimato, che utilizza le formole del moto permanente, darebbe per  $v_i$  il valore che si ottiene dalla (5) facendo  $\omega = 0$ : si viene così a trascurare un termine che nelle oscillazioni di beccheggio rappresenta un'azione smorzante notevole. Infatti, coi dati corrispondenti ai casi che si presentano in pratica, per un'oscillazione di beccheggio attorno all'asse baricentrico del velivolo, quest'azione smorzante può rappresentare anche il 20 % del momento smorzante complessivo.

**Geologia** (Paleontologia quaternaria). — *Una serie di nuovi giacimenti pleistocenici e paleolitici in grotte litoranee del Monte Circeo*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> di A. C. BLANC, presentata dal Corrisp. S. SERGI.

Ho reso noti i primi risultati delle campagne di ricerche e di scavo intraprese per iniziativa dell'Istituto Italiano di Paleontologia umana sulle coste del Monte Circeo<sup>(3)</sup>.

Negli anni 1937 e 1938 sono stati proseguiti nella Grotta delle Capre ed in quella del Fossellone gli scavi, di cui vengono in appresso riassunti i risultati, e sono state estese le ricerche esplorative lungo la costiera, dalla Torre del Fico a Torre Paola. È stata così accertata l'esistenza di una serie di nuovi giacimenti pleistocenici, costituiti da formazioni detritiche e brecciose di riempimento di cavità litoranee, contenenti fauna e flora fossile, associate ad industrie paleolitiche.

Delle cavità suddette, che sul tratto di costiera fino ad ora esplorato assommano a 31 e che vengono in appresso elencate e brevemente descritte, solo quattro (Grotta di Torre Paola, Grotta della Maga Circe, Grotta dell'Impiso, Grotta delle Capre), erano note, sia per le osservazioni ivi compiute dal Brocchi<sup>(4)</sup>, e dall'Issel<sup>(5)</sup>, sia per le loro bellezze naturali<sup>(6)</sup>. Alcune altre (Grotta del Bombardiere, Grotta del Presepio ecc.) sono note con questi nomi ai pescatori che frequentano la scogliera.

I. GROTTA SPACCATA DI TORRE PAOLA. — Pochi metri a sud della Torre Paola esiste una fenditura sub-verticale del calcare liasico, larga alla base circa 7 metri ed alta oltre 40 metri. Le sue pareti mostrano, all'altezza di circa 10 metri, un antico solco marino fino al quale giungono perforazioni di litodomi. In epoca posteriore alla formazione di detto solco la grotta è stata interamente riempita con formazioni detritiche subaeree, di cui alcuni lembi, cementati, sono conservati sia nella sua parte più interna, sia in alcuni punti lungo le pareti. Una grande massa brecciosa costituisce, ad oltre 25 metri

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Italiano di Paleontologia umana.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1938.

(3) A. C. BLANC, *Fauna a Ippopotamo ed industrie paleolitiche nel riempimento delle grotte litoranee del Monte Circeo*. — I. *La Grotta delle Capre*. — II. *La Grotta del Fossellone*. « Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XXV, ser. 6ª, 1º sem., fasc. 2, 1937.

(4) G. B. BROCCHI, *Catalogo ragionato di una raccolta di rocce ecc.* Milano, 1817, p. 83.

(5) A. ISSEL, *Le oscillazioni lente del suolo o Bradisismi. Saggio di Geologia storica*. Genova, 1883, p. 205 e sgg.

(6) G. CAPPONI, *Il promontorio Circeo illustrato con la Storia*. Velletri, 1856, p. 107.

sul mare, un setto che divide la spaccatura in due vani, uno inferiore, oggi invaso e parzialmente svuotato dal mare, ed uno superiore, che è accessibile procedendo a Sud, oltre la Torre Paola, sullo stradello che accede alla medesima.

2. GROTTA APERTA. — Sotto un dirupo di un centinaio di metri, costeggiando a sud della Batteria di Paola, si vede una insenatura ingombra di grandi massi franati. Sia i residui di questa frana, sia la parete di fondo, tutta ricoperta di stalagmiti, indicano che ivi doveva esistere in passato una grotta molto spaziosa, che è stata invasa e demolita dal mare. Una conoide di detriti, a nord, può forse nascondere una parte dell'antico riempimento della grotta.

3. GROTTA DELL'ISOLOTTO. — Questa grotta, invasa e svuotata dal mare, mostra, nelle pareti più riparate della cavità, qualche lembo di un antico riempimento detritico, cementato ed aderente alle pareti.

4. GROTTA DEL BOMBARDIERE. — Cavità vuota, invasa dal mare.

5. GROTTA BREUIL. — In una piccola insenatura, situata a ridosso della estremità nord-ovest del Precipizio, si apre questa grotta, larga circa 12 metri, il cui suolo emerge di circa 6 a 8 metri sul livello del mare. Le sue pareti mostrano perforazioni di litodomi. La sua parte anteriore, profonda 22 metri, è stata svuotata dalle azioni marine, ed è ingombra di grandi massi franati. Nella sua parte più interna, invece, è conservato il riempimento detritico che doveva un tempo colmare tutta la grotta. Esso costituisce una ripida scarpata di terreno bruno incoerente, di circa 8 metri di altezza e circa 10 metri di larghezza, ai piedi della quale si raccolgono frammenti di ossa fossili ed industria paleolitica. Una serie di saggi compiuti a varie altezze nella scarpata detritica ha accertato la presenza di ricchi focolari contenenti fauna fossile (*Rhinoceros*, *Equus*, *Cervus*, *Bos* ecc.) ed industria del tipo paleolitico litoraneo, già da me segnalato nell'Agro Pontino <sup>(1)</sup> e nella Grotta del Fossellone <sup>(2)</sup>, prevalentemente pontiniano. La parte interna della grotta,colmata dal riempimento intatto, si approfonda per oltre dieci metri, diramandosi in antri e cunicoli secondari. L'esistenza di questa grotta e la presenza in essa di resti di fauna e di industria mi sono state segnalate dalla signorina Anna Mack.

6. GROTTA DELLA MAGA CIRCE. — Questa grotta, che si apre con una ampia cupola, larga circa m. 40 X 40, ed alta da 30 a 40 metri, è accessibile

(1) A. C. BLANC, *Nuovi giacimenti paleolitici del Lazio e della Toscana*. « Studi Etruschi », vol. XI, Firenze, 1937.

(2) A. C. BLANC, *Fauna a Ippopotamo* ecc.



dal mare per mezzo di due basse ed anguste aperture, che immettono nel vano centrale invaso dal mare ed ingombro di grandi massi di calcare e di breccia franati dalla volta. La grotta dev'essere stata un tempo interamente riempita di formazioni detritiche, di cui alcuni lembi sono rimasti cementati alle pareti, o formano crostoni stalagmitici, i quali per la demolizione della parte basale del riempimento, operata dal mare, sono oggi sospesi sul vuoto. La grotta possiede anche un'apertura superiore.

7. SPIAGGIA DEI BOMBARDIERI. — In una insenatura, che si apre con una spiaggetta di ciottoli calcarei, poco a sud della grotta precedente, esiste un antro poco profondo, riempito alla base, che è situata a pochi metri sul livello del mare, da un conglomerato di grossi ciottoli marini, fortemente cementati, residuo di una spiaggia fossile.

8. GROTTA DEL RIMBOMBO. — Questa piccola grotta, che si apre oggi sul mare, possiede un riempimento detritico terroso cementato in breccia, che è stato parzialmente asportato dalle azioni dinamiche litoranee le quali ne hanno sezionato la fronte.

A sud della grotta n. 8 la costiera è costituita da masse imponenti di breccia calcarea, formata dalla cementazione di detriti rocciosi franati dalla parete sovraincombente. Questi lembi di breccia, la cui base è stata sottoposta alla demolizione dagli agenti marini ed atmosferici, formano una serie di aggetti e di cavità, la cui esplorazione è stata rinviata ad una prossima campagna di ricerche. Proseguendo a sud della zona di brecce suddetta, un tratto di parete, volto ad ovest, mostra una serie di cinque grotte, adiacenti l'una all'altra. La chiamerò la Scogliera delle Cinque Grotte.

9. GROTTA DEI TRE LUIGI. — La prima delle cinque grotte è costituita da una fessura obliqua contenente residui di un riempimento detritico cementato.

10. GROTTA ANNA. — Questa cavità che si apre poco a sud della precedente, contiene lembi importanti di riempimento detritico terroso, cementato in forma di breccia, poggiante su una spiaggia fossile. Il riempimento subaereo contiene fauna fossile ed industria del tipo paleolitico litoraneo. La sua parte visibile culmina con un esteso lastrone stalagmitico che, per l'asportazione della base di riempimento, è oggi sospeso sul vuoto. Anche questa grotta mi è stata segnalata dalla signorina Anna Mack.

11. GROTTA DELLA FESSURA. — Questa cavità contiene piccoli lembi di un riempimento detritico, cementato in forma di breccia, posteriore all'incisione di un solco marino con perforazioni di litodomi, visibile sulle pareti.

12. GROTTA DELLE PALME. — Stretta ed alta, questa cavità, che è stata quasi interamente svuotata dal mare, contiene alcuni piccoli lembi brecciosi cementati sulle pareti, residui di un riempimento detritico che doveva in passato colmarla interamente.
13. Piccola grotta sospesa a qualche metro sul livello del mare, situata all'estremità meridionale dalla scogliera, contenente residui di un riempimento detritico cementato.
14. GROTTA DEI PESCI. — Questa fessura, situata a sud del promontorio meridionale della Scogliera delle Cinque Grotte, è larga 8-10 metri, ed alta circa 20 metri. Le sue pareti presentano perforazioni di litodomi. Del riempimento detritico che doveva un tempo riempirla interamente sono conservati soltanto alcuni lembi cementati nel terzo superiore della grotta, a cui base è invasa ed è stata svuotata dal mare.
15. GROTTA DELL'ALABASTRO. — A sud-est della Cava di alabastro esiste un antro generato dalla demolizione della parte basale di un lembo di conglomerato breccioso. Sembra che non contenga riempimento detritico.
- 16 e 17. GROTTA DI TORRE CERVIA. — Ai piedi della Torre Cervia (Torraccia) esistono due grotte, basse e profonde, completamente svuotate dal mare che ne ha invaso le cavità. Solo alcuni lembi di spiaggia fossile, conglomerati e cementati, sono rimasti aderenti, in prossimità delle aperture, sulle pareti, che mostrano perforazioni di litodomi, testimoniando una antica linea di riva più elevata dell'attuale.
18. GROTTA DELL'ACQUARIO. — Una terza grotta, adiacente alle precedenti, è invece situata di poco sopra al livello del mare, e contiene alcuni metri cubi di riempimento detritico fortemente cementato e protetto da rivestimenti mammellonari stalagmitici, contenente fauna fossile, frammenti di carbone e di industria del tipo paleolitico litoraneo. Le sue pareti ed il suo soffitto mostrano perforazioni di litodomi.
19. GROTTA DEL FARO. — Piccola cavità situata ad est del Faro, completamente svuotata dal mare. Sono visibili esternamente alcuni lembi di riempimento detritico cementato.
20. GROTTA ELENA. — Durante la prosecuzione degli scavi della Grotta del Fossellone <sup>(1)</sup> la rimozione della parte posteriore della scarpata nord-

(1) A. C. BLANC, *Fauna a Ippopotamo ecc. e Un giacimento aurignaziano medio nella Grotta del Fossellone al Monte Circeo*. «Atti Congr. Soc. It. Progr. Scienze», Bologna, 1938 (in corso di stampa).

ovest ha reso accessibile un basso e stretto cunicolo, diretto ad ovest. Strisciando carponi, dopo circa 10 metri, si accede ad un ampio vano, di circa m. 20 X 20, ornato da belle formazioni stalagmitiche attive. Il suolo, solo parzialmente cementato da veli stalagmitici, è terroso, di colore bruno. In superficie, perfettamente liberi, ho raccolto denti di *Capra ibex* e di *Actomys* (?) ed alcune lame di selce. Un piccolo saggio di scavo ha fornito inoltre alcuni frammenti di carbone, di ossa fossili, e di selce scheggiata. Questa grotta, le cui pareti mostrano perforazioni di litodomi, doveva comunicare con il Fossellone, da cui ritengo essa sia oggi separata soltanto dalla massa del riempimento detritico, comune alle due cavità. Essa possedeva inoltre un'apertura superiore, a camino, oggi chiusa da formazioni brecciose. Il ritrovamento dello Stambecco, della Marmotta e delle lame silicee in superficie testimonia che il ricoprimento e la cementazione dell'apertura e quindi l'arresto del riempimento della grotta data dal Pleistocene, dopo di che essa era rimasta chiusa ed inviolata.

21. GROTTA DEL FOSSELLONE. — Gli scavi del 1937 e 1938 hanno accertato la presenza di un potente lembo di riempimento, intatto, a ridosso della sua parete nord-ovest <sup>(1)</sup>. Esso contiene, sovrapposti in stratigrafia:

alla base un complesso di strati musteriani del tipo pontiniano, con *Rhinoceros*, *Bos*, *Cervus*, *Equus* ecc.;

uno strato sterile;

uno strato contenente industria aurignaziana media, di tipo circeiano, con la « punta di Aurignac », associata a *Equus hydruntinus*, *Bos*, *Cervus*, *Capra ibex* ecc.;

uno strato superiore, che non ha ancora fornito industria, con *Capra ibex* e *Arctomys* (?) (la cui altimetria corrisponde agli strati superficiali della Grotta Elena, con i quali esso trovasi verosimilmente in continuità).

Gli antri Aguet e Obermaier hanno continuato a fornire copiosa fauna (*Rhinoceros*, *Hyaena*, *Cervus*, *Bos*, *Equus hydruntinus* ecc.) ed industria circeiana, con vari frammenti di punte di Aurignac.

Il ritrovamento dei due livelli musteriano ed aurignaziano sovrapposti in stratigrafia, conferma la diversità dei lembi di riempimento primitivamente rinvenuti e scavati negli antri Jourdan e Obermaier, diversità che avevo affermata su basi tipologiche. Appare oggi chiaramente che questi lembi non sono che il residuo del riempimento detritico che colmava interamente il Fossellone, come lo testimoniano i terreni cementati che aderiscono alle pareti presso l'apertura marina della grotta, fino all'attuale livello del mare,

(1) A. C. BLANC, *Un giacimento aurignaziano medio ecc.*

ricoprendo le perforazioni di litodomi ed i solchi marini che sono stati incisi durante una più antica immersione della caverna.

22. GROTTA DELL'IMPISO. — Questa spaziosa cavità è costituita dalla demolizione della base di un potente lembo di conglomerato breccioso che è oggi sospeso sul vuoto, e costituisce il soffitto della « grotta », invasa dal mare. Sulle pareti laterali, la cui base è formata dal calcare liasico in posto, è visibile l'incisione di un'antica superficie di erosione marina nel calcare stesso, ricoperta da una spiaggia marina fossilifera, alla quale si sovrappone la massa dei detriti calcarei angolosi costituente il conglomerato breccioso superiore.

23. GROTTA DELLE CAPRE. — La prosecuzione degli scavi ha confermato le osservazioni già note <sup>(1)</sup>.

24. GROTTA AZZURRA. — Interamente invasa e vuotata dal mare, questa grotta spaziosa, e profonda circa 30 metri, si apre con una bassissima e stretta apertura e, come la grotta omonima di Capri, è accessibile in barca solo in tempo di bonaccia.

25. Pochi metri a est della precedente si nota un piccolo vano, poco profondo, completamente vuoto.

26. GROTTA DEL PRESEPIO. — Questa cavità, il cui suolo emerge di qualche metro sul mare, ha conservato una buona parte del suo riempimento che è stato avviluppato e protetto da veli mammellonari stalagmitici. Il riempimento cementato in breccia, contiene fauna fossile ed industria del tipo paleolitico litoraneo. A sinistra entrando ho estratto dallo stesso strato un raschiatoio a muso, un doppio raschiatoio su lama ed una scheggia di tipo musteriano, con il piano di percussione preparato. L'associazione di questi tipi mi fa ritenere che questa grotta contenga livelli circeiani (aurignaziani medi) analoghi a quelli della Grotta del Fossellone. Sempre sulla sinistra, attraverso una fessura, è visibile una diramazione della grotta, la cui esplorazione è stata rinviata ad ulteriori ricerche.

27 e 28. Piccole grotte vuote.

29. GROTTA DEL CERVIDE. — Piccola, profonda e parzialmente invasa dal mare, questa cavità conserva, nella sua parte più interna, un lembo di riempimento detritico cementato, nel quale è visibile una mascella intera di Cervide.

(1) A. C. BLANC, *Fauna a Ippopotamo* ecc.

30. GROTTA STEFANINI. — Sotto la Torre del Fico vi sono due grotte, di piccole dimensioni, il cui suolo è di qualche metro più elevato del livello del mare e che mostrano entrambe una sezione del loro antico riempimento detritico messa in evidenza dalla demolizione marina. Quella di sinistra contiene, alla base, un lembo di spiaggia marina fossile, ricoperto da una terra violacea, poi uno strato di limo sabbioso stratificato, quindi un nuovo livello di terra rosso-violacea, ricoperto da un altro strato di limo sabbioso stratificato. Vi si sovrappone un complesso di detriti rocciosi cementati in una terra brunastra. Nello strato più alto di limo stratificato è visibile, cesellato dall'erosione marina, un cranio di Bovide, col frontale e le corna quasi interamente conservate ed ancora in parte immerse nella roccia. Il riempimento contiene, in vari livelli, fauna fossile e industria di tipo paleolitico litoraneo. La stratigrafia dei depositi contenuti in questa cavità mostra qualche analogia con quella della Grotta delle Capre, con cui potrà essere utilmente confrontata.

31. GROTTA DI TORRE DEL FICO. — La seconda grotticella adiacente, verso sud, a quella precedente, mostra anch'essa alla base un lembo di spiaggia marina fossile, al quale si sovrappone un riempimento detritico cementato, contenente fauna fossile ed industria del tipo paleolitico litoraneo.

Da quanto sopra esposto risulta che la costiera del Monte Circeo contiene, fra Torre Paola e Torre del Fico, un complesso imponente di giacimenti pleistocenici, fertili di fauna e flora fossile e di industrie paleolitiche, tanto più significativi in quanto possono essere messi in relazione cronologica con le oscillazioni della linea di riva marina durante il Quaternario. Prossime campagne di ricerca saranno svolte ad esplorare le falde orientali e settentrionali del monte, ed anche le parti più elevate della costiera occidentale e meridionale, di cui sono state prese in considerazione, nella presente Nota, soltanto le cavità strettamente litoranee.

Le grotte sopra elencate, che si aprono ad altezze comprese fra zero e 20 metri sul livello del mare, testimoniano quasi tutte, con solchi marini e perforazioni di litodomi, di un'antica linea di riva marina, più elevata dell'attuale, le cui tracce sono state rilevate fino a circa 15 metri sul livello del mare. Esse testimoniano inoltre, concordemente, che la linea di riva marina si è in seguito abbassata, ad un livello inferiore a quello odierno: durante questo periodo si è compiuto il riempimento delle cavità litoranee, con detriti terrosi, sabbiosi e rocciosi, fertili di fauna e di industria, che si sovrappongono spesso ai lembi di spiaggia fossili. Questi riempimenti subaerei scendono talvolta (Grotta del Fossellone) fino al livello attuale del mare e sono spesso letteralmente sospesi sul vuoto. È evidente che le condizioni attuali delle grotte, il loro parziale svuotamento e la messa in evidenza della loro stratigrafia sono opera del ritorno trasgressivo del mare, dal livello inferiore sopra accennato, a quello attuale.





Fig. 1. — Le grotte litoranee del Monte Circeo.

1. Grotta spaccata di Torre Paola +, — 2. Grotta aperta, — 3. Grotta dell'Isolotto +, — 4. Grotta del Bombardiere, — 5. Grotta Breuil ++, — 6. Grotta della Maga Circe +, — 7. Spiaggia dei Bombardieri +, — 8. Grotta del Rimbombo +, — 9. Grotta dei Tre Luigi +, — 10. Grotta Anna ++, — 11. Grotta della Fessura +, — 12. Grotta delle Palme +, — 14. Grotta dei Pesci +, — 15. Grotta dell'Alabastro, — 16 e 17, Grotte di Torre Cervia, — 18. Grotta dell'Acquario ++, — 19. Grotta del Faro, — 20. Grotta Elena ++, — 21. Grotta del Fossellone ++, — 22. Grotta dell'Impiso +, — 23. Grotta delle Capre ++, — 24. Grotta Azzurra, — 26. Grotta del Presepio ++, — 29. Grotta del Cervide ++, — 30. Grotta Stefanini ++, — 31. Grotta di Torre Fico ++.

Le grotte nn. 13, 25, 27 e 28 sono cavità vuote.

+ = Grotte contenenti residui di riempimento detritico.

++ = Grotte il cui riempimento ha fornito fauna fossile ed industria paleolitica.

La presenza di fauna a Ippopotamo e Rinoceronte e di industria di tipo musteriano negli strati basali del riempimento detritico delle grotte induce ad attribuire al Tirreniano la precedente fase di livello marino più elevato dell'attuale, durante la quale sono stati incisi i solchi marini, sono state perforate dai litodomi le pareti delle grotte, e si sono deposte sul loro fondo le spiagge fossili, che formano spesso la base del loro riempimento. I depositi subaerei terrosi e brecciosi sovrapposti sono attribuibili all'epoca della regressione marina post-tirreniana, il cui clima glaciale è testimoniato dalle faune a Stambecco, e, nei livelli più alti, a Marmotta (?). Durante questo Glaciale post-tirreniano è scomparsa per sempre la fauna calda pleistocenica ed è comparso, a sostituire il Musteriano, il Paleolitico superiore, con un tipico Aurignaziano medio; quindi, parallelamente alla fusione progressiva dei ghiacciai pleistocenici, la trasgressione fiandriana <sup>(1)</sup> ha riportato il livello del mare al suo livello odierno, determinando, con il ritorno offensivo della linea di riva, la demolizione dei terreni depositi durante l'emersione glaciale della piattaforma continentale, demolizione che ha raggiunto i piedi della scogliera attuale, ove alcune cavità litoranee ci hanno conservato, come in un prezioso archivio, la serie dei terreni, delle faune, delle flore e delle industrie umane che si sono susseguite nella regione circea durante il corso dei lontani millenni. La successione degli eventi geologici e paleoclimatici post-tirreniani, indicati dalla posizione topografica e dalle condizioni attuali di questi giacimenti, dalle caratteristiche litologiche della serie dei terreni e dalla successione delle faune, è analoga, anche nei dettagli, a quelle di altri classici giacimenti costieri mediterranei, come le Grotte dei Balzi Rossi di Grimaldi <sup>(1)</sup> e la Grotta Romanelli in Terra d'Otranto <sup>(2)</sup>. Ho già esposto altrove <sup>(3)</sup> le ragioni che mi inducono a considerare coeve queste serie stratigrafiche. I nuovi giacimenti litoranei del Monte Circeo confermano nuovamente, con copiose e concordanti testimonianze, il carattere generale ed il sincronismo delle oscillazioni della linea di riva marina mediterranea dopo il Tirreniano, aggiungendò un nuovo e valido argomento in favore della teoria dell'eustatismo glaciale.

(1) A. C. BLANC, *La stratigraphie de la plaine cotière de la basse Versilia (Italie) et la transgression flaudrienne en Méditerranée*. «Revue de Geogr. phys. et de Géol. dyn.», IX, fasc. 2, Parigi, 1936.

(1) M. BOULE, *Les Grottes de Grimaldi*. I. *Géologie et Paléontologie*. Monaco, 1906.

(2) G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, I e II. «Arch. per l'Ant. e l'Etn.». Firenze, vol. L, 1920 e vol. LVIII, 1928.

(3) A. C. BLANC, *Sulla penetrazione e diffusione del Paleolitico superiore in Europa ed in Italia, in funzione della Paleoclimatologia e Paleogeografia glaciali*. «Quartär», I. Berlino, 1938.

**Fisiologia** (Chimica biologica). — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — VII. *Sul comportamento della conduttività elettrica del liquido seminale in funzione della temperatura*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> di V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In due precedenti Note<sup>(3)</sup> abbiamo riferito, che il liquido seminale umano presenta, a 20° C. di temperatura, una conduttività elettrica specifica ( $\kappa$ ) media compresa tra  $88.04 \times 10^{-4}$  e  $107.50 \times 10^{-4}$  mhos, e che il liquido seminale di cane, pure a 20° C., presenta una conduttività media compresa tra  $129.1 \times 10^{-4}$  e  $138.0 \times 10^{-4}$  mhos.

Tenendo presente che la temperatura ha una grande influenza sulla conduttività elettrica, con nuove indagini, di cui intendiamo appunto riferire i risultati nella presente Nota, abbiamo studiato il comportamento della conduttività elettrica del liquido seminale di uomo e di cane in funzione della temperatura. Ciò allo scopo di conoscere, in primo luogo, la effettiva conduttività del liquido in parola alla temperatura di 37–38° C. (che più interessa dal punto di vista fisiologico), e di accertare, in secondo luogo, se, al pari della conduttività degli elettroliti, quella del liquido seminale (pur così complesso) aumentasse linearmente col crescere della temperatura.

È noto infatti che le variazioni della conduttività elettrica degli elettroliti in funzione della temperatura possono essere espresse dalla formula lineare generale

$$\kappa_t = \kappa_0 (1 + ct^0),$$

o più precisamente, poichè le determinazioni da Kohlrausch sono state fatte a 18° C., dalla formula

$$\kappa_{t^0} = \kappa_{18^0} (1 + c [t^0 - 18^0]),$$

ove  $\kappa_0$  è la conduttività alla temperatura  $t^0$  e  $c$  è il coefficiente di temperatura.

In soluzione acquosa il coefficiente di temperatura è diverso per le diverse sostanze: per temperature medie e in soluzioni diluite esso è 0.020–

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1938.

(3) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — V. *Pressione osmotica, conduttività elettrica e concentrazione in ioni  $H^+$  del liquido seminale umano*. «Rendiconti della R. Acc. Naz. Lincei», vol. XXVII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 603; VI. *Pressione osmotica, conduttività elettrica e concentrazione in ioni  $H^+$  del liquido seminale di cane*. «Ibidem», vol. XXVII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 625.

0.023 per i sali, 0.009-0.016 per gli acidi e certi sali acidi, 0.019-0.020 per gli alcali caustici; ossia, per ogni grado di aumento della temperatura si ha, a seconda della sostanza, un aumento della conduttività da 0.9 a 2.3 ‰. Per il siero di sangue Bugarszky e Tangl<sup>(1)</sup> stabilirono, che per ogni grado di aumento della temperatura la conduttività elettrica si eleva del 2.21 ‰.

Le nostre indagini, per come abbiamo detto, sono state condotte sul liquido seminale umano e sul liquido seminale di cane.

Il liquido seminale umano è stato raccolto al solito nell'accoppiamento normale, e i vari campioni, su cui sono state eseguite le determinazioni, provenivano da quattro differenti soggetti. Il liquido seminale di cane è stato raccolto col metodo della vagina artificiale, e i campioni provenivano da due differenti soggetti. Nei due casi, per la raccolta del liquido, si è seguita sempre la tecnica da noi precedentemente descritta<sup>(2)</sup>.

Le determinazioni della conduttività elettrica sono state fatte mediante il ponte di Wheatstone, secondo il metodo di Kohlrausch, adoperando un vaso di resistenza di piccole dimensioni, di cui si controllava frequentemente la capacità di resistenza con soluzione 0.1 N di KCl.

Durante le determinazioni il vaso di resistenza rimaneva immerso in un bagno di acqua, di cui si faceva variare opportunamente la temperatura. Su ogni campione di liquido una prima determinazione era fatta sempre alla temperatura di 18° C.; le determinazioni successive erano fatte a temperature sempre più elevate — come per ogni esperienza è specificato nelle annesse tabelle — fino a 38° C. Spesso le determinazioni venivano ripetute, durante il successivo periodo di raffreddamento del liquido, alle stesse temperature già esplorate durante il periodo di riscaldamento.

Sulla base dei dati così assunti, valendoci della nota formula

$$c = \frac{\kappa_{t^{\circ}} - \kappa_{18^{\circ}}}{\kappa_{18^{\circ}} (t^{\circ} - 18^{\circ})}$$

abbiamo calcolato il valore del coefficiente di temperatura ( $c$ ) distintamente per il liquido seminale umano e per il liquido seminale di cane.

Nella tabella I sono riportati i valori ottenuti sperimentando sul liquido seminale umano, e nella tabella II quelli ottenuti sperimentando sul liquido seminale di cane.

(1) BUGARSZKY E TANGL, citati da F. BOTTAZZI, *Principii di Fisiologia*. Vol. I, Soc. Ed. Libr. Milano, 1906.

(2) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — I. *Sul valore del pH del liquido seminale umano normale*. « Rendiconti della R. Acc. Naz. Lincei », vol. XXV, ser. 6<sup>a</sup>, 1937, p. 268; IV. *Sul valore del pH del liquido seminale di cane*. « Ibidem », vol. XXVII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 597.

TABELLA I.

*Liquido seminale umano.*

Numero progressivo		Temperatura C. <sup>o</sup>	Conducibilità elettrica specifica $\times 10^{-4}$	Coefficiente termico $c = \frac{\alpha t^0 - \alpha 18^0}{\alpha 18^0 (t^0 - 18^0)}$	Numero progressivo		Temperatura C. <sup>o</sup>	Conducibilità elettrica specifica $\times 10^{-4}$	Coefficiente termico $c = \frac{\alpha t^0 - \alpha 18^0}{\alpha 18^0 (t^0 - 18^0)}$
esperienza	soggetto				esperienza	soggetto			
1	1	18 <sup>o</sup> .0	91.4	—	5	2	18 <sup>o</sup> .0	100.5	—
		24 <sup>o</sup> .7	107.0	0.02548			20 <sup>o</sup> .2	105.7	0.02352
		29 <sup>o</sup> .0	117.4	0.02586			25 <sup>o</sup> .0	116.9	0.02331
		32 <sup>o</sup> .8	126.7	0.02598			29 <sup>o</sup> .1	128.2	0.02483
		35 <sup>o</sup> .2	132.0	0.02583			32 <sup>o</sup> .2	136.1	0.02495
		37 <sup>o</sup> .2	136.7	0.02582			37 <sup>o</sup> .8	150.2	0.02498
		Media . . .		0.02579			Media . . .		0.02432
2	1	18 <sup>o</sup> .0	95.1	—	6	3	18 <sup>o</sup> .0	96.7	—
		20 <sup>o</sup> .0	100.0	0.02576			23 <sup>o</sup> .3	109.3	0.02458
		25 <sup>o</sup> .5	113.5	0.02580			23 <sup>o</sup> .6	110.2	0.02493
		28 <sup>o</sup> .0	119.6	0.02576			27 <sup>o</sup> .5	119.4	0.02471
		30 <sup>o</sup> .8	126.7	0.02596			31 <sup>o</sup> .2	129.5	0.02560
		34 <sup>o</sup> .6	136.5	0.02620			35 <sup>o</sup> .0	138.5	0.02543
		38 <sup>o</sup> .0	145.0	0.02623			38 <sup>o</sup> .0	145.6	0.02520
		Media . . .		0.02595			Media . . .		0.02507
3	1	18 <sup>o</sup> .0	94.7	—	7	2	18 <sup>o</sup> .0	97.3	—
		26 <sup>o</sup> .6	114.7	0.02456			24 <sup>o</sup> .6	112.8	0.02414
		30 <sup>o</sup> .8	125.5	0.02540			28 <sup>o</sup> .0	120.6	0.02395
		34 <sup>o</sup> .0	132.0	0.02462			30 <sup>o</sup> .2	126.6	0.02468
		37 <sup>o</sup> .0	139.4	0.02484			37 <sup>o</sup> .7	146.0	0.02540
		Media . . .		0.02485			Media . . .		0.02454
4	3	18 <sup>o</sup> .0	99.4	—	8	4	18 <sup>o</sup> .0	92.0	—
		25 <sup>o</sup> .0	116.2	0.02414			20 <sup>o</sup> .4	97.5	0.02480
		28 <sup>o</sup> .2	125.0	0.02525			24 <sup>o</sup> .8	107.5	0.02478
		31 <sup>o</sup> .9	135.1	0.02584			30 <sup>o</sup> .1	120.6	0.02569
		37 <sup>o</sup> .4	149.2	0.02583			37 <sup>o</sup> .2	137.5	0.02548
		Media . . .		0.02526			Media . . .		0.02519



TABELLA II.  
*Liquido seminale di cane.*

Numero progressivo		Temperatura C. <sup>o</sup>	Conducibilità elettrica specifica $\kappa \times 10^{-4}$	Coefficiente termico $c = \frac{\kappa t^0 - \kappa 18^0}{\kappa 18^0 (t^0 - 18^0)}$	Numero progressivo		Temperatura C. <sup>o</sup>	Conducibilità elettrica specifica $\kappa \times 10^{-4}$	Coefficiente termico $c = \frac{\kappa t^0 - \kappa 18^0}{\kappa 18^0 (t^0 - 18^0)}$
esperienza	soggetto				esperienza	soggetto			
1	I	18 <sup>o</sup> .0	135.0	—	4	2	18 <sup>o</sup> .0	135.6	—
		22 <sup>o</sup> .8	149.4	0.02222			23 <sup>o</sup> .0	151.1	0.02286
		25 <sup>o</sup> .5	159.2	0.02390			26 <sup>o</sup> .5	161.4	0.02233
		30 <sup>o</sup> .5	174.0	0.02312			29 <sup>o</sup> .5	170.1	0.02212
		35 <sup>o</sup> .0	188.4	0.02326			34 <sup>o</sup> .8	186.3	0.02225
		37 <sup>o</sup> .5	197.9	0.02363			36 <sup>o</sup> .5	191.4	0.02224
		Media . . .		0.02324			Media . . .		0.02236
2	I	18 <sup>o</sup> .0	134.9	—	5	I	18 <sup>o</sup> .0	129.3	—
		25 <sup>o</sup> .1	156.2	0.02224			23 <sup>o</sup> .7	146.5	0.02334
		29 <sup>o</sup> .8	170.1	0.02212			28 <sup>o</sup> .0	160.2	0.02390
		35 <sup>o</sup> .2	187.6	0.02271			32 <sup>o</sup> .6	174.0	0.02368
		37 <sup>o</sup> .0	192.7	0.02255			36 <sup>o</sup> .4	185.1	0.02346
		Media . . .		0.02233			37 <sup>o</sup> .8	190.1	0.02375
3	2	18 <sup>o</sup> .0	125.7	—	6	2	18 <sup>o</sup> .0	134.7	—
		24 <sup>o</sup> .8	146.1	0.02387			30 <sup>o</sup> .0	170.6	0.02221
		30 <sup>o</sup> .0	161.4	0.02365			37 <sup>o</sup> .0	193.2	0.02286
		37 <sup>o</sup> .0	182.7	0.02387			Media . . .		0.02253
		Media . . .		0.02376					

Notiamo anzitutto, che la conduttività elettrica specifica del liquido seminale umano, che a  $20^{\circ}\text{C.}$  — secondo le precedenti indagini — risultava compresa tra  $88.04 \times 10^{-4}$  e  $107.50 \times 10^{-4}$  mhos, si aggira invece, a  $37-38^{\circ}\text{C.}$ , tra  $136.7 \times 10^{-4}$  e  $150.2 \times 10^{-4}$  mhos; parimenti, la conduttività elettrica specifica del liquido seminale di cane, che, a  $20^{\circ}\text{C.}$ , risultava compresa tra  $129.1 \times 10^{-4}$  e  $138.9 \times 10^{-4}$  mhos, si aggira, invece, a  $37-38^{\circ}\text{C.}$ , tra  $182.7 \times 10^{-4}$  e  $197.9 \times 10^{-4}$  mhos.

Analizzando l'azione della temperatura sulla conduttività del liquido seminale sia di uomo che di cane si rileva, che quest'ultima aumenta col crescere della temperatura. Precisamente la conduttività elettrica del liquido seminale umano si eleva sempre, per ogni grado di aumento della temperatura (da  $18^{\circ}$  a  $38^{\circ}\text{C.}$ ), del  $2.51\%$  ( $\pm 0.08$ ), in media, rispetto alla conduttività ( $\kappa_{18^{\circ}}$ ) presentata a  $18^{\circ}\text{C.}$ ; e quella del liquido seminale di cane si eleva del  $2.30\%$  ( $\pm 0.07$ ), in media.

Sia nel caso del liquido seminale di uomo che di quello di cane si osserva cioè sempre un accrescimento lineare della conduttività in funzione della temperatura, così come si verifica nel caso degli elettroliti.

Durante il raffreddamento (da  $38^{\circ}$  a  $18^{\circ}\text{C.}$ ) susseguente al riscaldamento, il liquido seminale di uomo e di cane ripresenta di nuovo la conduttività che, a temperature corrispondenti, mostrava durante la fase di riscaldamento; per cui è da concludere, che non solo la conduttività di tali liquidi è funzione lineare della temperatura, ma che l'andamento del fenomeno è sempre manifesto sia durante la fase di riscaldamento del liquido sia durante quella successiva di raffreddamento.

Dato l'accrescimento lineare della conduttività elettrica in funzione della temperatura, ne deriva che, avendo determinato la conduttività di esso a  $18^{\circ}\text{C.}$ , è possibile calcolare, entro certi limiti e con sufficiente approssimazione, la conduttività di cui sarebbe dotato alla temperatura  $t^{\circ}$  (compresa tra  $18^{\circ}$  e  $38^{\circ}\text{C.}$ ) mediante la formula in uso per gli elettroliti

$$\kappa_{t^{\circ}} = \kappa_{18^{\circ}} (1 + c [t^{\circ} - 18^{\circ}]).$$

In tal caso, il coefficiente termico medio  $c$  corrisponderà a  $0.0251$  trattandosi di liquido seminale umano, e a  $0.0231$  trattandosi di liquido seminale di cane.

In conclusione, rimane da queste nuove indagini fissato, che:

1° il liquido seminale umano presenta, a  $37-38^{\circ}\text{C.}$  di temperatura, una conduttività elettrica specifica compresa tra  $136.7 \times 10^{-4}$  e  $150.2 \times 10^{-4}$  mhos;

2° il liquido seminale di cane, pure a  $37-38^{\circ}\text{C.}$ , presenta una conduttività elettrica specifica compresa tra  $182.7 \times 10^{-4}$  e  $197.7 \times 10^{-4}$  mhos;

3° le variazioni della conduttività elettrica del liquido seminale di uomo e di cane sono in funzione lineare della temperatura (per variazioni comprese tra 18° e 38° C.), e l'andamento del fenomeno è sempre manifesto sia durante la fase di riscaldamento del liquido sia durante quella successiva di raffreddamento;

4° la conduttività elettrica specifica del liquido seminale umano si eleva, per ogni grado di aumento della temperatura, del 2.51 ‰, in media, e quella del liquido seminale di cane del 2.31 ‰, in media, rispetto alla conduttività presentata a 18° C.

U. A.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 5 novembre 1938 - Anno XVII*

*Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Fisica.** — *Confronto fra teoria termica ed esperienze di fotoresistenza metallica.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio Q. MAJORANA.

I risultati della teoria della propagazione di un'onda termica attraverso una sottile lamina metallica, fissata su di un mezzo semiconduttore, mediante uno strato di varia conducibilità calorifica, esposti in una mia Nota precedente <sup>(2)</sup>, possono essere messi in raffronto con quanto già da me è stato osservato sperimentalmente.

Si consideri dapprima il caso di lamine d'oro incollate su vetro. Per esse, l'esperienza fa rilevare facilmente dei valori di  $\varphi$  (ritardo di fase fra pulsazione della luce e pulsazione della resistenza elettrica della lamina) notevolmente ridotti: in certi casi persino di  $16^\circ$ .

Questo fatto può dare una conferma generica della applicabilità della teoria termica già esposta. Secondo essa, infatti,  $\varphi$  può scendere appunto, per lamine della maggior sottigliezza, sino a valori prossimi al suddetto, ed anche al disotto ( $10^\circ$ ). Non si può però parlare di conferma esatta quantitativamente, non potendosi sapere quale sia il vero valore della conducibilità termica dello strato adesivo,  $\eta$ . Una indagine sperimentale in tale senso non appare possibile, perchè non tutte le condizioni dell'esperienza sono per loro natura controllabili; vi ha inoltre sicuro indizio che talune di esse siano molto variabili col tempo e con lo stato di essiccazione della sostanza adesiva.

(1) Presentata nella seduta del 5 novembre 1938.

(2) Questi «Rendiconti», *Teoria termica della fotoresistenza metallica*, Vol. XXVIII, pp. 177-182.



Ammettiamo, per ipotesi e viceversa, che le curve della figura della Nota citata si possano applicare al caso sperimentale. Per esempio, si consideri il diagramma corrispondente allo spessore  $0.08 \mu$ , ed alla frequenza di interruzione del raggio, 600, segnato nella richiamata figura. Esso ci dice che si deve avere un minimo intorno a  $10^\circ$ , al quale corrisponde una conducibilità termica dello strato, di circa  $0.2 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{sec. gradi}$ . Il valore  $\varphi = 16^\circ$ , trovato sperimentalmente, è alquanto superiore; e si può pensare che l'esperienza non abbia consentito di raggiungere la condizione di minimo. Ora, mentre questo corrisponde, nel caso del diagramma teorico citato, ad un valore di  $0.2 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{sec. gradi}$ ,  $\varphi = 16^\circ$  corrisponde ad  $1 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{sec. gradi}$ . La funzione  $\varphi(\eta)$ , rappresentata dal diagramma, ammetterebbe un secondo valore di  $\eta$  in corrispondenza di  $\varphi = 16^\circ$ , a sinistra sul diagramma, ed al di là del minimo. Esso è circa  $\eta = 0.07 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{sec. gradi}$ . E così in generale, vi sarebbero due valori di  $\eta$  a cui può corrispondere lo stesso valore di  $\varphi$ . Ma realmente, l'esperienza permette di constatare il solo ramo destro della curva, da  $45^\circ$  a  $16^\circ$  circa. Per ragioni pratiche, non è perciò possibile realizzare una conducibilità termica tanto scarsa, da raggiungere e sorpassare verso sinistra il minimo indicato. Risulta dunque, dalla considerazione del diagramma, che la conducibilità termica dello strato adesivo, realizzato nel modo descritto è sempre superiore a circa  $1 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{sec. gradi}$ .

Vi è tuttavia un modo di predisporre che la dispersione termica delle lamine metalliche sia inferiore a quella risultante dai valori di  $b$  e  $\eta$  corrispondenti ai descritti casi sperimentali. Esso consiste nel lasciare le lamine stesse libere da entrambe le facce, e cioè non fissarle su vetro; esse risultano così immerse in un gas più o meno conduttore del calore (idrogeno od aria). Per brevità, non descrivo i particolari di tali esperimenti a cui ho già altra volta fatto cenno. Mi basta rilevare, che in tale caso,  $\varphi$  va avvicinandosi a  $90^\circ$ , come appunto dicono i diagrammi teorici. Ma tale artificio, del tutto diverso, non permette, in ogni modo, di predisporre lamine per cui  $\varphi$  corrisponda ad un qualunque valore, compreso nel ramo a sinistra della curva, fra  $90^\circ$  e  $10^\circ$ . Esso consente solo di ottenere valori più o meno prossimi a  $90^\circ$  (sempre inferiori), come si è detto.

Esaminando i diagrammi teorici dal lato destro, si scorge che essi terminano asintoticamente ad una parallela alle ascisse, a circa  $45^\circ$  o poco più. Anche ciò non è mai verificabile con le lamine incollate. Infatti, per esse non si hanno mai per  $\varphi$ , valori superiori a  $40^\circ$  o  $42^\circ$ . Questo fatto dipende dalla conducibilità termica dello strato adesivo, che ha sempre un valore finito. In altri termini, questo strato presenta sempre una certa resistenza termica, differente da zero; e ciò è vero, ancorchè lo strato, per la lunga sua stagionatura, si sia completamente essiccato.

Un aumento della frequenza  $n$  di interruzione del raggio luminoso, oppure un aumento dello spessore della lamina, porta ad accrescere anche,

in generale, i valori di  $\varphi$ . Ciò risulta tanto dalla teoria termica, quanto dall'esperimento. Anche qui, però, un controllo quantitativo della esatta corrispondenza tra teoria ed esperienza, non è possibile, ignorandosi *a priori*, ogni volta, il vero valore di  $\eta$ . A parte questa impossibilità, vi ha dunque indizio di coincidenza sommaria nell'andamento dei fatti, tra la previsione termica teorica e l'esperienza.

Ma tale conclusione apparisce non vera, quando si confrontino attentamente i risultati sperimentali ottenuti, servendosi a turno delle due lampade ad incandescenza od a mercurio. Le differenze così constatabili sono state messe in evidenza nell'esposizione della parte sperimentale, già fatta in altra precedente Nota <sup>(1)</sup>; e mi, riferisco a quanto allora è stato detto. Non è dunque possibile spiegare con la sola teoria termica, la diversa azione delle luci delle differenti due lampade. Detta teoria infatti, non tiene conto che della quantità di calore apportata dalla luce nella lamina, e nessuna influenza sul puro effetto termico, può avere il cambiare della lunghezza d'onda luminosa agente.

Il caso generale teorico che ha permesso di stabilire le formule (8) e (9) della precedente Nota, e di tracciare i diagrammi dell'altra citata, trova qualche riscontro, come si è ora visto, nelle osservazioni sperimentali fatte con le lamine incollate. Le semplificazioni che esse subiscono, diventando le (10) ed (11), corrispondono al caso delle lamine catodiche di cui ora ancora dirò, riferendomi anche a quanto, già è stato esposto sull'argomento nelle Note citate. Nel tracciare i diagrammi sperimentali di  $\varphi$ , riferiti a vari spessori di tali lamine catodiche ed a due frequenze diverse (600 e 1200), essi sono stati messi a raffronto con altri due che corrispondono alla teoria termica (formula 11), e sono stati segnati sulla stessa figura. Gli andamenti pseudo-parabolici di tali diagrammi sono osservabili, tanto nel caso teorico, che in quello sperimentale. Considerando i diagrammi teorici, si rileva che essi tendono asintoticamente al valore  $\varphi = 45^\circ$ , per spessori evanescenti delle lamine. Ciò realmente corrisponde a quanto esprime la formula (11), della Nota precedente, qualora si tenga conto della rappresentazione logaritmica della figura. Le curve sperimentali sono anche esse asintotiche rispetto a valori di  $\varphi$  alquanto maggiori o minori di  $45^\circ$ , a seconda che si tratti di luce proveniente dalla lampada a mercurio o da quella ad incandescenza. È questo il fatto più caratteristico di tutte le presenti ricerche, che trova riscontro con l'analogo osservato per le lamine incollate. Le osservazioni fatte con le lamine catodiche appariscono però più precise, sicure e ripetutamente controllabili. Ciò dipende evidentemente, dalla regolarità e dalla costanza di caratteristiche, dei depositi catodici.

Va osservato inoltre, che i diagrammi ottenibili con lamine catodiche, non possono spingersi sino a spessori eccessivamente ridotti delle lamine

(1) Questi « Rendiconti », *Azione della luce su sottili lamine d'oro*.

d'oro. Ciò dipende dal fatto che, al disotto di un certo spessore, la lamina diventa troppo trasparente; la quantità di luce assorbita è così, troppo esigua e l'effetto constatabile tende a sparire. Per queste ragioni, ho limitato le osservazioni allo spessore minimo di  $0.04 \mu$ . A tale valore, pur corrispondendo una trasparenza in verde non troppo scuro, si ha ancora un assorbimento della luce non riflessa dalla lamina, di circa il 90 %.

L'importanza del comportamento delle lamine catodiche, sotto l'azione di varie luci, è già stata messa in rilievo al comma c) della Nota citata; tale azione costituisce il fatto veramente nuovo e quantitativamente meglio assodato di tutta questa ricerca. Esso non sembra potersi ascrivere ad alcuna causa perturbatrice o secondaria, di cui non si sia tenuto conto, nella minuta indagine che è stata fatta, sulle varie modalità sperimentali. Esso depone per l'esistenza di una particolare azione della luce, sulla conducibilità elettrica dei metalli (in particolare dell'oro). Stabilire quale parte del complesso fenomeno corrisponda a tale azione, mentre certamente nella sua rimanenza esso è dovuto ad azione termica, non appare cosa facile. Ciò dipende anche, dalla circostanza per cui occorre sperimentare con forti intensità luminose; ed in conseguenza di ciò non si può pensare nemmeno a selezionare le varie radiazioni, in guisa da studiare la singola azione delle varie lunghezze d'onda, possibilmente isolate.

Dal complesso delle ricerche esposte, appare tuttavia lecito avanzare l'ipotesi che il fenomeno osservato corrisponda ad una speciale proprietà delle radiazioni più refrangibili, di cui la lampada in quarzo, a mercurio, è particolarmente ricca. Queste radiazioni, agendo su lamine metalliche tanto sottili da restare ancora alquanto trasparenti, darebbero luogo ad un abbassamento nei valori di  $\varphi$ . Andare al di là di questa molto sommaria ipotesi, coll'affermare, per esempio, che il fatto osservato abbia una qualche relazione col classico fenomeno fotoelettrico, può costituire un'arbitraria deduzione. Ciò dicasi, anche perchè si potrebbe pensare che la particolare proprietà accennata sia posseduta, non dalle radiazioni più refrangibili, ma dalle meno; nel senso che queste darebbero luogo anzichè ad una diminuzione dei valori di  $\varphi$ , ad un accrescimento. Scegliere fra queste due ipotesi opposte, appare per ora prematuro.

Un ultimo rilievo va fatto circa il sopraelevarsi del diagramma teorico, rispetto a quelli sperimentali, quando si tratti di spessori notevoli ( $3$  o  $4 \mu$ ). Ciò è già stato rilevato al comma d) della Nota citata. Per i detti spessori e con entrambe le due qualità di luce, lo spostamento di fase  $\varphi$  è notevolmente inferiore alle previsioni teoriche termiche. Tale scarto può arrivare a circa  $5^\circ$  d'arco. Non è da attribuire ciò ad errori od incertezze di osservazione, giacchè l'apparecchio di misura dà un'approssimazione di circa  $20'$ . E d'altronde, per lamine sottili, si rilevano costantemente, con l'esperienza, valori di  $\varphi$  prossimi a  $45^\circ$ , come vuole la teoria termica (ciò dicasi a parte la differenza, relativamente piccola, fra le azioni delle due lampade). Si potrebbe

ancora pensare, che qualche discordanza nel confronto fra teoria termica ed esperienza, derivi dal non aver adottato valori numerici sufficientemente precisi, per i vari parametri che rientrano nelle formule dedotte da quella teoria. Ma, realmente, questo non è il caso. Infatti la maggiore incertezza in tale scelta, si poteva avere per il calore specifico e soprattutto per il coefficiente di conducibilità termica del vetro. Ma appunto in considerazione di questa possibilità, queste grandezze sono state determinate direttamente per le lastre, di vetro da me usate, con un errore probabile di circa il 5 %. Ed infine, si rileva che la teoria termica esposta sembra appoggiarsi su principî classici inequivocabili, mentre non pare attendibile ammettere un'azione di natura non termica, nel caso di lamine con spessori molto superiori alle massime lunghezze d'onda agenti.

Tutte queste considerazioni possono costituire argomenti per future ricerche sperimentali, atte a chiarire ulteriormente, i fenomeni osservati e la loro interpretazione.

**Paleontologia.** — *Osservazioni sulla struttura del guscio dei Clipeastri*<sup>(1)</sup>. Nota I<sup>(2)</sup> del Corrisp. G. CHECCHIA-RISPOLI.

Nel corso dello studio di una cospicua collezione di Clipeastri, raccolti dal collega prof. O. De Fiore in vari punti della formazione miocenica della Calabria, ho potuto compiere, per speciali favorevoli condizioni di fossilizzazione di qualche esemplare, alcune osservazioni sul guscio di questi singolari echinidi, in gran parte nuove, che andrò esponendo in successive Note.

Come è noto, i Clipeastri del tipo di *Clypeaster portentosus* Desm., di *Clypeaster insignis* Segu., *Clypeaster tyrrenicus* Ch. - Risp. ecc. a differenza di tutti gli altri Echinidi, presentano nell'interno del guscio una spessa formazione di calcare secondario, dovuto ad uno speciale sviluppo delle placche od assule ambulacrali ed interambulacrali determinante una specie di muraglia continua; come un secondo guscio concentrico al primo, ben distinto nei raggi per l'esistenza di spazi più o meno liberi tra di essa ed il guscio. Rimandando il lettore per ciò che riguarda la morfologia dei *Clypeaster* s. str. ad alcuni miei lavori, qui sotto indicati<sup>(3)</sup>, nella presente Nota mi occu-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia della R. Università di Roma.

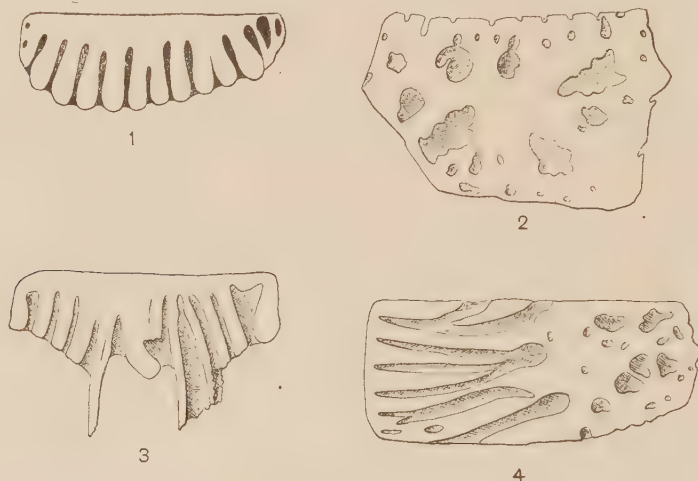
(2) Presentata nella seduta del 5 novembre 1938.

(3) G. CHECCHIA-RISPOLI, *Osservazioni sulla morfologia interna dei Clipeastri e loro classificazione* in «Paleont. Ital.», vol. XXVI, Pisa; *Illustrazione dei Clipeastri miocenici della Calabria* in «Mem. p. s. a. desc. d. Carta geol. d'Italia», vol. IX, Roma, 1925; *Sopra alcuni Stolonocypus miocenici della Sardegna* in «Boll. R. Uff. geol. d'Italia», vol. LII, Roma, 1928; *Nuove osservazioni sulla morfologia interna dei Clipeastri* in «Paleont. Ital.», vol. XXIX-XXX, Pisa, 1929 ecc.



però della struttura delle assule interambulacrali nelle forme fossili, sulla quale sino ad oggi mancavano particolari dettagli.

Se si osserva una placca isolata appartenente ad un interraccio, in corrispondenza della regione intestinale, che è libera di produzioni calcaree perchè deve alloggiare l'intestino, si notano, da tutti i lati, dei canali sottili più o meno numerosi, che l'attraversano per circa tutto il suo spessore, aprendosi poi nell'interno del guscio; essi sono in maggior numero sui lati adorale ed aborale perchè i più sviluppati. La loro forma è nell'insieme cilindrica, generalmente più ristretta nel mezzo e la direzione è per lo più perpendicolare all'assula, ma frequentemente si scorge una disposizione a ventaglio. Ma numero, forma, dimensione e disposizione dei detti canali variano a secondo della posizione e della grandezza della assula nel guscio.



1. — Placca interambulacrale del piano abactinale mostrante i canali, vista dal lato adorale, ingr. 2 volte. — 2. Placca interambulacrale del piano actinale sezionata in piano per mostrare i vacuoli da cui partono i canali, ingr. 2 1/2 volte. — 3. Placca interambulacrale del piano abactinale che mostra la disposizione a ventaglio dei pilastri, i quali sviluppandosi finiscono con l'incontrare quelli del piano actinale, ingr. 2 volte. — 4. Placca ambulacrale del piano actinale che fa vedere le gallerie traverse ed i vacuoli da cui partono i canali, ingr. 2 volte.

Tutti questi canali si originano nell'interno della placca. La figura 2 è un'assula sezionata in piano, appartenente al piano actinale, la quale mostra numerosi vacuoli di forma irregolare da cui partono i canali, che si dirigono verso la periferia della placca, e che arrivati alla sutura si piegano in alto, se la placca appartiene al piano actinale ed in basso, se appartiene a quello abactinale; indi attraversano lo spessore della placca e sboccano infine



nell'interno del guscio per mezzo di orifizi subcircolari. Siccome i canali si fanno strada tra le suture delle placche, così essi interessano due placche contigue, che possono appartenere tutte e due ad un interradio, oppure essere di natura differente; cosicchè i fori di questi canali segnano i limiti delle assule.

I descritti canali si osservano anche nella regione del bordo e specialmente nella cupola dei petali; siccome quivi le aree interambulacrali si restringono piuttosto rapidamente avvicinandosi alla sommità del guscio, così il numero dei canali diminuisce sino a ridursi ad uno per ogni placca; nel loro insieme gli orifizi dei canali costituiscono una serie a zig-zag spostata verso la linea mediana dell'interradio.

Questi canali isolano dei pilastri nell'interno delle placche; però mentre nella regione intestinale si arrestano alla superficie, nelle altre regioni del guscio si sviluppano sino a che quelli del piano actinale si congiungono con quelli del piano abactinale. Il loro massimo sviluppo si osserva nella cupola dei petali, riuscendo a separare più o meno completamente la cavità ambulacrale da quella intestinale. La figura 3 è una placca del piano abactinale, che fa vedere il prolungamento dei pilastri, tra i quali corrono i canali. Anche nel caso di una fusione molto avanzata è possibile distinguere detti canali, che segnano i limiti delle placche, come fanno nella regione intestinale o marginale.

Pilastri e canali non sono esclusivi delle aree interambulacrali; essi si osservano anche in quelle ambulacrali.

La figura 4 rappresenta una sezione in piano di una placca ambulacrale del piano actinale, appartenente alla regione intestinale: a sinistra di chi guarda si vedono le gallerie che servono per il passaggio dei canali trasversi, a destra i vacuoli, da cui partono i canali in questione. Nella regione dei petali detti canali, più o meno sviluppati, si aprono lungo la linea mediana dei radi. Ma delle particolarità strutturali delle placche ambulacrali secondo la loro posizione nel guscio parlerò in una successiva Nota.

Da quanto ho sopra esposto si può concludere che i descritti canali, destinati a contenere tessuti di sostegno delle parti molli interne, formano un sistema abbastanza complesso, diffuso in tutto il guscio dei clipeastri del tipo di *Clypeaster portentosus*, *C. insignis*, *C. tyrrenicus* ecc. Di questo sistema nulla si conosceva finora riguardo alle forme fossili.

**Matematica.** — *Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea.* — I. *Classificazione delle quasi-asintotiche.* Nota del Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea.* — II. Sistemi invarianti associati ad un sistema di quasi-asintotiche. Nota del Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. La teoria delle « trasformazioni dualistiche » di uno spazio  $S_n$  in sè, studiata nel campo *metrico*, in questi ultimi anni, da A. Terracini e poi da B. Segre <sup>(2)</sup>, può svolgersi assai semplicemente nel campo *proiettivo*, sia riconducendosi alla teoria delle *connessioni affini proiettivamente piane*, da me studiata in precedenti lavori <sup>(3)</sup>; sia anche in modo diretto, con estensione di procedimenti atti allo studio delle ipersuperficie, olonome od anolonome, di  $S_n$ . Questo mostrerò brevemente nella presente Nota, dopo aver premesso alcuni necessari richiami di cose già conosciute.

2. Se in uno spazio *proiettivo*  $S_n$  fissiamo un iperpiano — che potremo interpretare quale iperpiano *improprio* — ne facciamo uno spazio *affine*. Se associamo, con legge qualunque, ai suoi singoli punti degli iperpiani dello stesso  $S_n$ , se diamo cioè una *trasformazione dualistica* dell' $S_n$  in sè, potremo dire analogamente che dell' $S_n$  si fa una collezione di spazi affini: pensando, in relazione a ogni singolo punto di  $S_n$ , l'iperpiano omologo quale iperpiano improprio di uno spazio affine « locale ». Ma di più: data che sia la trasformazione dualistica, purchè essa non sia « di tipo nullo », cioè il punto

(1) Nella seduta del 5 novembre 1938.

(2) Ved. A. TERRACINI, *Densità di una corrispondenza di tipo dualistico, ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre*. « Atti Accad. Torino », 71, 1935-36, 310-328; *Invariante di Mehmke-Segre generalizzato e applicazione alle congruenze di rette*. « Bollettino Unione Matematica Italiana », 15, 1936, 109-113. B. SEGRE, *Invarianti differenziali relativi alle trasformazioni puntuali e dualistiche fra due spazi euclidei*. « Rendiconti Circolo Matematico Palermo », 60, 1936, 224-232. Sia il Terracini che il Segre considerano, più in generale, trasformazioni dualistiche fra due spazi distinti.

(3) Ved. specialmente *Spazi proiettivamente piani* (che citerò d'ora in poi: S. P. P.), « Annali di Matematica » (4), 11, 1932, 111-134; *Superficie anolonome complementari* (S. A. C.), « Scritti Matematici offerti a L. Berzolari », Pavia, 1936, 553-576.

generico di  $S_n$  non appartenga all'iperpiano omologo, *risulta assegnata all' $S_n$  una connessione affine*: quella per la quale la legge di trasporto dei punti dell' $S_n$ , pel passaggio da un punto  $P$  ad un altro  $P^*$  infinitamente vicino, è l'*omologia speciale di centro  $P$  che muta l'iperpiano  $\pi$ , omologo di  $P$ , nell'iperpiano  $\pi^*$ , omologo di  $P^*$* . In quanto questi iperpiani sono gli iperpiani impropri degli spazi affini locali associati a  $P$  e a  $P^*$ , l'omologia speciale ora detta può effettivamente considerarsi quale una « affinità »: ciò rende conto del perchè si ottenga una connessione « affine » <sup>(1)</sup>. Questa risulta *simmetrica, e proiettivamente piana* (tale cioè che le sue geodetiche sono le rette di  $S_n$ ). Di più: ho dimostrato <sup>(2)</sup> che *tutte le connessioni affini simmetriche e proiettivamente piane possono ottenersi a questo modo*: accennerò fra poco all'agevole verifica. Ma notiamo sin d'ora questa conseguenza: *la geometria differenziale proiettiva di una trasformazione dualistica (che non sia di tipo nullo) non differisce dalla geometria di una varietà a connessione affine simmetrica, proiettivamente piana*. Se poi la trasformazione dualistica è di tipo nullo, è manifesto che il suo studio diviene quello di una *ipersuperficie anolonomica* di  $S_n$  <sup>(3)</sup>.

3. Veniamo alla rappresentazione analitica: limitandoci al caso di una trasformazione non nulla. Appare naturale assumere, in relazione ai singoli punti  $P$  dell' $S_n$ , dei riferimenti proiettivi locali aventi  $P$  come vertice, l'iperpiano omologo come faccia opposta ad esso dell' $n$ -edro fondamentale. Ma conviene partire da un riferimento proiettivo ordinario,  $y^\alpha$ , per  $S_n$ , associandovi un riferimento curvilineo  $u^r$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = p_0, p_1, \dots, p_n$ ;  $r, s, t, v, w = 1, \dots, n$ ). Siano

$$(3.1) \quad y^\alpha = y^\alpha(u^1, \dots, u^n)$$

le coordinate proiettive omogenee del punto di coordinate curvilinee  $u^r$ ; posto

$$(3.2) \quad y^\alpha = \partial_r y^\alpha \left( = \frac{\partial y^\alpha}{\partial u^r} \right); \quad y^\lambda_\alpha y^\alpha = \delta^\lambda_\mu \quad (\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega = 0, 1, \dots, n)$$

abbiamo un primo sistema di riferimenti proiettivi locali di vertici  $y^\alpha_\lambda$  (legati, oltrechè al sistema curvilineo, anche alla normalizzazione delle  $y^\alpha$ ); in relazione ai quali sono

$$(3.3) \quad \Gamma^\lambda_{\mu 0} = \delta^\lambda_\mu, \quad \Gamma^\lambda_{\mu r} = y^\lambda_\alpha \partial_r y^\alpha_\mu$$

(1) S. P. P., pp. 119-120.

(2) S. P. P., p. 120.

(3) Ved. *Trasformazioni dualistiche e spazi proiettivamente piani* in corso di stampa nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana »; cfr. E. BOMPIANI, *Sulle varietà anolonomiche*. Questi « Rendiconti » (6), XXVII, 1938, 37-52.

i parametri normalizzati<sup>(1)</sup> della connessione proiettiva integrabile dell' $S_n$ . Senza mutare nè il vertice  $y^\alpha_0$  nè gli spigoli uscenti da esso (che sono le tangenti in  $y^\alpha_0$  alle  $n$  linee coordinate  $u^r$ ) prendiamo ora quale faccia opposta al punto  $y^\alpha_0$  l'iperpiano ad esso corrispondente del campo

$$(3.4) \quad \zeta_\alpha(u^1, \dots, u^n) y^\alpha = 0$$

assegnato. Indichiamo con  $P^\alpha_\lambda(P^\alpha_0, P^\alpha_r)$  i nuovi vertici. Posto

$$(3.5) \quad A_r = - \frac{\zeta_\alpha \partial_r y^\alpha_0}{\zeta_\alpha y^\alpha_0}$$

si ha

$$(3.6) \quad P^\alpha_0 = y^\alpha_0, P^\alpha_r = D_r P^\alpha_0 = \partial_r P^\alpha_0 + A_r P^\alpha_0; \dot{P}_\alpha = \dot{y}_\alpha - A_r \dot{y}_\alpha, \dot{P}_\alpha = \dot{y}_\alpha.$$

Per le trasformazioni (mutamenti della normalizzazione delle  $y^\alpha$ )

$$(3.7) \quad \hat{y}^\alpha_0 = \rho(u^1, \dots, u^n) \cdot y^\alpha_0$$

si ha

$$(3.8) \quad \hat{P}^\alpha_\lambda = \rho P^\alpha_\lambda, \quad \hat{P}_\alpha = \rho^{-1} P_\alpha, \quad \hat{A}_r = A_r - \partial_r \log \rho;$$

cioè: riguardando  $\alpha$  come un indice ordinale, le  $P^\alpha_\lambda$  sono per le (3.7)

scalari di grado 1; le  $\hat{P}^\alpha_\lambda$  di grado  $-1$ ; le  $A_r$  sono parametri di una derivazione covariante ( $D_r$ , già utilizzata nelle (3.6)); che, ad es., per uno scalare  $k$  di grado  $g$  qualunque ( $\hat{k} = \rho^g k$ ) opererebbe nel seguente modo:

$$(3.9) \quad D_r k = \partial_r k + g A_r k.$$

Il riferimento  $P^\alpha_\lambda$  risulta indipendente dalla normalizzazione delle  $y^\alpha$ ; insomma la conoscenza della trasformazione dualistica ci consente di poter fare a meno di una normalizzazione delle coordinate proiettive omogenee<sup>(2)</sup>.

In relazione ai riferimenti locali  $P^\alpha_\lambda$  i parametri (normalizzati) della connessione proiettiva integrabile di  $S_n$  siano indicati con  $A^\lambda_{\mu\nu}$ ; si ha

$$(3.10) \quad A^\lambda_{\mu 0} = \delta^\lambda_\mu, \quad A^\lambda_{\mu r} = \partial_r P^\alpha \cdot \hat{P}_\alpha.$$

(1) Ved. il mio lavoro: *Sulle connessioni proiettive*. «Rendiconti Circolo Matematico di Palermo», 56, 1932, 1-57, p. 20.

(2) Per quanto precede ved. S. A. C., pp. 559-560.

In particolare risulta

$$(3.11) \quad A'_{is} = \Gamma'_{is} + \delta'_{is} A_s + \delta'_{is} A_i,$$

$$(3.12) \quad p_{rs} = A^0_{rs} = \Gamma^0_{rs} - \Gamma'_{rs} A_t + \partial_s A_r - A_s A_r.$$

Sia le  $A^t_{rs}$  che le  $p_{rs}$  risultano, naturalmente, *invarianti per le* (3.7).

In relazione ai cambiamenti delle sole coordinate curvilinee le  $A^t_{rs}$  sono i parametri di una *connessione affine simmetrica*: appunto la *connessione proiettivamente piana* di cui s'è detto al numero precedente. E le  $p_{rs} = A^0_{rs}$  sono le componenti di un *tensore affine*, il quale può anche esprimersi per elementi della connessione  $A^t_{rs}$  (precisamente, pel tensore di curvatura  $R^{***s}_{pqr}$  di questa):

$$(3.13) \quad p_{rs} = \frac{n R^{***t}_{rsr} + R^{***t}_{trs}}{n^2 - 1}.$$

4. Mediante il tensore affine  $p_{rs}$  si rappresenta, in relazione al riferimento locale  $P^a_\lambda$ , il piano dell'omologia speciale detta sopra (n. 2), relativa al passaggio del punto  $P(u^r)$  al punto infinitamente vicino  $P^*(u^r + du^r)$ : dette  $x^\lambda$  le coordinate proiettive omogenee dei punti dell' $S_n$  (e quindi:  $x^r$  quelle dei punti dell'iperpiano  $\pi$ ,  $x^0 = 0$ ) questa è l'equazione del piano d'omologia:

$$(4.1) \quad p_{rs} x^r du^s = 0.$$

Questa stessa equazione, bilineare nelle  $x^r$  e  $du^r$ , quando le  $du^r$  si pensino *variabili*, e s'interpretino quali coordinate omogenee delle direzioni, o anche delle rette, della stella  $P$ , rappresenta la *correlazione K*, fra la stella  $P$  e l'iperpiano  $\pi$  omologo <sup>(1)</sup>, in cui elementi corrispondenti sono la congiungente i punti infinitamente vicini  $P, P^*$  e l' $S_{n-2}$  sezione degli iperpiani  $\pi, \pi^*$  omologhi. Per una trasformazione dualistica di tipo nullo tale correlazione conserva significato: essa è allora la « *proiettività di cella* » del Bompiani <sup>(2)</sup>. Tornando al caso generale: la correlazione  $K$  determina entro la stella  $P$ , se ad ogni retta di questa facciamo corrispondere l'iperpiano che da  $P$  proietta l' $S_{n-2}$  omologo, ancora una correlazione,  $\Gamma$ : fra le rette e gli iperpiani, o — fa lo stesso — fra le direzioni e le  $(n-1)$ -direzioni o giaciture uscenti da  $P$ ; la quale è una *polarità*, rispetto al cono quadrico

$$(4.2) \quad p_{rs} x^r x^s = 0,$$

(1) Tale correlazione è già notata e utilizzata, per considerazioni metriche, dal TERRACINI (1° lav. cit., p. 316) e dal SEGRE (loc. cit.).

(2) Ved. il lavoro: *Sulle varietà anolonomie*, già citato.



quando  $p_{rs}$  è *simmetrico*. Il che accade allora e solo che la trasformazione dualistica si riduce alla polarità rispetto a una ipersuperficie<sup>(1)</sup>. Escluso questo caso, e l'altro in cui  $p_{rs}$  è *emisimmetrico*, cosicchè la correlazione  $\Gamma$  della stella  $P$  in sè è un sistema nullo (caso che può presentare interesse), la correlazione determina<sup>(2)</sup> i due « coni d'incidenza »<sup>(3)</sup>

$$(4.3) \quad p_{rs} x^r x^s = 0 \quad , \quad p^{rs} \xi_r \xi_s = 0 \quad (p^{rs} p_{rt} = \delta_t^r).$$

Le « direzioni principali » della correlazione  $\Gamma$  — corrispondenti invariantemente con le giaciture omologhe — sono naturalmente elementi legati in modo proiettivamente invariante alla coppia  $(P, \pi)$  della corrispondenza dualistica. Limitandoci al caso più generale, in cui vi sono *precisamente*  $n$  direzioni principali indipendenti, basterà rammentare<sup>(4)</sup> che se  $n$  è dispari si ha una direzione principale non situata sul primo cono d'incidenza — la quale potrebbe fornire per la trasformazione dualistica una « normale proiettiva » nel punto generico  $P$  —; le rimanenti direzioni principali — e questo vale per tutte le direzioni principali quando  $n$  è pari — giacciono invece sul primo cono (per  $n$  dispari appartengono all'intersezione del cono con l'iperpiano polare della « normale proiettiva » ora detta). In relazione a queste direzioni principali si può dare in ogni caso alla rappresentazione analitica della correlazione  $\Gamma$ , cioè al tensore  $p_{rs}$ , una forma canonica molto semplice, e ben nota; che potrà risultare molto utile per ulteriori sviluppi.

5. Data la trasformazione dualistica, abbiamo visto — anche analiticamente — come la connessione affine  $A_{rs}^t$  ne venga individuata (e insieme ad essa il tensore affine  $p_{rs}$ ). Viceversa: sia data una connessione affine  $A_{rs}^t$ , che sia *simmetrica* e *proiettivamente piana*. Questo rende possibile il ricavare dalle (3.11), mediante il confronto delle  $A_{rs}^t$  coi parametri  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  che in relazione al supposto riferimento curvilineo — rispetto a cui s'intendono date le  $A_{rs}^t$  — e a una *normalizzazione* delle  $y_\alpha^0$  ha la connessione proiettiva integrabile dell'ambiente  $S_n$ , un sistema di valori per le  $A_r$ . Le (3.10), che si possono scrivere nella forma equivalente

$$(5.1) \quad D_s P_\alpha = P_\alpha \quad , \quad D_s P_\alpha = A_{rs}^t P_\alpha + p_{rs} P_\alpha,$$

(1) Intendiamo riferirci a una ipersuperficie *qualunque*, anche *non algebrica*. Vedi S. P. P., p. 120 e sg.

(2) Questo sotto l'altra condizione, che sia  $|p_{rs}| \neq 0$ : ma ciò esprime semplicemente l'invertibilità della trasformazione dualistica.

(3) Cfr., pel caso delle trasformazioni dualistiche di tipo nullo, cioè per le ipersuperficie anolonomie, con la Nota di C. PAUC, *Interprétation géométrique dans les variétés non holonomes des théories d'intégration des systèmes d'équations de Pfaff*. « Comptes Rendus de l'Acad. », 206, 1938, 885-888; ove l'A. dà anche un'interessante applicazione della « correlazione focale » (sistema nullo) di coefficienti  $p_{rs}$  —  $p_{sr}$ .

(4) Ved. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Pisa, Spoerri, 1907, p. 110 e sg.

risultano senz'altro illimitatamente integrabili, e per integrazione danno, assegnato un sistema di valori iniziali

$$(5.2) \quad {}^{(0)}P_{\lambda}^{\alpha} = P_{\lambda}^{\alpha}(u^1, \dots, u^n),$$

i campi di punti  $P_{\lambda}^{\alpha}$  e  $P_{\lambda}^{\alpha}$ , e quindi, in particolare, anche gli iperpiani  $\overset{\circ}{P}_{\alpha}$  o  $\zeta_{\alpha} y^{\alpha} = 0$ ; cioè, la trasformazione dualistica. La parziale indeterminazione di  $A_r$ , che risulta dato solo *a meno di un gradiente additivo* - ved. l'ultima delle (3.8) - è proprio quella che occorre per dare a  $D_r$ , calcolata coi parametri  $A_r$ , il carattere di *derivata covariante*; la (3.7) non ha per effetto che di far variare le  $P_{\lambda}^{\alpha}$  per lo stesso fattore  $\rho$ . Concludendo: *nota la connessione affine  $A_{rs}^t$ , simmetrica e proiettivamente piana, e assegnata una coppia  $(P, \pi)$  di elementi omologhi, la trasformazione dualistica risulta individuata.* Ne risultano le conseguenze già accennate al n. 2; su questo non occorre insistere.

6. Ma al tempo stesso, da quanto precede, abbiamo anche altri elementi per fondarvi uno studio proiettivo differenziale delle trasformazioni dualistiche (non nulle). Le (5.1), introducendo la derivazione  $\overset{(q)}{D}_r$  che opera nei riguardi di scalari e tensori di grado  $\neq 0$  per le (3.7) come  $D_r$ , coi parametri  $A_r$ ; e in relazione agli indici  $r, s, t, \dots$  opera coi parametri  $\left\{ \begin{smallmatrix} t \\ r \ s \end{smallmatrix} \right\}^{(q)}$ , simboli di Christoffel per  $q_{rs} = p_{(rs)} = \frac{1}{2}(p_{rs} + p_{sr})$  (cioè: s'identifica con la derivazione di Ricci relativa alla forma  $p_{rs} du^r du^s$ ), posto

$$(6.1) \quad c_{rs}^{..t} = A_{rs}^t - \left\{ \begin{smallmatrix} t \\ r \ s \end{smallmatrix} \right\}^{(q)}$$

si possono scrivere:

$$(6.2) \quad D_s P_{\alpha}^{\alpha} = P_{\alpha}^{\alpha}, \quad \overset{(q)}{D}_s P_r^{\alpha} = c_{rs}^{..t} P_t^{\alpha} + p_{rs} P_{\alpha}^{\alpha};$$

insieme a queste si ha

$$(6.3) \quad D_s \overset{\circ}{P}_{\alpha} = -p_{rs} \overset{r}{P}_{\alpha}, \quad \overset{(q)}{D}_s P_{\alpha}^t = -c_{rs}^{..t} \overset{r}{P}_{\alpha} - \delta_s^t \overset{\circ}{P}_{\alpha}$$

e se ne ricava anche:

$$(6.4) \quad p_{rs} = \overset{\circ}{P}_{\alpha} D_s P_{\alpha}^{\alpha} = \overset{\circ}{P}_{\alpha} D_s D_r P_{\alpha}^{\alpha} = -D_s \overset{\circ}{P}_{\alpha} \cdot D_r P_{\alpha}^{\alpha},$$

$$(6.5) \quad c_{rst} (= c_{rs}^{..v} q_{tv}) = \overset{(q)}{D}_s D_t \overset{\circ}{P}_{\alpha} \cdot D_r P_{\alpha}^{\alpha} = -D_t \overset{\circ}{P}_{\alpha} \cdot \overset{(q)}{D}_s D_r P_{\alpha}^{\alpha}.$$

Ora: vi è una manifesta analogia, se pure indubbiamente solo parziale, fra le (6.2), (6.3) e le note *equazioni fondamentali per una ipersuperficie* in  $S_n$  proiettivo: *olonoma* o anche *anolonoma*<sup>(1)</sup>; fra le (6.4), (6.5) e certe espressioni note dei coefficienti delle due forme fondamentali del Fubini per l'ipersuperficie<sup>(2)</sup>. L'analogia è dovuta al fatto, già notato, che *la teoria delle trasformazioni dualistiche contiene quale caso particolare quella delle ipersuperficie anolonome*. Il cono (4.2) appare come estensione — ma con una dimensione di più! — del *cono asintotico*; la correlazione  $K$  estende la relazione di *coniugio*, e allo stesso tempo in qualche modo si sostituisce alla *polarità di Čech* (o in particolare, di Lie), che naturalmente perde significato, come molte altre nozioni relative alle ipersuperficie, pel fatto che gli iperpiani  $\pi$ , che tengono ora il ruolo degli iperpiani *tangenti*, *non passano* per corrispondenti punti  $P$ . Le (6.2) oppure anche le (6.3), che risulteranno integrabili in quanto si esprima che la connessione  $A'_{rs}$  è proiettivamente piana, possono a ogni modo servire, come le analoghe della teoria delle ipersuperficie, *per la determinazione di una trasformazione dualistica di  $S_n$  a meno di omografie di  $S_n$  in sé*, quando siano assegnati i tensori  $c_{rst}$  e  $p_{rs}$  (il che dà subito anche le  $A'_{rs}$  e quindi, nel modo indicato al numero precedente, le  $A_r$ ). Il caso di *simmetria* di  $p_{rs}$  corrisponde, come abbiamo già notato (n. 4), al caso in cui la trasformazione dualistica si riduce *alla polarità rispetto a una ipersuperficie*: dal confronto con la teoria delle superficie anolonome<sup>(3)</sup> questo appare in certo modo come il « caso d'olonomia » delle trasformazioni dualistiche.

(1) Ved. G. FUBINI e E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*. Bologna, 1926, vol. 2, pp. 611-612; e particolarmente il mio già citato lavoro: *Sulle connessioni proiettive*, e per le ipersuperficie anolonome la Nota di A. MAXIA, *Sulle varietà anolonome*, in corso di pubblicazione nei « Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky ».

(2) Ved. G. FUBINI e E. ČECH, loc. cit., p. 610; *Sulle connessioni proiettive*, loc. cit., formule (16.9) e (17.2).

(3) Ved. A. MAXIA, loc. cit.

**Matematica.** — *Sulla deformazione delle reti di Voss di un  $S_4$  euclideo.* Nota di R. CALAPSO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. In un lavoro in corso di stampa <sup>(2)</sup> ho studiato le reti di Voss di un  $S_4$  euclideo: cioè i doppi sistemi coniugati costituiti da geodetiche della superficie cui appartengono; tratto qui la teoria delle deformazioni di tali reti.

Richiamo anzitutto qualche definizione di carattere generale.

Sia  $S$  una superficie, il cui quadrato dell'elemento lineare sia

$$(1) \quad ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

e sia  $S'$  un'altra superficie, deformata di  $S$  cioè con lo stesso  $ds^2$ .

Se sulla superficie  $S$  le linee  $u, v$  formano una rete (sistema coniugato) non sarà in generale lo stesso delle linee  $u, v$  sulla superficie  $S'$ ; ma se in particolare, le linee  $u, v$  formano anche una rete sulla superficie  $S'$ , il passaggio da  $S$  ad  $S'$  si dirà *una deformazione della rete*.

Noi vogliamo studiare le deformazioni delle reti di Voss nel senso ora dichiarato.

2. Consideriamo dapprima una rete di Voss generale (a curvatura  $K$  non nulla) nel caso  $E \neq 0$ ,  $G \neq 0$ , e cerchiamo anzitutto se ammette deformazione in rete di Voss speciale <sup>(3)</sup>.

Se  $S$  è la rete data, essa può determinarsi col sistema di equazioni (loc. cit., § 8, equazione (15))

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \tau \\ \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} = \sin \tau \cos \omega \end{array} \right.$$

(1) Nella seduta del 5 novembre 1938.

(2) R. CALAPSO, *Intorno alle superficie di uno spazio lineare a quattro dimensioni*. «Rendic. del Seminario Matematico della R. Università di Roma», a. XVII.

(3) Per tutte queste denominazioni vedasi il citato lavoro. Basti ricordare che il piano normale in un punto ad una rete è incontrato da quelli infinitamente vicini in punti di una conica (di Kommerel); una rete di Voss per cui questa conica passa per un punto ciclico (e ciò per ogni conica) la chiamo *speciale*; generale nel caso opposto.

ove  $\omega$  è l'angolo delle linee della rete in un punto e  $\tau$  quello degli asintoti della conica di Kommerel relativa al punto stesso; si ha poi

$$(3) \quad K \sqrt{EG} = \cos \tau.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la rete proposta si deformi in rete speciale è <sup>(1)</sup>:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log (K \sqrt{EG}) = FK.$$

Questa, in base alla (3), si traduce nell'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \cos \tau = \cos \omega \cos \tau$$

donde

$$(4) \quad \frac{\partial \tau}{\partial u} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial v} = - \cos \omega \cos \tau.$$

Siamo così ridotti a trovare le soluzioni comuni a questa equazione e alle (2).

3. Formiamo anzitutto le conseguenze differenziali.

Dalla (4) si ha:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = - \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2} = - \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{array} \right.$$

ed esprimendo che

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} \right)$$

perveniamo all'unica equazione

$$(6) \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial v} = - \cos \tau \cos \omega.$$

(1) Loc. cit.



Similmente da questa si ricava

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = -\operatorname{tg} \tau \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = -\operatorname{tg} \tau \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{array} \right.$$

e le condizioni d'integrabilità fra queste e le (2) sono senz'altro verificate.

Dunque il sistema (2), (4), (6) è illimitatamente integrabile, epperò al quesito si risponde affermativamente, cioè:

*Esiste una classe di reti di Voss generali (dipendente da quattro costanti arbitrarie) le quali sono deformabili in reti di Voss speciali<sup>(1)</sup>.*

4. Per la legittimità della conclusione occorre integrare a convenienti condizioni iniziali.

Noi possiamo dare ad arbitrio i valori iniziali di

$$\tau, \quad \omega, \quad \frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

e li daremo in guisa che

$$\operatorname{sen} \tau, \quad \cos \tau, \quad \operatorname{sen} \omega, \quad \cos \omega, \quad \frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

siano inizialmente diversi da zero.

Riferendoci poi alle (16) del § 8 del loc. cit., avremo

$$\sqrt{EG - F^2} = -\frac{\operatorname{sen} \tau}{\operatorname{sen}^3 \omega} \frac{\partial \tau}{\partial u} \left( \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} \right)$$

e dovranno darsi i valori iniziali in guisa che l'espressione

$$\frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\cos \tau}{\operatorname{sen} \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u}$$

sia diversa da zero.

OSSERVAZIONE. - Se si cambia la funzione  $\tau$  in  $\tau'$  con la posizione

$$e^{\tau'} = \cos \tau$$

(1) S'intende che la classe completa è costituita dalle reti ora segnalate e da tutte le altre che se ne deducono mediante una qualunque trasformazione per tangenti parallele.

il sistema (2), (4), (6) prende la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = e^{\tau'} \sin \omega \\ \frac{\partial^2 \tau'}{\partial u \partial v} = e^{\tau'} \cos \omega \\ \frac{\partial \tau'}{\partial u} \frac{\partial \tau'}{\partial v} = (e^{\tau'} - e^{-\tau'}) \cos \omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial v} = -e^{\tau'} \cos \omega \end{array} \right.$$

che è utile confrontare con le (5) del § 9 del loc. cit.

5. Consideriamo in secondo luogo una rete di Voss generale (a curvatura non nulla) nell'ipotesi  $E = 0$ ,  $G \neq 0$ .

Una rete siffatta si può ritenere determinata dal sistema di equazioni (loc. cit., § 8, 30)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = e^{\omega} \cos \tau \\ \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} = e^{\omega} \sin \tau \end{array} \right.$$

e inoltre (loc. cit., § 8, 34)

$$(9) \quad FK = e^{\omega} \cos \tau.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la rete proposta si deformi in rete speciale è [loc. cit., (14) § 9]:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log (FK) = 2 FK.$$

Questa, in base alla (9) si traduce nell'equazione

$$(10) \quad \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} = -e^{\omega} \cos \tau.$$

6. Per l'integrazione del sistema (8) e (10), portiamo nella seconda delle (8) il valore di  $\omega$  dato dalla (10); troviamo così l'equazione in  $\tau$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} = -\frac{\sin \tau}{\cos \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v}.$$

Questa equazione è sufficiente. Infatti, supponiamo che sia soddisfatta, e poniamo:

$$e^{\omega} = - \frac{1}{\cos \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v};$$

saranno allora verificate la (10) e la seconda delle (8).

D'altra parte, osservando la (11) si trova

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\partial \tau}{\partial u} = - \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\partial \tau}{\partial v} = - \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \cos \tau = - \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{array} \right.$$

ed avendosi per la (12)

$$\omega = \log \frac{\partial \tau}{\partial u} + \log \frac{\partial \tau}{\partial v} - \log \cos \tau + \log (-1)$$

segue subito

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = e^{\omega} \cos \tau$$

come si voleva.

Poichè la funzione  $\tau$  non varia per qualunque trasformazione della rete per tangenti parallele, risulta che (a meno di trasformazione per tangenti parallele) nell'ipotesi  $E = 0$ ,  $G \neq 0$ :

*Esiste una classe di reti di Voss generali (dipendente da due funzioni arbitrarie) le quali sono deformabili in reti di Voss speciali.*

7. L'integrale generale della (11) si ottiene facilmente sotto la forma:

$$(14) \quad \cos \tau = \frac{2 UV}{1 + U^2 V^2}, \quad \sin \tau = \frac{1 - U^2 V^2}{1 + U^2 V^2};$$

essendo  $U$  e  $V$  rispettivamente funzioni arbitrarie della sola  $u$  e della sola  $v$ .

Infatti, a titolo di verifica, dalle (14) si ha:

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = - \frac{U'}{U} \cos \tau, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = - \frac{V'}{V} \cos \tau$$

donde segue subito la (11).

OSSERVAZIONE. — Se si cambia  $\tau$  in  $\tau'$  con la posizione

$$e^{\tau'} = \cos \tau$$

il sistema (8) e (10) prende la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = e^{\omega + \tau'} \\ \frac{\partial^2 \tau'}{\partial u \partial v} = e^{\omega + \tau'} \\ \frac{\partial \tau'}{\partial u} \frac{\partial \tau'}{\partial v} = (e^{\tau'} - e^{-\tau'}) e^{\omega} \end{array} \right.$$

che va confrontato con le (16) del § 9 del loc. cit.

8. Esaminiamo infine il caso delle superficie minime, sostegno di reti di Voss generali.

Si è visto (loc. cit.) che l'elemento lineare di una tale superficie, riferita alla sua rete, si ottiene integrando il sistema

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = e^{\omega} \cos \tau \\ \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} = e^{\omega} \sin \tau \end{array} \right.$$

e prendendo

$$(16) \quad ds^2 = 2 e^{-\omega} du dv.$$

La condizione affinchè la rete in discorso sia deformabile in rete speciale [loc. cit., (26), § 9] è che sussista altresì la relazione:

$$(17) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left( e^{-\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}.$$

Facendo uso delle (15) questa si scrive:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \cos \tau = e^{\omega} \cos \tau$$

e poscia

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} = - e^{\omega} \cos \tau.$$

Ricadiamo così nel caso precedente, e si conclude:

*Esiste una classe di superficie minime sostegno di reti di Voss generali (dipendenti da due funzioni arbitrarie) le quali sono deformabili in reti di Voss speciali.*

**Matematica.** — *Su di un problema di geometria differenziale in grande posto dal Minkowski.* Nota di C. MIRANDA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. M. PICONE.

Nella sua classica Memoria: *Volumen und Oberfläche*, pubblicata nel 1903 nei « *Mathematische Annalen* », il Minkowski si pose il problema della determinazione di una superficie  $S$  chiusa e convessa la cui curvatura totale  $K(S)$  sia in ogni punto  $P$  di  $S$  un'assegnata funzione (positiva)  $f(X, Y, Z)$  dei coseni direttori  $X, Y, Z$  della normale in  $P$  ad  $S$ . Il Minkowski, valendosi della sua teoria dei volumi misti, dimostrò l'esistenza e l'unicità, a meno di una traslazione, di una tale superficie, assumendo però per la curvatura totale una definizione, che non è sempre equivalente a quella ordinariamente accettata in geometria differenziale. Scopo della presente Nota è appunto quello di riprendere in considerazione il detto problema dal punto di vista della geometria differenziale classica. Ciò può farsi, per la via più semplice e naturale, valendosi di un metodo, di cui mi sono già servito in un mio lavoro<sup>(2)</sup> sulle equazioni a derivate parziali in forma parametrica, e di alcune considerazioni di topologia funzionale nell'indirizzo di R. Caccioppoli. Riservando ad un più ampio scritto una trattazione completa della questione, mi limiterò qui ad enunciare il risultato a cui sono pervenuto, dando solo qualche cenno del procedimento seguito.

1. Diremo che una superficie chiusa e convessa  $S$  è regolare di ordine  $m + \lambda$  se di ogni suo punto  $P$  si può trovare un intorno  $J$  su  $S$  che sia rappresentabile parametricamente sul cerchio  $C(u^2 + v^2 \leq 1)$  mediante le equazioni

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

risultando  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  funzioni dotate di derivate parziali  $m$ -esime hölderiane con esponente  $\lambda$ <sup>(3)</sup> in  $C$  e tali inoltre che sia in tutto  $C$

$$EG - F^2 > 0.$$

(1) Nella seduta del 5 novembre 1938.

(2) C. MIRANDA, *Sull'esistenza e l'unicità di una superficie di assegnato bordo verificante un'equazione a derivate parziali in forma parametrica.* « *Memorie della R. Accademia d'Italia* », vol. VI, 1935.

(3) Una funzione  $f(u, v)$  definita in  $C$  si dice *hölderiana con esponente  $\lambda$*  se l'insieme numerico descritto da  $|f(u, v) - f(u', v')| \cdot [(u - u')^2 + (v - v')^2]^{-\frac{\lambda}{2}}$  al variare di  $(u, v), (u', v')$  in  $C$  è superiormente limitato. L'estremo superiore di tale insieme si designa col simbolo  $|f|_\lambda$ .



Una tale superficie  $S$  si può ricoprire per intero con due di tali intorno per modo che ogni punto  $P$  di  $S$  risulti interno ad uno almeno di essi. Dopo ciò ogni funzione  $\eta$  definita su  $S$  si potrà rappresentare con una coppia  $(\eta_1, \eta_2)$  di funzioni definite in  $C$ . Diremo che  $\eta$  è dotata su  $S$  di derivate parziali  $p$ -esime hölderiane con esponente  $\lambda$  se entrambe le funzioni  $\eta_1$  e  $\eta_2$  godono in  $C$  di tale proprietà e chiameremo norma di ordine  $p + \lambda$  della funzione  $\eta$  la quantità

$$\|\eta\|_S^{(p+\lambda)} = \max |\eta| + \sum_{k=1,2} \sum_{i=0}^p \left| \frac{\partial^p \eta_k}{\partial u^i \partial v^{p-i}} \right|_\lambda.$$

Dopo ciò, se consideriamo lo spazio  $\Sigma_{m+\lambda}$  di tutte le superficie  $S$  chiuse e convesse, regolari di ordine  $m + \lambda$ , che passano per l'origine  $O$  delle coordinate ed hanno ivi come normale interna l'asse  $z$ , possiamo in tale spazio introdurre la nozione di intorno al modo seguente: per ogni punto  $P$  di  $S$  di coordinate  $(x, y, z)$  conduciamo un asse di coseni direttori  $(\alpha, \beta, \gamma)$  formante con la normale ad  $S$  un angolo minore di  $\pi/2$  e tale inoltre che  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  risultino su  $S$  funzioni dotate di derivate parziali  $m$ -esime hölderiane con esponente  $\lambda$ ; diremo intorno di ampiezza  $\varepsilon$  della superficie  $S$  la totalità delle superficie  $S'$  di equazioni

$$x' = x + \eta\alpha, \quad y' = y + \eta\beta, \quad z' = z + \eta\gamma,$$

designando  $\eta$  una funzione nulla in  $O$  con le sue derivate prime, di norma d'ordine  $m + \lambda$  non superiore ad  $\varepsilon$ . La limitazione imposta alle superficie di  $\Sigma_{m+\lambda}$  di passare per il punto  $O$  con una data normale è giustificata dal fatto che nel nostro problema debbono considerarsi equivalenti due superficie che si possono ottenere l'una dall'altra con una traslazione.

Consideriamo ora sulla sfera  $\Omega$  dello spazio  $XYZ$  di equazione  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , la totalità delle funzioni positive  $f(X, Y, Z)$  dotate di derivate parziali  $n$ -esime hölderiane con esponente  $\lambda$  e soddisfacenti alle condizioni

$$(I) \quad \int_{\Omega} \frac{X}{f} d\omega = \int_{\Omega} \frac{Y}{f} d\omega = \int_{\Omega} \frac{Z}{f} d\omega = 0.$$

Tali funzioni costituiscono uno spazio che indicheremo con  $\Sigma'_{m+\lambda}$ , nel quale si può definire l'intorno di ampiezza  $\varepsilon$  di una funzione  $f$ , come la totalità delle funzioni  $f'$  per le quali si ha  $\|f - f'\|_{\Omega}^{(n+\lambda)} \leq \varepsilon$ .

Poichè una superficie  $S$  di  $\Sigma_{m+\lambda}$  è, per ipotesi, convessa, essa si può mettere in corrispondenza biunivoca con la sua immagine sferica  $\Omega$  e la sua curvatura totale  $K(S)$  si potrà quindi considerare come una funzione definita su  $\Omega$ , sempre positiva e dotata di derivate parziali  $(m - 2)$ -esime hölderiane con esponente  $\lambda$ . Dalle relazioni

$$\int_S X d\sigma = \int_S Y d\sigma = \int_S Z d\sigma = 0,$$

ricordando che  $d\omega = Kd\sigma$ , si deduce che la funzione

$$(2) \quad f(X, Y, Z) = K(S),$$

verifica la (1).

La (2) fa dunque corrispondere ad ogni superficie  $S$  di  $\Sigma_{m+\lambda}$  una funzione  $f$  di  $\Sigma'_{m-2+\lambda}$  e la dimostrazione del nostro teorema di esistenza e di unicità è dunque ricondotta a far vedere che tale corrispondenza è completamente invertibile. Con un procedimento, di cui daremo qualche cenno nel numero seguente, si riesce a far vedere che tale invertibilità sussiste effettivamente se è  $m \geq 5$ . Si perviene così al seguente teorema:

*Comunque si assegni su  $\Omega$  una funzione positiva  $f(X, Y, Z)$ , dotata di derivate parziali terze hölderiane e verificante le (1), esiste una superficie chiusa e convessa  $S$  regolare di ordine  $5 + \lambda$  che ammette  $f$  come curvatura totale; tale superficie è univocamente determinata a meno di una traslazione.*

2. La dimostrazione del teorema enunciato nel numero precedente è basata su di una teoria generale della inversione delle corrispondenze funzionali dovuta a R. Caccioppoli<sup>(1)</sup>. Secondo tale teoria la completa invertibilità della (2) resta assicurata se tale corrispondenza funzionale gode delle seguenti proprietà:

A) Esiste una funzione  $f$  di  $\Sigma'_{m-2+\lambda}$  che è la trasformata attraverso la (2) di un'unica superficie  $S$  di  $\Sigma_{m+\lambda}$ .

B) Se  $S$  ed  $f$  sono due elementi di  $\Sigma_{m+\lambda}$  e  $\Sigma'_{m-2+\lambda}$  che si corrispondono attraverso la (2), la (2) è invertibile fra due intorni convenientemente ristretti di  $S$  ed  $f$ .

C) Ogni successione di elementi di  $\Sigma_{m+\lambda}$  che sia trasformata dalla (2) in una successione convergente di elementi di  $\Sigma'_{m-2+\lambda}$ , è compatta.

La proprietà A) è subito verificata; basta infatti osservare che la sfera è l'unica superficie chiusa e convessa che abbia curvatura totale costante<sup>(2)</sup>.

Per dimostrare la proprietà B) giova osservare che, introducendo i coefficienti  $D, D'$  e  $D''$  della seconda forma quadratica differenziale della superficie  $S$ , la (2) può scriversi

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = f(X, Y, Z),$$

la quale non è altro che un'equazione a derivate parziali del secondo ordine in forma parametrica che, per essere  $f > 0$ , risulta di tipo ellittico<sup>(3)</sup> e per-

(1) R. CACCIOPOLI, *Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni* ecc. «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XXIV, 1936, p. 258 e p. 416.

(2) Cfr., per es., W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, vol. I, § 76.

(3) Ricordiamo che un'equazione a derivate parziali in forma parametrica del secondo ordine  $T(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, D, D', D'') = 0$  si dice di tipo ellittico se è  $4T_D T_{D''} - T_{D'}^2 > 0$ .

tanto la dimostrazione della proprietà B) si può conseguire con un metodo analogo a quello di cui mi sono valso nella mia citata Memoria <sup>(1)</sup>.

Per quanto riguarda infine la proprietà C) mi limiterò a dire che il punto più delicato della sua dimostrazione consiste nella ricerca di un limite superiore delle curvatures principali delle superficie della successione considerata. Poichè le curvatures totali di dette superficie sono già equilimate per ipotesi, occorre limitarne anche le curvatures medie  $H$ . Tale limitazione è fornita dalla seguente diseuguaglianza, che credo nuova,

$$\max H^2 \leq \max \left[ 4K - K^2 \Delta_2 \frac{1}{k} \right],$$

dove il  $\Delta_2 \frac{1}{K}$  deve intendersi calcolato rispetto al  $ds^2$  della sfera  $\Omega$ , secondo Beltrami.

**Matematica.** — *Applicazioni del metodo di Minding per la deformazione delle rigate.* Nota di U. SALINI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

§ 1. — La classe delle superficie rigate applicabili sull'iperboloide di rotazione è nota per le classiche ricerche di Bianchi, Laguerre ecc. <sup>(3)</sup>; ma, come osserva il Tortorici <sup>(4)</sup>, è di notevole interesse il determinare la equazione esplicita di qualche deformata, sviluppando a fondo quanto invece è semplicemente indicato dalla teoria.

Il Tortorici, applicando un suo metodo di deformazione delle rigate, perviene alla equazione in forma esplicita della deformata *a piano direttore* del detto iperboloide di rotazione.

Qui viene ripresa, per suggerimento del Calapso, la questione trattata dal Tortorici e si fa vedere che l'anzidetta deformata *a piano direttore* si può dedurre, quasi immediatamente, applicando il noto metodo di Minding <sup>(5)</sup>, con un procedimento che sembra più semplice di quello adoperato dal Tortorici. Anzi, spingendo avanti la ricerca, si deduce (sempre come applicazione del metodo di Minding) l'equazione in termini finiti delle deformate dell'iperboloide rotondo *a cono direttore di rotazione*, ottenendo così una generalizzazione del risultato del Tortorici.

(1) C. MIRANDA, loc. cit. in (2) a p. 237.

(2) Nella seduta del 5 novembre 1938.

(3) Ved. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, ed. 1902, vol. I, cap. VIII.

(4) TORTORICI, *Sulla deformazione ecc.*... « Bollettino U.M.I. », 1927, p. 72.

(5) Ved. BIANCHI, loc. cit.

§ 2. — Consideriamo l'iperboloide di rotazione, che rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale, è rappresentato dalla equazione

$$(1) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, c > 0).$$

L'equazione del suo cerchio di gola è allora:

$$(2) \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad ; \quad z = 0.$$

Un punto qualunque M di esso ha le coordinate

$$(3) \quad p = a \cos \frac{v}{a} \quad ; \quad q = a \sin \frac{v}{a} \quad ; \quad r = 0$$

essendo  $v$  l'arco di circonferenza compreso fra M ed il punto di incontro del cerchio col semiasse positivo  $x$ .

Si deduce allora che i coseni direttori  $l, m, n$  di una qualunque generatrice dell'iperboloide sono:

$$(4) \quad l = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \frac{v}{a} \quad ; \quad m = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cos \frac{v}{a} \quad ; \quad n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Tenendo conto delle (3) e (4) si ha quindi:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} l^2 + m^2 + n^2 = 1 \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 = \frac{1}{a^2 + c^2} \\ lp' + mq' + nr' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ l'p' + m'q' + n'r' = 0 \\ p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1. \end{array} \right.$$

Inversamente, noti i secondi membri delle (5), potremo determinare le sei funzioni  $p, q, r, l, m, n$ , dopo di che la retta

$$x = p + lp \quad ; \quad y = q + mp \quad ; \quad z = r + np$$

descrive nel modo più generale, una deformata rigata <sup>(1)</sup>.

Perchè la detta deformata sia a *cono direttore rotondo*, si può supporre, senza ledere la generalità, che sia  $n = \text{costante}$ .

Allora, posto  $d^2 = 1 - n^2$ , dalla prima delle (5) si deduce

$$(6) \quad l = d \sin \varphi \quad ; \quad m = d \cos \varphi$$

(1) Ved. BIANCHI, loc. cit.

e quindi dalla seconda delle (5) si ricava:

$$(7) \quad \varphi = \frac{v}{\sqrt{(1-n^2)(a^2+c^2)}} + K$$

essendo K una costante arbitraria.

Se ne deduce ancora che:

$$(8) \quad \begin{cases} l = \sqrt{1-n^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{v}{\sqrt{(1-n^2)(a^2+c^2)}} + K \right] \\ m = \sqrt{1-n^2} \cos \left[ \frac{v}{\sqrt{(1-n^2)(a^2+c^2)}} + K \right] \end{cases}$$

e quindi:

$$(9) \quad \begin{cases} l' = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \cos \left[ \frac{v}{\sqrt{(1-n^2)(a^2+c^2)}} + K \right] \\ m' = -\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \operatorname{sen} \left[ \frac{v}{\sqrt{(1-n^2)(a^2+c^2)}} + K \right] \\ n' = 0. \end{cases}$$

Con facili calcoli si ha allora:

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} = \frac{n}{\sqrt{a^2+c^2}} \operatorname{sen} \left[ \frac{v}{\sqrt{(1-n^2)(a^2+c^2)}} + K \right] \\ \mu = \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} = \frac{n}{\sqrt{a^2+c^2}} \cos \left[ \frac{v}{\sqrt{(1-n^2)(a^2+c^2)}} + K \right] \\ \nu = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = -\sqrt{\frac{1-n^2}{a^2+c^2}}. \end{cases}$$

Ricordiamo che<sup>(1)</sup>:

$$p' = l \cos \theta + \frac{l'N + \varepsilon \lambda \sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta - N^2}}{M^2}$$

$$q' = m \cos \theta + \frac{m'N + \varepsilon \mu \sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta - N^2}}{M^2}$$

$$r' = n \cos \theta + \frac{n'N + \varepsilon \nu \sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta - N^2}}{M^2}$$

dove  $\varepsilon = \pm 1$ .

(1) Ved. BIANCHI, loc. cit.



Osservando che nel caso nostro si ha:

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad ; \quad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{c^2}{a^2 + c^2} \quad ; \quad M^2 = \frac{1}{a^2 + c^2} \quad ; \quad N = 0$$

e tenendo conto delle (8), (9), (10) si deduce:

$$(11) \quad \begin{cases} p = - \left\{ a(1 - n^2) + \varepsilon nc \sqrt{1 - n^2} \right\} \cos \left[ \frac{v}{\sqrt{(1 - n^2)(a^2 + c^2)}} + K \right] + M_1 \\ q = \left\{ a(1 - n^2) + \varepsilon nc \sqrt{1 - n^2} \right\} \operatorname{sen} \left[ \frac{v}{\sqrt{(1 - n^2)(a^2 + c^2)}} + K \right] + M_2 \\ r = \left\{ \frac{na - \varepsilon c \sqrt{1 - n^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right\} v + M_3 \end{cases}$$

essendo  $M_1, M_2, M_3$  costanti arbitrarie.

Ciò posto, cambiamo il parametro  $v$  nel parametro  $u$ , con la posizione:

$$(12) \quad u = \frac{v}{\sqrt{(1 - n^2)(a^2 + c^2)}} + K.$$

Le (11) si trasformano allora nelle altre

$$(13) \quad \begin{cases} p = - C_1 \cos u + \Delta_1 \\ q = C_1 \operatorname{sen} u + \Delta_2 \\ r = C_2 u + \Delta_3 \end{cases}$$

essendo

$$(14) \quad \begin{cases} C_1 = a(1 - n^2) + \varepsilon nc \sqrt{1 - n^2} \\ C_2 = (na - \varepsilon c \sqrt{1 - n^2}) \sqrt{1 - n^2} \end{cases}$$

e  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  delle costanti.

Le equazioni della rigata deformata sono allora

$$x = p + \rho l \quad ; \quad y = q + \rho m \quad ; \quad z = r + \rho n$$

dove per  $p, q, r$  ed  $l, m, n$ , bisogna prendere i valori dati dalle (13) e dalle (8).

Da queste equazioni parametriche si deduce la equazione cercata della rigata deformata

$$\begin{aligned} x \cos \left[ \frac{z \sqrt{1 - n^2} \mp n \sqrt{x^2 + y^2 - c_1^2}}{C_2 \sqrt{1 - n^2}} \right] \\ - y \operatorname{sen} \left[ \frac{z \sqrt{1 - n^2} \mp n \sqrt{x^2 + y^2 - c_1^2}}{C_2 \sqrt{1 - n^2}} \right] = - C_1 \end{aligned}$$

dove  $C_1$  e  $C_2$  hanno i valori (14); avendo supposte nulle le  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , il che si può sempre fare, a meno di una traslazione della superficie. Inoltre, come abbiamo detto, con  $n$  indichiamo una costante arbitraria.

Per  $n = 0$  si ha dalla precedente la deformata, a piano direttore, esplitata dal Tortorici nel citato lavoro. Per l'identificazione con la superficie del Tortorici, occorre ricordare che ancora si dispone di omotetie (con potenza arbitraria) di traslazioni e del nome degli assi.

**Matematica.** — *Estensione d'un teorema trigonometrico del Legendre.* Nota <sup>(1)</sup> di A. TONOLO, presentata dal Socio U. AMALDI.

Un classico teorema del Legendre, riconduce, entro una ben precisata approssimazione, la risoluzione d'un triangolo sferico a quella d'un triangolo rettilineo, i cui lati sono eguali alle lunghezze degli archi, e i cui angoli sono quelli del triangolo sferico, ciascuno diminuito d'un terzo dell'eccesso sferico. Si deve a Gauss una precisazione di questo teorema, che raggiunge un grado più elevato di approssimazione e concerne non soltanto i triangoli sferici, ma più in generale i triangoli geodetici situati sopra una superficie qualunque, cioè anche non a curvatura costante<sup>(2)</sup>. Pure restando nell'approssimazione del Legendre, si può pensare ad un altro tipo di estensione, in cui si considerano triangoli *curvilinei* qualsiasi, anche cioè non geodetici, e precisamente ci si può porre la quistione seguente: dato un piccolo triangolo curvilineo sopra una superficie quale si voglia (nell'approssimazione del Legendre essa può considerarsi, entro il campo del triangolo, a curvatura costante), quali modifiche occorre apportare ai suoi lati e ai suoi angoli, affinchè la sua risoluzione possa ricondursi a quella di un triangolo rettilineo? La risposta a questa domanda può agevolmente essere dedotta dalle formule (5.5), (5.6) stabilite dal Levi-Civita in una sua recente Memoria<sup>(3)</sup>. Ed ecco in che modo.

Mantenendo le notazioni ivi usate, sia <sup>(4)</sup>  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$  un piccolo triangolo costituito da archi di tre linee qualunque tracciate sopra una superficie quale si voglia, e indichiamo con  $l_h$  la lunghezza del lato opposto

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1938.

(2) Cfr., ad esempio, DARBOUX, *Lçons sur la thëorie gënërale des surfaces*. To. 3 (Paris, Gauthier Villars, 1894), livre VI, chap. VIII, p. 169.

(3) T. LEVI-CIVITA, *La trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie*, in corso di stampa nel volume XII dei « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano ». (Milano, Libreria Editrice Politecnica).

(4) L'indice  $h$  percorre i valori 1, 2, 3 con la convenzione di riguardare coincidenti gli indici che differiscono di tre, o d'un multiplo di tre.

al vertice  $P_h$ , con  $a_h$  la lunghezza della corda geodetica  $P_{h+1} P_{h+2}$ , con  $\varphi_h$  l'angolo formato in  $P_h$  dai due archi curvilinei  $P_h P_{h+1}$ ,  $P_h P_{h+2}$ , con  $\alpha_h$  l'angolo formato in  $P_h$  dalle corde geodetiche  $P_h P_{h+1}$ ,  $P_h P_{h+2}$ , infine con  $\gamma_h, \dot{\gamma}_h$  rispettivamente la curvatura geodetica dell'arco  $P_{h+1} P_{h+2}$ , e la sua derivata rispetto a quest'arco (contato nel verso di circolazione  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$  assunto come positivo sul perimetro del dato triangolo curvilineo), tutte e due essendo calcolate nel punto di mezzo del lato  $P_{h+1} P_{h+2}$ . Posto

$$\left\{ \begin{aligned} \chi &= \frac{1}{24} \gamma_h^2 l_h^2, \\ \delta_h &= \frac{1}{2} \{ \gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2} \} + \frac{1}{3} \{ \dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 + \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2 \}, \end{aligned} \right.$$

valgono le formule (1)

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} a_h &= l_h (1 - \chi_h), \\ \alpha_h &= \varphi_h - \delta_h, \end{aligned} \right.$$

che sono esatte fino ai termini del second'ordine inclusi, nel senso ben precisato dal Levi-Civita nel citato lavoro.

Il triangolo di lati  $a_h$  e di angoli  $\alpha_h$  è in ogni caso assimilabile (passando attraverso l'immaginario quando si tratta di superficie a curvatura negativa) ad un ordinario triangolo sferico per cui vale il ricordato teorema del Legendre, a norma del quale, il triangolo rettilineo da prendere in considerazione ha per lati le lunghezze  $a_h$  delle corde geodetiche, e per angoli i valori  $\alpha_h - \frac{\varepsilon}{3}$ ; ove  $\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$ . Le (1) legano questi elementi del triangolo sferico ausiliario agli elementi  $l_h, \varphi_h, \gamma_h, \dot{\gamma}_h$  del triangolo curvilineo assegnato  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ .

Quindi, se denotiamo con  $L_h$  i lati e con  $\Phi_h$  gli angoli del triangolo rettilineo in discorso, possiamo scrivere le formule

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} L_h &= l_h (1 - \chi_h), \\ \Phi_h &= \varphi_h - \delta_h - \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned} \right.$$

dove

$$\epsilon = \Sigma \varphi_h - \pi - \Sigma \gamma_h l_h - \frac{2}{3} \Sigma \dot{\gamma}_h l_h^2,$$

le quali sono esatte a meno di termini del terz'ordine.

Naturalmente, se il triangolo curvilineo  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$  è geodetico, tutte le  $\gamma_h$  sono nulle, e si ricade sul risultato del Legendre.

(1) Sono le formule (5.5), (5.6) della citata Memoria del Levi-Civita.

Dando forma esplicita alle formule (2), dopo ovvie riduzioni, si arriva al seguente enunciato: sopra una superficie qualsiasi si consideri un triangolo  $P_b P_{b+1} P_{b+2}$  formato con gli archi di tre linee qualunque, e siano  $l_b, \varphi_b, \gamma_b, \dot{\gamma}_b$  rispettivamente le lunghezze dei lati, le misure degli angoli, i valori delle curvature geodetiche e delle loro derivate rispetto agli archi (nel verso di circolazione  $P_b P_{b+1} P_{b+2}$ ) calcolati nel punto di mezzo dei lati. Allora, a meno di termini del terzo ordine, la risoluzione del suddetto triangolo curvilineo si può ricondurre a quella d'un triangolo rettilineo i cui lati  $L_b$  sono eguali ai lati  $l_b$  diminuiti, ciascuno, di

$$\frac{1}{24} \gamma_b^2 l_b^3,$$

e i cui angoli  $\Phi_b$  sono eguali agli angoli  $\varphi_b$  diminuiti, ciascuno, di

$$\frac{\Sigma \varphi_b - \pi}{3} + \frac{1}{6} \Sigma \gamma_b l_b + \frac{1}{9} \Sigma \dot{\gamma}_b l_b^2 - \frac{1}{2} \gamma_b l_b - \frac{1}{3} \dot{\gamma}_b l_b^2.$$

**Matematica.** — *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche.*  
Nota I di M. VILLA, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. La proprietà, dimostrata nel n. 2 e del resto evidente, che ogni curva quasi-asintotica  $\gamma_{r,s}$  di una  $V_k$  <sup>(2)</sup> è pure quasi-asintotica  $\gamma_{m,s}$  per  $V_k$  dove  $m > r$  ( $m < s$ ), stabilisce una scala gerarchica fra le curve quasi-asintotiche.

Segue infatti che le più generali  $\gamma_{r,s}$  sono le  $\gamma_{s-1,s}$ , e dopo queste le più generali sono le  $\gamma_{s-2,s}$ , e così di seguito ..., nel senso che le curve  $\gamma_{i,s}$  sono particolari curve  $\gamma_{j,s}$ , se  $j > i$ .

Si pongono così in primo piano le curve  $\gamma_{s-1,s}$  e le  $\gamma_{s-2,s}$ .

Le più semplici  $\gamma_{s-2,s}$  sono le  $\gamma_{1,3}$  ( $s = 3$ ) alle quali sono dedicati vari miei lavori recenti <sup>(3)</sup>.

(1) Nella seduta del 5 novembre 1938.

(2) Le curve quasi-asintotiche, com'è notissimo, sono state introdotte da Bompiani. Ricorderò la definizione: una curva appartenente ad una varietà  $V_k$  dicesi quasi-asintotica  $\gamma_{r,s}$  ( $0 < r < s$ ) per questa varietà quando l'S ( $r$ ) osculatore a  $V_k$  in un punto generico della curva e lo  $S_s$  ivi osculatore a  $\gamma_{r,s}$  hanno uno spazio intersezione di dimensione  $> r$ , oppure quando l'S<sub>s</sub> osculatore alla curva in un punto generico è indeterminato, cioè quando la curva sta in un  $S_{s-1}$ .

(3) VILLA, *Proprietà differenziale dei coni di Veronese*. Questi « Rendiconti », vol. XXV, ser. 6<sup>a</sup>, 1937, p. 691; *Sopra una classe di  $V_k$  situate sui coni di Veronese*. Questi « Rendiconti », vol. XXVII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 217; *Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare*. Questi « Rendiconti », vol. XXVIII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 3; *Ricerche sulle varietà  $V_k$  che posseggono  $\infty^d E_2$*

Nella teoria delle curve quasi-asintotiche è problema fondamentale quello di ricercare le varietà  $V_k$  che posseggono curve  $\gamma_{r,s}$  (di indici assegnati) e che formano totalità pure di tipo assegnato. Ora, in questa ricerca, può riuscire utilissima l'osservazione che viene suggerita dalle considerazioni precedenti, e cioè che le varietà che posseggono  $\gamma_{i,s}$  sono fra quelle che posseggono  $\gamma_{j,s}$  ( $j > i$ ).

Per ricercare le varietà  $V_k$  che posseggono totalità di tipo  $\Omega$  assegnato di  $\gamma_{r,s}$  si possono quindi ricercare le  $V_k$  che posseggono totalità  $\Omega$  di  $\gamma_{r+t,s}$  ( $1 < t \leq s - r$ ) e poi ricercare fra quest'ultime le prime. Così operando al problema dato se ne sostituisce uno più generale ma che analiticamente è più semplice.

Se per un  $E_r$  generico di  $V_k$  non esiste una curva di  $\Omega$  che possegga quell' $E_r$ , vale a dire se un  $E_r$  di  $V_k$  non è in generale  $E_r$  di  $\gamma_{r,s}$  (1), conviene studiare preventivamente il problema per le  $\gamma_{s-1,s}$  ( $t = s - r - 1$ ). Quest'ultimo problema si pone, com'è suggerito dalla trattazione analitica, nel modo più generale seguente:

Ricercare le  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_r$  di  $\gamma_{s-1,s}$ , cioè che ne posseggono  $\infty^{\delta-k}$  per ogni punto ( $k \leq \delta \leq 2k - 1$ ).

Facciamo, se  $s > 2$ , l'ipotesi opposta, che interessa particolarmente il presente lavoro: per un  $E_r$  generico di  $V_k$  esista una curva di  $\Omega$  che possiede quell' $E_r$ , di guisa che ogni  $E_r$  di  $V_k$  è  $E_r$  di  $\gamma_{r,s}$ .

In quest'ipotesi conviene, in generale, prendere  $t = s - r - 2$ , cioè studiare preventivamente il problema per le  $\gamma_{s-2,s}$ . Infatti le  $V_k$  per cui ogni  $E_r$  è  $E_r$  di  $\gamma_{s-1,s}$  sono (n. 3) tutte e sole quelle per cui l'S ( $s - 1$ ) osculatore in un punto generico è lo spazio ambiente: sono quindi varietà molto generali e l'appartenenza delle  $V_k$  cercate a tale tipo ci dice troppo poco di esse (se  $r < s - 1$ ), per quanto ci porti a conclusioni importanti (n. 4).

Nè si possono avere, nell'ipotesi fatta, risultati diversi dal precedente per le  $V_k$  dotate di totalità  $\Omega$  di  $\gamma_{s-1,s}$ .

Di qui appunto l'opportunità di rivolgersi, se  $r < s - 1$ , alle  $\gamma_{s-2,s}$  invece che alle  $\gamma_{s-1,s}$ .

Com'è suggerito dalla trattazione analitica, il problema per le  $\gamma_{s-2,s}$  si pone nel modo più generale seguente:

di  $\gamma_{1,3}$ , con particolare riguardo al caso  $k=4, \delta=8$ . «Memorie della R. Accademia dei Lincei» (in corso di stampa). Alle curve  $\gamma_{1,3}$  è pure dedicata una mia Nota, di prossima pubblicazione, dal titolo: *Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$ .*

(1) Più in generale, diciamo  $E_n$  di  $\gamma_{r,s}$  ( $n < s$ ) un elemento  $E_n$  di  $n$ -esimo ordine (cioè punto, tangente, ...,  $S_n$  osculatore) di curva di  $V_k$  che ha, nel punto, carattere di curva quasi-asintotica  $\gamma_{r,s}$ , ossia un  $E_n$  contenuto in  $E_s$  il cui  $S_s$  osculatore taglia l'S ( $r$ ) osculatore nel punto a  $V_k$  in uno spazio di dimensione  $> r$  oppure è indeterminato.



A) *Ricercare le  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{s-2,s}$ , cioè che ne posseggono  $\infty^{\delta-2k+1}$  per ogni  $E_1$  ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-2$ ).*

Se, supposto  $s > 3$ , per un  $E_2$  generico di  $V_k$  esiste una curva di  $\Omega$  che possiede quell' $E_2$ , di guisa che ogni  $E_2$  di  $V_k$  è  $E_2$  di  $\gamma_{r,s}$ , per ragioni analoghe alle precedenti, per  $r < s-2$ , converrà studiare preventivamente il problema per le  $\gamma_{s-3,s}$ , e anzi il problema più generale seguente:

Ricercare le  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_3$  di  $\gamma_{s-3,s}$ , cioè che ne posseggono  $\infty^{\delta-3k+2}$  per ogni  $E_2$  ( $3k-2 \leq \delta \leq 4k-3$ ).

Se poi ogni  $E_3$  di  $V_k$  fosse  $E_3$  di  $\gamma_{r,s}$  ( $s > 4$ ) si procederà analogamente. E così di seguito.

Nell'ipotesi, che particolarmente interessa il presente lavoro, in cui per un  $E_1$  generico di  $V_k$  esiste una curva di  $\Omega$  che possiede quell' $E_1$  (mentre altrettanto non avviene per un  $E_2$  generico), *il metodo che abbiamo esposto consiste in: 1°) risolvere il problema A per un opportuno valore di  $\delta$ ; 2°) ricercare fra le  $V_k$  trovate quelle che posseggono la totalità  $\Omega$  di  $\gamma_{r,s}$ .*

Un esempio brillante di applicazione di questo metodo si trova nel n. 5 dove si dimostra che un classico teorema di Bompiani<sup>(1)</sup> ha un campo di validità più vasto di quello che si era finora ritenuto. I nn. 6, 7, 8, 9 sono dedicati allo studio del problema A.

Per  $s = 3$ , cioè per gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , il problema A è già stato posto e risolto per  $\delta > 2k-1$ ,  $k < 5$  e in vari altri casi (di notevole generalità) nei miei lavori già citati.

Ho anzi indicato, in uno di questi lavori, un *metodo* per la risoluzione generale del problema A per  $s = 3$  ( $\delta > 2k-1$ ), che ho sperimentato con successo nei miei lavori suddetti, e che viene esposto anche nel n. 7.

Esso si fonda principalmente sulla considerazione della varietà degli  $S_k$  tangenti a  $V_k$ .

Queste mie ricerche sul problema A per  $s = 3$  servono di guida nello studio del problema A per  $s > 3$ . Nel n. 8 si è considerata in vece della varietà degli  $S_k$  tangenti a  $V_k$ , la varietà  $W(m)$  luogo degli  $S(m)$  osculatori a  $V_k$  e si sono determinate le condizioni necessarie e sufficienti perchè la dimensione di tale varietà si abbassi di 1 unità, rispetto a quella che ha in generale. Mi riservo di vedere in un prossimo lavoro fino a che punto questo problema dell'abbassamento della dimensione di  $W(s-2)$ , che diremo problema B, s'innesti nel problema A, dal che potrebbe uscire un metodo per lo studio del problema A per  $s > 3$  analogo a quello suddetto per  $s = 3$ .

Tuttavia nel n. 8 ho già osservato che *se sono verificate le condizioni per l'abbassarsi della dimensione di  $W(s-2)$  di  $\delta - 2k + 1$  unità (probl. B) sono verificate anche parte delle condizioni a cui  $V_k$  deve soddisfare per posse-*

(1) BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*. « Memorie dell'Accademia dei Lincei », 1922, vol. 13, ser. 5<sup>a</sup>, p. 474.

dere  $\infty^{\delta} E_2$  di  $\gamma_{s-2, s}$  (probl. A), da cui segue che si possono utilizzare per  $s > 3$  i risultati relativi al problema B per il problema A, come già si fece per  $s = 3$  nei miei lavori citati. Ciò viene appunto fatto in un caso particolare nel n. 9, utilizzando un risultato di Bompiani, che è l'unico che si conosce finora sul problema B per  $s > 3$ .

La varietà  $W(2)$  luogo degli  $S(2)$  osculatori a una  $V_k$ , che fu considerata per la prima volta dal Bompiani<sup>(1)</sup>, ha in generale dimensione  $D = \frac{k(k+5)}{2} - v$ , se  $V_k$  soddisfa a  $v$  equazioni di Laplace (lin. indep.) ( $v \geq 0$ ).

Orbene, il Bompiani ha trovate le varietà  $V_k$  per le quali  $W(2)$  ha dimensione  $D - 1$  nell'ipotesi che  $V_k$  rappresenti il minimo numero possibile di equazioni del 3° ordine e nell'ipotesi che alcune di queste siano ottenute per derivazione da  $v$  equazioni del 2° ordine componenti un sistema parabolico<sup>(2)</sup>.  $V_k$  che posseggono  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$  (caso di  $s = 4$ ,  $\delta = 2k$  del problema A) si hanno appunto imponendo (n. 9) alle  $V_k$  trovate da Bompiani le ulteriori condizioni per l'esistenza di  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$ .

Si perviene così (n. 9) a particolari  $V_k$  situate sopra il cono dell' $S_{\frac{k(k+1)(k+2)}{6} + k - v}$  proiettante da un  $S_{k-v}$  la  $V_{k-1}^{3k-1}$  rappresentante le forme cubiche  $V_{k-2}^3$  di  $S_{k-1}$ .

E questo risultato ha interesse sia perchè fornisce un esempio di applicazione del procedimento suindicato, sia perchè le varietà trovate porgono un primo esempio di  $V_k$  soddisfacenti al problema A per  $s > 3$  e  $\delta > 2k - 1$ , ma anche per un altro motivo:

Nelle ricerche sul problema A per le  $\gamma_{1,3}$  ( $s = 3$ ), come appare dai miei lavori citati, occupano un posto importante i coni proiettanti la varietà che rappresenta la totalità delle quadriche di uno spazio lineare (in particolare quindi i coni di Veronese) e le varietà situate su di essi<sup>(3)</sup>. Ora, passando dalle  $\gamma_{1,3}$  ( $s = 3$ ) alle  $\gamma_{2,4}$  ( $s = 4$ ), è notevole il fatto che, utilizzando il precedente risultato di Bompiani, si ricada proprio in una varietà analoga, in una varietà cioè situata sopra il cono proiettante da un  $S_{k-v}$  la  $V_{k-1}^{3k-1}$  rappresentante le forme cubiche  $V_{k-2}^3$  di  $S_{k-1}$ .

(1) BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*. «Atti dell'Accademia di Torino», vol. 49, 1913, p. 127. Questo lavoro si richiamerà con N.

(2) BOMPIANI, N, pp. 113-128.

(3) In particolare, nella seconda delle mie Note citate, sono considerate delle varietà situate sui coni di Veronese che ho indicate con  $\Phi_k$ . E la  $\Phi_4$  e la  $V_4^6$  di Segre sono, fra i quattro tipi possibili di  $V_4$  con  $\infty^8 E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , i due più interessanti. Ora, è curioso il fatto che particolari  $\Phi_4$  si presentino anche in importanti ricerche di altra natura. Si veda infatti: G. SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*. «Annali di Matematica», vol. 15, ser. 3<sup>a</sup>, 1908, p. 218, caso  $c^V$ ; dove, per di più, la particolare  $\Phi_4$  si presenta ancora accoppiata alla  $V_4^6$  di Segre.

Questi coni e i coni precedenti rientrano, rispettivamente per  $n = 3$  e  $n = 2$ , nel tipo generale dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle forme di ordine  $n$  di uno spazio lineare, alle curve quasi-asintotiche dei quali e a quelle delle varietà situate su di essi è dedicato un mio lavoro di prossima pubblicazione.

2. Dimostriamo il seguente teorema annunciato nel n. 1:

*Se una curva è  $\gamma_{r,s}$  per  $V_k$  è anche  $\gamma_{m,s}$  per  $V_k$  dove  $m > r$  ( $m < s$ ).*

Infatti se la curva  $\gamma_{r,s}$  sta in un  $S_{s-1}$  essa è anche  $\gamma_{m,s}$ .

Se, al contrario,  $\gamma_{r,s}$  non sta in un  $S_{s-1}$ , allora, per definizione, l' $S(r)$  osculatore a  $V_k$  in un punto generico P di  $\gamma_{r,s}$  e l' $S_s$  osculatore in P a  $\gamma_{r,s}$  hanno lo spazio intersezione  $\Sigma$  di dimensione  $> r$ .

Nell' $S_m$  osculatore a  $\gamma_{r,s}$  in P consideriamo un  $S_{m-r-1}$  sghembo con l' $S_r$  osculatore in P a  $\gamma_{r,s}$  (il quale è contenuto in  $S_m$  poichè  $m > r$ ).

Dico che questo  $S_{m-r-1}$  è sghembo con  $\Sigma$ . Infatti se avessero in comune un punto O, l' $S_m$  e l' $S(r)$  avrebbero in comune O perchè  $S_m$  contiene  $S_{m-r-1}$  e l' $S(r)$  contiene  $\Sigma$ . Ma  $S_m$  e  $S(r)$  hanno in comune l' $S_r$ ; e O non appartiene ad  $S_r$  perchè  $S_{m-r-1}$  è sghembo con  $S_r$ . Dunque:  $S_m$  e  $S(r)$  avrebbero in comune almeno un  $S_{r+1}$  (quello individuato da  $S_r$  o da O) e perciò la curva sarebbe una  $\gamma_{r,m}$  mentre è una  $\gamma_{r,s}$  con  $s > m$ .

L' $S(m)$  osculatore in P a  $V_k$ , contenendo l' $S(r)$  ( $r < m$ ), contiene  $\Sigma$  e contiene pure  $S_{r-m-1}$  che sta in  $S_m$ . E l' $S_s$  contiene  $\Sigma$  e, contenendo  $S_m$  ( $m < s$ ), contiene  $S_{r-m-1}$ .

Concludendo:  $S(m)$  e  $S_s$  contengono lo spazio individuato da  $\Sigma$  e da  $S_{r-m-1}$ , spazio che — essendo  $\Sigma$  e  $S_{r-m-1}$  sghembi e avendo  $\Sigma$  dimensione  $> r$  — ha dimensione  $> m$ . Ciò significa appunto che la curva è  $\gamma_{m,s}$ .

È poi evidente che la proprietà precedente, in generale, non s'inverte.

Si ha cioè: Una  $\gamma_{r,s}$ , in generale, non è  $\gamma_{t,s}$  dove  $t < r$ .

Però se la curva sta in  $S_{s-1}$  essa è  $\gamma_{m,s}$  con  $m$  qualunque ( $1 \leq m < s$ ).

Dalla dimostrazione del teorema precedente, segue che: Un  $E_n$  di  $\gamma_{r,s}$  di  $V_k$  è anche  $E_n$  di  $\gamma_{m,s}$  di  $V_k$  dove  $m > r$  ( $m, n < s$ ).

3. Per il teorema sopra dimostrato, le  $\gamma_{s-1,s}$  sono le più generali  $\gamma_{r,s}$ . Si ha:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè ogni  $E_1$  di una  $V_k$  sia  $E_1$  di  $\gamma_{s-1,s}$  è che  $V_k$  appartenga all' $S(s-1)$  osculatore in un suo punto generico.*

Infatti l' $S(s-1)$  osculatore in un punto  $x(\tau_1, \dots, \tau_k)$  a  $V_k$  è lo spazio di  $x$  e di tutti i punti derivati d'ordine  $\leq s-1$ . L' $S_s$  osculatore ad una curva di  $V_k$  in  $x$  è individuato dai punti

$$\begin{aligned} x, \quad dx = \Sigma x_i d\tau_i, \quad d^2 x = \Sigma x_{i_1 i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} + \\ + \Sigma x_i d^2 \tau_i, \dots, d^{s-1} x = \Sigma x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} + \dots, \\ d^s x = \Sigma x_{i_1 i_2 \dots i_s} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_s} + \dots, \end{aligned}$$

avendo posto  $x_i = \frac{\partial x}{\partial \tau_i}$ ,  $x_{i_1 i_2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_{i_1} \partial \tau_{i_2}}$  e analogamente; gli indici  $i, i_1, i_2, \dots, i_s$  assumono in tutti i modi possibili i valori  $1, 2, \dots, k$ .

Affinchè l'S<sub>s</sub> precedente appartenga all'S( $s-1$ ), oppure sia indeterminato, deve essere nulla la matrice (cioè nulli tutti i minori d'ordine massimo estratti da essa)

$$(1) \quad \begin{vmatrix} S(s-1) \\ \Sigma x_{i_1 i_2 \dots i_s} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_s} \end{vmatrix}$$

dove  $S(s-1)$  sta ad indicare le orizzontali costruite con le coordinate dei punti che lo determinano.

Se ogni  $E_r$  di  $V_k$  è  $E_r$  di  $\gamma_{s-1, s}$ , la (1) deve essere soddisfatta identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ . Segue che tutti i punti derivati  $s$ -esimi stanno in  $S(s-1)$  il quale è quindi lo spazio ambiente di  $V_k$ . La condizione è dunque necessaria. Essa è pure sufficiente perchè se  $S(s-1)$  è lo spazio ambiente di  $V_k$ , i punti derivati  $s$ -esimi stanno pure in questo  $S(s-1)$  e perciò la (1) è soddisfatta qualunque siano i  $d\tau_i$ <sup>(1)</sup>.

4. Dal teorema precedente segue:

*Se ogni  $E_r$  di una  $V_k$  è  $E_r$  di  $\gamma_{r, s}$ ,  $V_k$  appartiene all'S( $s-1$ ) osculatore in un suo punto generico.*

Infatti, siccome ogni  $E_r$  di  $\gamma_{r, s}$ , dove  $r$  è qualunque ( $r < s$ ), è  $E_r$  di  $\gamma_{s-1, s}$  (n. 2), ogni  $V_k$  per cui ogni  $E_r$  è  $E_r$  di  $\gamma_{r, s}$  dovrà trovarsi fra quelle per cui ogni  $E_r$  è  $E_r$  di  $\gamma_{s-1, s}$  e quindi, per il teorema precedente, il suo spazio ambiente sarà l'S( $s-1$ ) osculatore in un suo punto generico.

Questo teorema, al quale siamo pervenuti applicando le direttive del n. 1, appare interessante perchè assegna una proprietà generale per tutte le  $V_k$  per le quali ogni  $E_r$  è  $E_r$  di  $\gamma_{r, s}$ , in particolare quindi per tutte le  $V_k$  che posseggono una totalità di curve quasi-asintotiche  $\gamma_{r, s}$  tale che per ogni punto e tangente ne passi almeno una.

Da tale proprietà segue subito, ad esempio, qual'è la massima dimensione dello spazio ambiente di una  $V_k$  siffatta.

Si ha invero:

*Se ogni  $E_r$  di una  $V_k$  è  $E_r$  di  $\gamma_{r, s}$ ,  $V_k$  appartiene al più ad un  $S_{\frac{s(s+1) \dots (s+k-1)}{k!} - 1}$ .*

(1) Fra le  $\gamma_{s-1, s}$  le più semplici sono le  $\gamma_{1, 2}$  ( $s=2$ ), ossia le *asintotiche*, le curve cioè nei punti delle quali il piano osculatore appartiene all'S<sub>k</sub> ivi tangente a  $V_k$ . Dal teorema del testo segue:

<sup>1</sup> Per una  $V_k$  (che non sia l'S<sub>k</sub>) non può avvenire che ogni  $E_r$  sia  $E_r$  di  $\gamma_{1, 2}$  ( $E_r$  di *asintotica*).

Infatti l'S( $s - 1$ ) osculatore ad una  $V_k$  ha al più dimensione

$$\frac{s(s+1) \cdots (s+k-1)}{k!} - 1.$$

E conviene osservare che tale massimo può essere effettivamente raggiunto, qualunque sia  $r$  ( $r < s$ ), com'è provato dalla  $V_k^{(s-1)^k}$  che rappresenta le forme  $V_{k-1}^{s-1}$  di  $S_k$ .

Anzi, come si vedrà nel n. 5, questa varietà, per  $r < s - 1$ , è l'unica per cui ciò avviene.

OSSERVAZIONE. - Se ogni  $E_r$  di una  $V_k$  e  $E_r$  di  $\gamma_{r,s}$ , per il teorema suddetto, è la stessa cosa affermare che l'S( $s - 1$ ) osculatore a  $V_k$ , in un punto generico, è regolare<sup>(1)</sup> oppure che lo spazio ambiente di  $V_k$  ha dimensione massima.

5. Per il teorema del n. 2, le più generali fra le  $\gamma_{r,s}$  sono, dopo le  $\gamma_{s-1,s}$ , le  $\gamma_{s-2,s}$ .

La ricerca delle varietà  $V_k$  che posseggono  $\infty^{2k-2}$  curve  $\gamma_{s-2,s}^{(2)}$ , nell'ipotesi che  $V_k$  non soddisfi ad equazioni d'ordine  $s - 1$  (abbia cioè S( $s - 1$ ) osculatore regolare), è esaurita dal seguente teorema di Bompiani, che costituisce indubbiamente uno dei risultati più importanti ed eleganti della teoria delle curve quasi-asintotiche:

Se una  $V_k$  ha lo S( $s - 1$ ) osculatore regolare in ogni suo punto e contiene  $\infty^{2k-2}$   $\gamma_{s-2,s}$ , essa è la  $V_k^{(s-1)^k}$  di  $S_{\frac{s(s+1) \cdots (s+k-1)}{k!} - 1}$  rappresentante le  $V_{k-1}^{s-1}$  di  $S_k$ ; quelle quasi-asintotiche sono le  $C^{s-1}$  razionali normali di  $S_{s-1}$  immagini delle rette di  $S_k$ <sup>(3)</sup>.

Orbene, dal teorema del n. 2, segue che questo teorema di Bompiani vale non solo per le  $\gamma_{s-2,s}$  ma per tutte le  $\gamma_{r,s}$  con  $r$  qualunque ( $r < s - 1$ ).

Sussiste cioè il teorema:

Se una  $V_k$  ha lo S( $s - 1$ ) osculatore regolare in ogni suo punto e contiene  $\infty^{2k-2}$  quasi-asintotiche  $\gamma_{r,s}$  ( $r < s - 1$ ) essa è la  $V_k^{(s-1)^k}$  di

(1) L'S( $m$ ) osculatore generico a  $V_k$  dicesi, con Bompiani, regolare quando ha dimensione  $\frac{(m+1) \cdots (m+k)}{k!} - 1$ , cioè quando  $V_k$  non soddisfa ad equazioni d'ordine  $\leq m$ .

(2) È questo il caso di  $\delta$  minimo,  $\delta = 2k - 1$ , nel problema A perchè se una  $V_k$  possiede  $\infty^{2k-1}$   $E_2$  di  $\gamma_{s-2,s}$  questi sono organizzabili in  $\infty^{2k-2}$  curve  $\gamma_{s-2,s}$ .

(3) BOMPIANI, Memoria lineea citata, p. 474. A questo teorema di Bompiani si collegano i miei risultati, contenuti nelle Note citate e in Note di prossima pubblicazione, sui coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle forme di ordine  $n$  di uno spazio lineare e sulle varietà situate su di essi.



$S_{\frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!}-1}$  rappresentante le forme  $V_k^{s-1}$  di  $S_k$ ; quelle quasi-asintotiche sono le  $C^{s-1}$  razionali normali di  $S_{s-1}$  immagini delle rette di  $S_k$ .

Che le  $C^{s-1}$  immagini delle rette di  $S_k$  siano  $\gamma_{r,s}$ , con  $r$  qualunque, per la  $V_k^{(s-1)^k}$  è evidente perchè esse appartengono all' $S_{s-1}$ .

D'altra parte: una  $V_k$  che possiede  $\infty^{2k-2} \gamma_{r,s}$  ( $r < s-2$ ) e che ha lo  $S(s-1)$  osculatore regolare in ogni suo punto — siccome per il teorema del n. 2 le  $\gamma_{r,s}$  di una  $V_k$  ( $r < s-2$ ) sono pure  $\gamma_{s-2,s}$  — dovrà trovarsi fra le  $V_k$  che posseggono  $\infty^{2k-2} \gamma_{s-2,s}$  e che hanno lo  $S(s-1)$  osculatore regolare in ogni punto e, per il teorema precedente, non potrà quindi differire dalla  $V_k^{(s-1)^k}$  di  $S_{\frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!}-1}$  rappresentante le forme  $V_k^{s-1}$  di  $S_k$ .

Ma la validità del teorema di Bompiani è ancora più vasta. Vale, in definitiva, il teorema seguente (teorema di Bompiani esteso):

Se ogni  $E_1$  di una  $V_k$  è  $E_1$  di  $\gamma_{r,s}$  ( $r < s-1$ ) e se lo spazio a cui  $V_k$  appartiene ha la massima dimensione compatibile con tale ipotesi, essa è necessariamente la  $V_k^{(s-1)^k}$  di  $S_{\frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!}-1}$  rappresentante le forme  $V_k^{s-1}$  di  $S_k$ : le  $\gamma_{r,s}$  sono le  $C^{s-1}$  razionali normali di  $S_{s-1}$  immagini delle rette di  $S_k$ .

Intanto, per il teorema del n. 4, siccome ogni  $E_1$  di  $V_k$  è  $E_1$  di  $\gamma_{r,s}$ ,  $V_k$  appartiene all' $S(s-1)$  osculatore in un suo punto generico. E poichè, per ipotesi, lo spazio a cui  $V_k$  appartiene ha dimensione massima, l' $S(s-1)$  deve essere regolare.

Un  $E_1$  di  $\gamma_{r,s}$ , se  $r < s-2$ , è sempre  $E_1$  di  $\gamma_{s-2,s}$  (n. 2); basterà quindi dimostrare l'asserto per  $r = s-2$ .

Ogni  $E_1$  di  $V_k$  è  $E_1$  di  $\gamma_{s-2,s}$ ; per ogni  $E_1$  di  $V_k$  esiste quindi un  $E_2$  di  $\gamma_{s-2,s}$ : non ve ne possono essere infiniti perchè altrimenti  $V_k$  soddisferebbe ad equazioni d'ordine  $\leq s-1$  (si vedano le condizioni del n. 6) e  $S(s-1)$  non sarebbe regolare.

$V_k$  ha dunque  $S(s-1)$  osculatore regolare e possiede  $\infty^{2k-1} E_2$  di  $\gamma_{s-2,s}$  e perciò  $\infty^{2k-2}$  curve  $\gamma_{s-2,s}$  (cfr. n. 6). Per il teorema di Bompiani essa è quindi la  $V_k^{(s-1)^k}$  che rappresenta le forme  $V_k^{s-1}$  di  $S_k$ .

Il problema di trovare le  $V_k$  per le quali ogni  $E_1$  è  $E_1$  di  $\gamma_{r,s}$ , nell'ipotesi che  $V_k$  appartenga allo spazio di dimensione massima, è dunque risolto.

La più vasta validità qui osservata per il teorema di Bompiani ha interesse anche per le applicazioni, come apparirà altrove.

**Matematica.** — *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche.* Nota II di M. VILLA, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulle estremanti di un integrale in forma ordinaria, dipendente da funzioni a derivate prime equiuniformemente lipschitziane.* Nota di T. VIOLA, presentata dal Corrisp. M. PICONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Alla ricerca dei fondamenti sperimentali della teoria dell'equilibrio elasto plastico.* Nota di G. COLONNETTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio C. GUIDI.

La teoria dell'equilibrio elasto plastico e delle sue applicazioni al calcolo dei sistemi iperstatici ha fatto, in questi ultimi tempi, notevoli progressi.

Dalla fase delle enunciazioni generiche e delle trattazioni dirette di casi particolari, essa è infatti passata alla fase delle affermazioni di principio fondate su ipotesi di carattere assolutamente generale.

Come accade sempre, in tutte le teorie, queste ipotesi (pel fatto stesso della loro generalità) non si prestano ad un controllo diretto ed immediato. Il controllo diviene possibile solo a proposito delle conseguenze che da esse discendono, e che si riferiscono a fatti particolari facilmente constatabili per via sperimentale.

Allo stato attuale delle cose, è pertanto del maggiore interesse stabilire quali siano questi fatti che, già accertati o accertabili sperimentalmente, possono offrire la necessaria conferma delle ipotesi e la conseguente giustificazione della nuova teoria.

È noto che l'ipotesi fondamentale della indipendenza del fenomeno elastico dal fenomeno plastico — vale a dire della loro attitudine a coesistere senza influenzarsi reciprocamente quando il limite di elasticità del materiale è stato superato — conduce, nel caso tipico delle travi inflesse, ad una caratteristica distribuzione di tensioni interne <sup>(2)</sup> che tutti gli autori che si occupano dell'argomento sono propensi ad accettare come rispondente con buona approssimazione alla realtà delle cose.

Ma, com'è stato giustamente osservato <sup>(3)</sup>, questa distribuzione di tensioni non è suscettibile di una verifica sperimentale diretta per il fatto che noi non possediamo strumenti capaci di misurare direttamente le tensioni.

(1) Nella seduta del 5 novembre 1938.

(2) F. BLEICH, *La ductilité de l'acier; son application au dimensionnement des systèmes hyperstatiques*. « L'Ossature Métallique », 1934; G. COLONNETTI, *Saggio di una teoria generale dell'equilibrio elasto plastico*. « Pontificia Academia Scientiarum », 1938.

(3) A. S. JOUKOFF, *Les bases expérimentales des calculs plastiques des constructions hyperstatiques*. « L'Ossature Métallique », 1938.

Queste si sogliono dedurre dalle misure delle deformazioni, grazie a quella legge di proporzionalità (legge di Hooke) su cui notoriamente riposa tutta la teoria dell'elasticità. Ma il procedimento cessa evidentemente di essere applicabile quando, raggiunto il limite di elasticità, le deformazioni cessano di essere proporzionali alle tensioni.

Nè si può, generalmente parlando, fare assegnamento sulla postulata indipendenza del fenomeno plastico dal fenomeno elastico per dedurre la grandezza delle tensioni da quella delle deformazioni *elastiche* a cui esse debbono continuare ad essere proporzionali; perchè bisogna tener presente che, quando il sistema è iperstatico — cioè ammette infinite distribuzioni di tensioni interne in equilibrio colla sollecitazione esterna — la deformazione plastica di un elemento può determinare uno stato di deformazione elastica (ed un corrispondente stato di tensione) negli elementi attigui, con la conseguente formazione di uno stato di coazione che si sovrappone al fenomeno plastico da cui ha avuto origine e che permane con esso anche quando la sollecitazione esterna sia venuta a cessare <sup>(1)</sup>.

Ne segue che, sempre generalmente parlando, non sussiste la possibilità di distinguere sperimentalmente in una deformazione la frazione elastica da quella plastica assumendo come valore della prima la differenza tra la deformazione misurata sotto carico e quella misurata dopo la soppressione del carico.

Però alla detta distribuzione di tensioni va, nel quadro della teoria dell'equilibrio elasto plastico, indissolubilmente connesso il fatto che la curvatura si possa scrivere sotto la forma

$$(1) \quad \mu = \frac{\mathfrak{M}}{EJ} + \bar{\mu}$$

dove il primo termine

$$\frac{\mathfrak{M}}{EJ}$$

che misura la *curvatura elastica*, è evidentemente destinato ad annullarsi all'annullarsi del momento flettente  $\mathfrak{M}$ , indipendentemente dal fatto che la grandezza di questo momento sia stata tale da determinare il superamento del limite di elasticità del materiale; mentre il secondo termine

$$\bar{\mu} = \frac{\int_A \bar{\epsilon}_x y dA}{J}$$

(1) G. COLONNETTI, *La statica dei corpi elasto plastici*. « Pontificia Academia Scientiarum », 1938.

è una funzione nota delle deformazioni plastiche  $\bar{\epsilon}_x^{(1)}$ , e quindi anche del momento  $\mathfrak{M}$  che le ha determinate, alla quale funzione noi diamo il nome di *curvatura plastica* perchè permane anche quando  $\mathfrak{M}$  si annulla.

Pertanto la constatazione della coincidenza tra i valori della curvatura calcolati colla (1) ed i corrispondenti valori rilevati sperimentalmente, per differenti tipi di materiale e per differenti forme di sezione della trave, rappresenta, se io non mi inganno, il primo e più immediato campo di ricerca dei fondamenti sperimentali della nuova teoria.

Ad esso appartengono i miei tentativi di interpretazione dei risultati delle esperienze compiute, or son molti anni, dal Bach su travi in cemento armato <sup>(2)</sup>.

Ad esso appartengono le ricerche recentemente eseguite da Levi e Giacchero sperimentando su travi in ferro sollecitate a flessione semplice <sup>(3)</sup>.

Un altro campo, per sua natura più ampio e ricco di possibilità nuove, si apre alle nostre ricerche se, pur restando nell'ambito delle travi inflesse, noi passiamo a considerare un ordine più complesso di fenomeni.

Basta immaginare che la trave sia staticamente indeterminata per sovrabbondanza di vincoli.

Io ho già avuto occasione di avvertire <sup>(4)</sup> come, in questo caso, le deformazioni plastiche del materiale non influiscano più soltanto sul modo con cui la sollecitazione relativa ad una sezione generica si ripartisce su di essa, ma anche sul valore, e spesso anche sulla natura, di questa sollecitazione.

Allora è la legge di variazione delle incognite iperstatiche in funzione delle forze esterne applicate — quale si deduce dalla teoria dell'equilibrio elasto plastico — quella che può e deve diventare oggetto di verifica sperimentale.

Consideriamo per fissar le idee il caso di una trave continua, che è stato oggetto di numerose ed accurate esperienze da parte di tanti sperimentatori; più precisamente consideriamo il caso di una trave a sezione costante, continua su quattro appoggi di livello, simmetrica rispetto alla sua mezzzeria ed ivi caricata da un'unica forza concentrata  $P$ .

Se si assume come incognita iperstatica del problema il momento  $M$  su gli appoggi intermedi (e si conviene di prescindere, come d'uso, dalla influenza

(1) G. COLONNETTI, *Sul calcolo delle deformazioni delle travi in cemento armato*. « Il Cemento Armato », 1938; ID., *Saggio di una teoria generale dell'equilibrio elasto plastico*. « Pontificia Academia Scientiarum », 1938.

(2) G. COLONNETTI, *Sul calcolo delle deformazioni delle travi in cemento armato*. « Il Cemento Armato », 1938; ID., *La statica dei corpi elasto plastici*. « Pontificia Academia Scientiarum », 1938.

(3) F. LEVI e E. GIACCHERO, « Pontificia Academia Scientiarum », 1938.

(4) G. COLONNETTI, *Les déformations plastiques et le dimensionnement des systèmes hyperstatiques*. « L'Ossature Métallique », 1938.

dello sforzo di taglio) l'equazione generale dell'equilibrio elasto plastico si può scrivere sotto la forma <sup>(1)</sup>

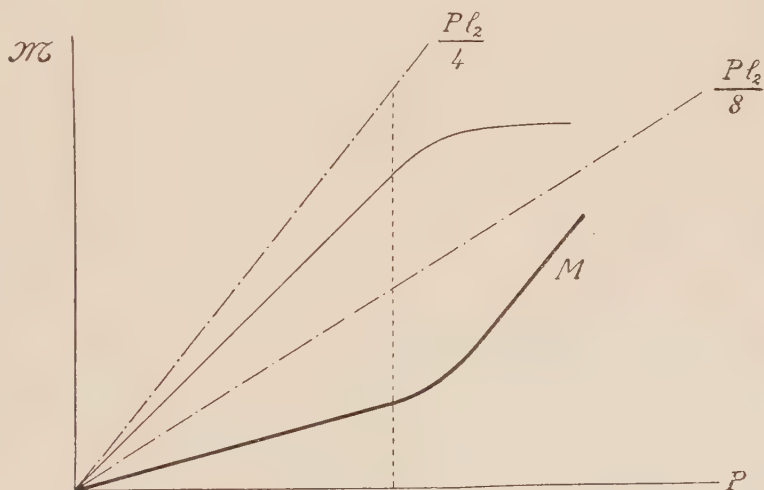
$$(2) \quad \int \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial s} + \bar{\mu} \right) \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial s} ds = 0$$

l'integrale essendo esteso a tutta la lunghezza della trave.

Nel caso concreto, se si indicano con  $l_1$  la lunghezza della campata laterale, e con  $l_2$  quella della campata centrale, e si eseguono le operazioni indicate, si ha

$$(3) \quad \frac{M}{EJ} \left( \frac{2}{3} l_1 + l_2 \right) + \frac{Pl_2^2}{8EJ} + \int \bar{\mu} ds = 0$$

dove l'integrale si estenderà a quella sola porzione della campata centrale (attigua alla mezzeria) in cui può verificarsi il superamento del limite di elasticità del materiale con la conseguente comparsa delle deformazioni plastiche.



Ma la curvatura plastica  $\bar{\mu}$  è, come si è già detto, una funzione perfettamente definita del momento flettente  $\mathcal{M}$  e quindi anche dell'incognita iperstatica  $M$  da cui quel momento linearmente dipende. Dalla (3) si può dunque in ogni caso ricavare la legge secondo cui  $M$  dipende da  $P$ .

Questa legge ha l'andamento indicato con linea a tratto pieno nella figura; la linea a tratto sottile rappresenta invece la legge di variazione del

(1) G. COLONNETTI, *Nuovi punti di vista sulla statica degli archi molto ribassati*. «L'Ingegnere», 1937; ID., *La statica dei corpi elasto plastici*. «Pontificia Academia Scientiarum», 1938.



momento massimo (in mezzeria) quale si deduce dalla prima con semplici considerazioni statiche. Le due linee accusano nel modo più espressivo il fenomeno del trasferimento dei momenti dalle sezioni più sollecitate (in cui si verificano le deformazioni plastiche) alle sezioni meno sollecitate (in cui i limiti di elasticità non sono ancor stati raggiunti).

Ora delle linee perfettamente simili a queste erano state già ottenute dal Prof. Maier-Leibnitz <sup>(1)</sup> servendosi della medesima equazione (che, nel caso particolare di cui si tratta, si può con tutta facilità stabilire direttamente), ma prendendo le mosse da un diagramma delle curvature in funzione dei momenti flettenti da lui ottenuto sperimentalmente in base a misure eseguite su travi semplicemente appoggiate.

Il Maier-Leibnitz ha potuto così nientere in evidenza una bella concordanza tra le linee dei momenti dedotte nel modo anzidetto e quelle rilevate sperimentando direttamente su travi continue.

Ma la concordanza permane — generalmente parlando, e in quanto l'andamento delle cose non sia alterato dall'intervento di fenomeni di incrudimento <sup>(2)</sup> — se la deduzione delle linee dei momenti viene fatta per la via *esclusivamente teorica* che io ho indicata. Tale concordanza è pertanto da annoverarsi senz'altro tra le conferme sperimentali della nuova teoria.

La quale, per la possibilità che offre di affrontare e di risolvere problemi iperstatici ben più complessi di quello qui accennato <sup>(3)</sup>, potrà ormai venire sottoposta a verifiche sperimentali consimili, su di una gamma di casi tanto vasta e varia quanto occorre perchè se ne possano finalmente e con tutta sicurezza dedurre i limiti di applicabilità.

(1) MAIER-LEIBNITZ, *Versuche zur weiteren Klärung der Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit durchlaufender Träger aus Baustahl*. «Der Stahlbau», 1936; Cfr. anche: F. SRÜSSI e C. F. KOLLBRUNNER, *Beitrag zum Traglastverfahren*. «Die Bautechnik», 1935.

(2) G. COLONNETTI, *Incrudimento ed isteresi elastica nel quadro della nuova teoria dell'equilibrio elasto plastico*. «Pontificia Academia Scientiarum», 1938; ID., *Su la resistenza alla flessione in regime elasto plastico*. «Pontificia Accademia Scientiarum», 1938.

(3) F. LEVI, *Les déformations plastiques et le dimensionnement des systèmes hyperstatiques*. «L'Ossature Métallique», 1938.

**Chimica** (Chimica organica). — *Spettro Raman dell'aldeide orto-deuterossi-benzoica*. Nota <sup>(1)</sup> di G. B. BONINO e R. MANZONI ANSIDEI, presentata dal Socio M. BETTI.

La spiegazione comunemente data per chiarire alcune singolari caratteristiche chimico-fisiche dell'aldeide salicilica e specialmente le « anomalie » presentate nello spettro ultrarosso e Raman <sup>(2)</sup> si riassume nell'ipotesi del così detto « legame idrogenico ». Si ammette cioè che l'idrogeno ossidrilico interagisca simmetricamente con l'ossigeno ossidrilico e con l'ossigeno carbonilico dell'aldeide salicilica « chiudendo » un secondo anello esatomico nel senso schematizzato dalla formula seguente.

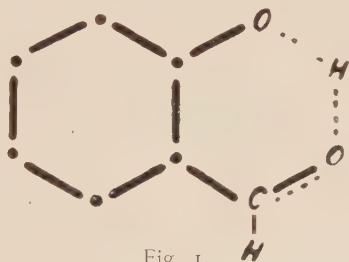


Fig. 1.

Recentemente <sup>(3)</sup> Bauer e Magat hanno sostenuto in un interessante lavoro che questi fenomeni sono da riportarsi ad una interazione puramente elettropolare fra molecole diverse ovvero fra gruppi funzionali della stessa molecola escludendo qualsiasi « legame idrogenico » di tipo omopolare.

Noi non vorremmo essere di un'opinione così estremista dato che ci sembra difficile di poter escludere *a priori* o anche in base alla approssimata sufficienza di un calcolo necessariamente approssimativo e impostato su basi classiche, la presenza di azioni quantiche di natura omopolare. Questo punto di vista sarà chiarito più particolarmente in un prossimo lavoro. Frattanto resta però stabilito che nei casi di chelazione si è di fronte ad una speciale perturbazione sia intra che intermolecolare (a seconda dei casi), se pure anche si lascia per ora in sospeso la descrizione fisica di tale perturbazione.

Possiamo però già fin d'ora affermare che i risultati delle esperienze pubblicati in una serie di nostri precedenti lavori <sup>(4)</sup> non sono favorevoli

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1938.

(2) BONINO, MANZONI ANSIDEI, ROLLA, « Ric. Scient. », II, 8, 2°, 1937.

(3) E. BAUER, MAGAT, « J. Phys. Rad. », [7], 8, 1938, p. 319.

(4) Ved. BONINO, MANZONI ANSIDEI, ROLLA, « Ric. Scient. », II, 8, 2°, 1937.

per una spiegazione semplicista del fenomeno di chelazione delle aldeidi aromatiche e mostrano la necessità di approfondire per varie vie lo studio chimico fisico di questi composti.

Era interessante sotto questo punto di vista lo studio dei composti nei quali l'idrogeno dell'eventuale ed ipotetico « legame idrogenico » fosse sostituito con un atomo di deuterio (ved. fig. 2) onde osservare quali variazioni potessero intervenire alterando così profondamente il valore della massa del detto idrogeno senza per altro portare sensibili variazioni nella ripartizione della densità della nuvola di carica dei vari legami.

Abbiamo perciò in corso di studio tutta una serie di ossialdeidi ed ossichetoni aromatici nei quali l'idrogeno ossidrilico viene sostituito con un atomo di deuterio. Riferiamo qui brevemente sulla preparazione e sullo spettro Raman dell'aldeide salicilica deuterata all'ossidrilile. Si sa che <sup>(1)</sup>

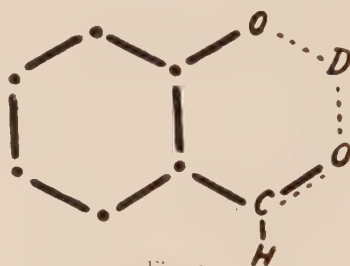
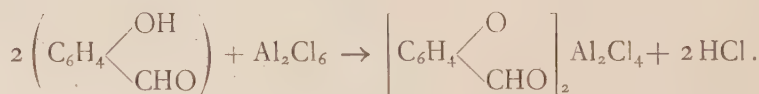


Fig. 2.

l'aldeide salicilica sostituisce facilmente in presenza di acqua pesante l'idrogeno ossidrilico con il deuterio. Però tentativi di sostituzione diretta difficilmente ci avrebbero potuti portare ad un composto puro ma piuttosto ad una miscela di aldeide salicilica ordinaria con proporzioni diverse di aldeide deuteroossisalicilica come pure con aldeidi saliciliche nella cui molecola idrogeni nucleari fossero sostituiti da deuterio.

Abbiamo perciò ripreso lo studio di una reazione descritta molti anni fa da Perrier <sup>(2)</sup> e che si può prestare ad un tentativo di deuterazione all'ossidrilile nell'aldeide salicilica. Perrier aveva osservato che nella reazione tra sostanze fenoliche e tricloruro di alluminio veniva eliminata una quantità di acido cloridrico corrispondente stechiometricamente agli ossidrilili fenolici della sostanza in reazione.

Il Perrier interpretava fra l'altro la reazione tra tricloruro di alluminio e aldeide salicilica nel modo seguente:



(1) MASAO KOIZUMI e T. TITANI, «Bull. Chem. Soc. Jap.», 13, 1938, p. 318.

(2) PERRIER, «Bull. Soc. Chim. France», 15, 1896, p. 1181; «C. R.», 122, 1896, p. 195.

Il composto sovraddetto rigenera per azione dell'acqua aldeide salicilica.

Noi abbiamo preso 5 gr. della polvere giallastra costituita dal composto ottenuto trattando secondo Perrier l'aldeide salicilica con tricloruro di alluminio. Abbiamo sospeso tale polvere secchissima in etere anidro decomponendola poi con 7-8 cc. di  $D_2O$  al 99 % versando questi cc. di acqua pesante goccia a goccia nella sospensione eterica. L'aldeide rigenerata in tal modo venne purificata per distillazione a pressione ridotta. Le misure

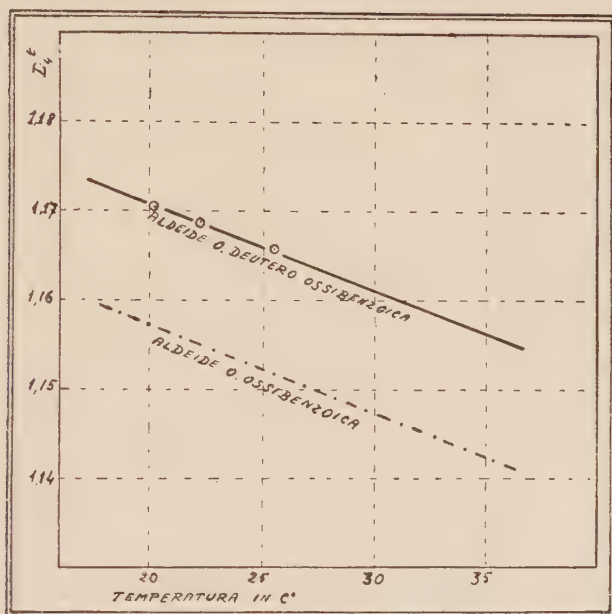


Fig. 3.

di densità su questa aldeide hanno subito mostrato un aumento imputabile all'entrata del deuterio in molecola.

Ecco i valori delle densità:

$$D_4^{20.2} = 1.1707 \quad ; \quad D_4^{22.2} = 1.1689 \quad ; \quad D_4^{25} = 1.1661.$$

Ricordiamo che le misure di Jaeger e Walden<sup>(1)</sup> danno per l'aldeide salicilica ordinaria:  $D_4^{25} = 1.1525$ .

Nella figura 3 è riportato l'andamento delle densità dell'aldeide salicilica ordinaria e di quella deuterata in funzione con la temperatura<sup>(2)</sup>.

(1) JAEGER, «Z. Anor. Chem.», 101, 1917, p. 142; WALDEN, «Z. Phys. Chem.», 55, 1906, p. 220.

(2) La curva relativa all'aldeide salicilica ordinaria si è ricavata interpolando le misure di Jaeger e Walden (ved. nota precedente).

Nella tabella seguente riportiamo gli spettri Raman delle due aldeidi:

Aldeide o-ossibenzoica	Aldeide o-deuteroossibenzoica
3068 (3 dif.)	3068 (3 dif.)
1661 (6 dif.)	1658 (6 dif.)
1642 (4)	1632 (1)
1616 (3)	1611 (3)
1575 (4)	1579 (0)
—	1567 (6)
—	1473 (4)
1456 (7)	1456 (6)
1386 (1)	1387 (1)
(1359 ( $1/2$ ))	(1357 ( $1/2$ ))
1320 (5)	1322 (4)
1275 (1)	1286 ( $1 \frac{1}{2}$ )
	1260 ( $1 \frac{1}{2}$ )
1223 (7)	1228 (3)
	1215 (5)
1147 (4)	1149 (5)
1112 (1)	1114 ( $1/2$ )
1024 (5)	1030 (6)
885 (1)	
867 (0)	872 (1)
767 (8)	768 (8)
731 ( $1/2$ )	731 ( $1/2$ )
663 (1)	666 (1)
561 (4)	562 (5)
449 (5)	455 ( $3 \frac{1}{2}$ )
	439 (5)
409 (2)	412 (1)
298 (1)	297 (1)
265 (3)	266 (2)
213 ( $1/2$ )	219 (1)
149 (5)	155 (3)



*Discussione dei risultati.*

a) Innanzitutto osserviamo che lo spettro della deuteroossibenzaldeide da noi preparata non mostra nel modo più assoluto righe caratteristiche del gruppo C-D sia « aromatico » che « alifatico ». Queste righe cadono verso i 2000–2600  $\text{cm}^{-1}$  (1). Tale risultato ci conferma che la maggiore densità dell'aldeide da noi preparata non è dovuta a deuterio legato al carbonio e ci assicura che la sostituzione del deuterio è avvenuta esclusivamente all'ossidrile fenico.

b) Come nell'aldeide salicilica ordinaria osserviamo nello spettro dell'aldeide deuterata due righe riferibili al gruppo C=O (1661, 1642  $\text{cm}^{-1}$  per l'aldeide salicilica ordinaria; 1658, 1632  $\text{cm}^{-1}$  per quella deuterata). La prima di queste due righe è praticamente coincidente nelle due aldeidi, la seconda (e cioè la più bassa) mostra nella deutero aldeide una posizione leggermente spostata verso le minori frequenze. Lo spostamento osservato è di dieci numeri d'onda. Dobbiamo d'altra parte osservare che mentre la riga a frequenza più alta si presenta con pari intensità nello spettro delle due aldeidi quella a frequenza più bassa si mostra assai meno intensa nello spettro dell'aldeide deuterata che non in quello dell'aldeide salicilica ordinaria. Del resto anche nello studio del deuteropirrolo (2) abbiamo osservato delle notevoli variazioni di intensità per righe che pressapoco non mostrano alterazioni della frequenza passando dal derivato ordinario a quello deuterato.

c) La riga a 1320  $\text{cm}^{-1}$  dell'aldeide salicilica la quale, come abbiamo osservato in un precedente lavoro (3), è caratteristica per le aldeidi e per i chetoni chelati intramolecolarmente, si presenta invariata come posizione e come intensità nelle due orto ossibenzaldeidi studiate.

d) Una caratteristica distintiva tra gli spettri delle due aldeidi sovraccitate sta nel raddoppio che subiscono nello spettro dell'aldeide deuterata la righe 1275, 1223, 449  $\text{cm}^{-1}$  dell'aldeide salicilica.

In una recente comunicazione (4) Bartholomé ha prevista la possibilità di scissione di righe Raman quando in una molecola vengono sostituiti uno o più atomi di idrogeno con atomi di deuterio e ciò in relazione alla diminuzione di simmetria che ne consegue, diminuzione che può portare alla scomparsa del carattere di degenerescenza di alcune oscillazioni fondamentali della molecola non deuterata. Però come si sa, la presenza di oscilla-

(1) Ved., p. es., ENGLER, « Z. Phys. Chem. », B. 35, 1937, p. 434; INGOLD e collab., « Nature », 135, 1935, p. 1033, ecc.

(2) BONINO, MANZONI ANSIDEI, « R. Acc. Lincei », vol. XXV, 1937, p. 494.

(3) Ved. note (2) e (4) a p. 259.

(4) BARTHOLOMÉ, « Z. f. Elektr. », 44, 1938, p. 15.

zioni degeneri è legata al fatto che la molecola possieda un asse di simmetria di grado superiore al secondo. La complessità della molecola dell'aldeide salicilica non può permettere immediatamente una tale spiegazione dei raddoppi da noi osservati.

e) La riga « benzenica » a  $1575\text{ cm}^{-1}$  dell'aldeide salicilica si trova nell'aldeide deuterata a  $1567\text{ cm}^{-1}$  e cioè leggermente spostata verso le minori frequenze.

Concludendo possiamo dire che lo spettro Raman dell'aldeide deutero-ossibenzoica a confronto con quello dell'aldeide salicilica ordinaria non è immediatamente favorevole ad una unica ipotesi di un semplice legame omopolare a ponte tra l'idrogeno carbonilico e quello ossidrilico nel senso della formula già prospettata. D'altra parte l'effetto Raman mostra che il grado di complicazione che si osserva nei riguardi dello stato del gruppo  $\text{C}=\text{O}$  dell'aldeide salicilica è riprodotto parallelamente in quello della aldeide deuterata. Ma mentre per una parte (rilevata dalla riga a  $1660\text{ cm}^{-1}$  circa) vi è perfetta coincidenza tra le due aldeidi per quello che riguarda l'altra riga a più bassa frequenza ( $1630\text{--}1645\text{ cm}^{-1}$ ) si osservano nell'aldeide deuterata delle differenze non trascurabili. Le ricerche proseguono anche su altre aldeidi e chetoni deuterati sia nel campo dello spettro Raman come in quello dello spettro ultrarosso.

Per ora dobbiamo sottolineare soprattutto il fatto che lo spettro Raman insieme con le misure di densità ci confermano che la reazione da noi impiegata porta con successo ad aldeide salicilica deuterata esclusivamente all'ossidrile. Questo risultato ci permette di tentare la preparazione in modo analogo di altre ossialdeidi e ossichetoni deuterati che ci permetteranno di portare qualche nuovo contributo allo studio sperimentale della chelazione.

**Botanica.** — *Influenza del portainnesto sulla recettività della marza alle infezioni parassitarie*<sup>(1)</sup>. Nota preventiva di G. Goidànich, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. Petri.

La comparsa di alcuni casi di grafiosi naturale in *Ulmus pumila* — specie di olmo che è notoriamente molto resistente alla malattia — quando questo fosse innestato su *Ulmus campestris*<sup>(3)</sup> od *U. hollandica*<sup>(4)</sup> — specie che sono invece suscettibili alla infezione del *Graphium* — aveva fatto sorgere il sospetto<sup>(5)</sup> che il fenomeno dovesse attribuirsi ad una modificazione indotta, direttamente od indirettamente, dal portainnesto sulle qualità di resistenza della marza.

Nuove osservazioni eseguite in campagna su grafiosi spontanee dell'olmo siberiano e specialmente alcune esperienze preliminari condotte nell'anno 1937, mediante inoculazioni artificiali<sup>(5)</sup>, hanno permesso di stabilire con certezza che la perdita della resistenza dell'*U. pumila* in seguito all'innesto sul campestre è un fatto normale. Dalle ricerche recentissime di Wollenweber e Röder<sup>(6)</sup> risulta poi che la medesima cosa avviene quando l'*U. pumila* cresca su piede di *U. montana*, olmo che del pari è recettivo per la malattia.

Dopo queste numerose constatazioni era logico domandarsi: la perdita della resistenza in conseguenza dell'innesto su un soggetto recettivo è limitata all'*U. pumila* od interessa altre specie od altri tipi di olmo? Il fenomeno cioè ha un carattere di eccezionalità dipendente, ad esempio, da una struttura particolare della prima specie oppure possiede, sempre s'intende nell'ambito del genere *Ulmus*, una portata generale? Per rispondere a questi interrogativi predisposi nel decorso anno una serie di esperienze: su piante di tre anni di *U. campestris* ed *U. pumila* vennero innestate marze dell'« olmo Cr. Buisman » e di due ceppi di olmo campestre (« Villagrappa

(1) Ricerche eseguite nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Nella seduta del 5 novembre 1938.

(3) G. Goidànich, *Comportamento dell'« Ulmus pumila » nella pratica agricola e la sua resistenza alla grafiosi*. « Boll. R. Staz. Pat. Veg. », XV, n. s., 1936, pp. 199-207.

(4) C. Buisman, *Verslag van de onderzoekingen over de iepenziekte, verricht in het Phytopathologisch Laboratorium Willie Commelin Scholten te Baarn, gedurende 1934*. « Tijdschr. over Plantenz. », 40, 1934, pp. 65-87.

(5) G. Goidànich e F. Azzaroli, *Relazione sulle esperienze di selezione di olmi resistenti alla grafiosi e di inoculazioni artificiali di « Graphium ulmi », eseguite nel 1937*. « Boll. R. Staz. Pat. Veg. », XVII, n. s., 1938, pp. 149-178.

(6) H. W. Wollenweber und K. Röder, *Das Verhalten einer Propfulme (« Ulmus pumila ») gegen « Graphium ulmi »*. « Nachrichtenbl. f. d. deutsch. Pflanzenschutz. », 18, 1938, pp. 31-32.

n. 1 » e « Formosa ») che hanno dimostrato nel corso delle ricerche condotte da me e dal collega dott. F. Azzaroli (loc. cit., p. 162), un elevato grado di resistenza alla grafiosi. Su tutte le piante fu eseguito in seguito l'inoculazione, mediante siringa, del *Graphium* e si ottennero i risultati che riporto nella seguente tabella <sup>(1)</sup>.

Porta innesto	Marza	Numero piante inoculate	Data inoculazione	Numero degli esemplari ammalati e data della prima manifestazione della malattia
U. CAMPESTRIS	Villagrappa N. 1	12	24-6-1938	In 6 esemplari il 2 luglio
U. PUMILA . .	» »	9	24-6-1938	In 2 esemplari il 7 luglio
U. CAMPESTRIS	Formosa	25	28-6-1938	In 7 esemplari il 4 luglio
U. PUMILA . .	»	15	12-7-1938	In 1 esemplare il 22 luglio
U. CAMPESTRIS	Buisman	92	24-6-1938	In 2 esemplari il 4 luglio
			2-7-1938	In 1 esemplare il 14 luglio
			24-6-1938	In nessun esemplare (1)
U. PUMILA . .	»	32	12-7-1938	

(1) Il minor numero di esemplari su piede di olmo siberiano utilizzati in questa esperienza è largamente compensato dal gran numero di esemplari di eguali caratteristiche inoculati, sempre con esito negativo, il decorso anno nella medesima epoca e col medesimo metodo.

Oltre a ciò furono allestiti, sempre su *U. campestris*, in parallelo o no con *U. pumila*, numerosi innesti di altri tipi di olmo, quali, ad esempio, ceppi di *U. laevis* e ceppi di *U. campestris* in selezione, constatando normalmente dopo l'inoculazione, nei soggetti col piede di campestre, non solo una più alta percentuale di attecchimento dell'infezione, ma anche una maggiore rapidità nella comparsa delle manifestazioni esterne ed interne della malattia.

I fatti osservati hanno un grande interesse pratico e forniranno utili elementi per stabilire le norme secondo le quali andrà fatta la ricostituzione delle alberate di olmo distrutte dalla grafiosi; è chiaro che non sarà consigliabile l'uso dell'*U. campestris* quale portainnesto delle specie o dei ceppi selezionati resistenti, che tuttavia è necessario moltiplicare per via vegetativa; e inoltre dovrà sconsigliarsi la pratica del sovrainnesto, con marze di soggetti resistenti, degli olmi campestri non ancora uccisi o non ancora colpiti dalla grafiosi.

(1) I pochissimi dati di questa tabella indicano chiaramente che il comportamento rispetto all'infezione dei singoli tipi di olmo — anche quando crescano sul medesimo soggetto — è assai diverso, e che perciò il grado di resistenza e di refrattarietà va stabilito ed inteso in senso relativo.



Ma il significato dei fatti osservati esula dal semplice campo tecnico per riflettersi in quello scientifico, poichè essi servono a portare un contributo alle nostre conoscenze sulla tanto dibattuta questione del modo e del grado con cui il portainnesto può influire sulle qualità della marza e della pianta bimembre che risulta dopo la saldatura dei due elementi vegetativi.

Per le piante da frutto in modo particolare, ma anche per le piante ortive <sup>(1)</sup> è da tempo dimostrato che si manifestano notevoli e ben apprezzabili diversità nelle dimensioni, nel colore, nel sapore, nella composizione dei frutti, nell'epoca di fioritura, di maturazione, nella conformazione e nella vitalità dell'albero innestato, a seconda del soggetto che si impiega. Non solo: in diversi casi si è potuto stabilire che, reciprocamente, anche la marza ha la capacità di agire, modificandone le caratteristiche, sul portainnesto <sup>(2)</sup>.

Assai incerta è invece la nozione se con l'innesto si può avere una modificazione della naturale resistenza, o recettività, dei due elementi della pianta bimembre, all'attacco di microrganismi parassiti o no. Su questo argomento sono state eseguite apposite ed abbastanza numerose ricerche con risultati spesso contrastanti. Fra i lavori che concludono per la fissità dei caratteri originari di resistenza e recettività della marza e del soggetto si devono ricordare quelli di: Leach <sup>(3)</sup> che ha studiato il comportamento di due varietà di fagiolo, una molto resistente, l'altra recettiva, rispetto alla infezione di *Colletotrichum lindemuthianum*; di May <sup>(4)</sup> riferentesi alle infezioni di *Fusarium lycopersici* sul pomodoro; di Roach <sup>(5)</sup> relativo al *Synchytrium endobioticum* della patata; di Salmon e Ware <sup>(6)</sup> sul mal bianco del luppolo; di Bond <sup>(7)</sup> sulla infezione del pomodoro e della patata da *Phytophthora infestans* e *Cladosporium fulvum*. Anche Gäuman e Fischer, Roemer,

(1) Cfr., ad es.: V. R. GARDNER, F. C. BRADFORD and H. D. HOOKER, *The fundamentals of fruit production*. Mc. Graw. Hill., N. Y. and London, 1922, 686 pp.; P. SORAUER, *Handbuch der Pflanzenkrankheiten*, vol. I, 5ª ediz., 1924, p. 814; L. DANIEL, *La question phylloxérique. La greffage et la crise viticole*, fasc. I, 1908, 184 pp.

(2) V. R. GARDNER, F. C. BRADFORD and H. D. HOOKER, loc. cit.

(3) J. G. LEACH, *The effect of grafting on resistance and susceptibility of beans to « Colletotrichum lindemuthianum »*. « Phytopath. », 19, 1929, pp. 875-877.

(4) C. MAY, *The effect of grafting on resistance and susceptibility of tomatoes to « Fusarium » wilt*. « Phytopath. », 20, 1930, pp. 519-521.

(5) W. A. ROACH, *Studies in the varietal immunity of potatoes to wart disease [« Synchytrium endobioticum » (Schilb.) Perc.]*. Part I. *The influence of the foliage on the tuber as shown by grafting*. « Ann. appl. biol. », 10, 1923, pp. 142-146.

(6) E. S. SALMON and W. M. WARE, *Grafting experiments with varieties of hops resistant to hop mildew, « Sphaerotheca humuli » (D. C.) Burr.* « Ann. appl. biol. », 14, 1927, pp. 276-289.

(7) T. E. T. BOND, *« Phytophthora infestans » and « Cladosporium fulvum » on varieties of Tomato and Potato and on grafted solanaceous plants*. « Ann. appl. biol. », 23, 1936, pp. 293-303.



Fuchs e Isenbeck, discutendo questo argomento nei loro trattati <sup>(1)</sup>, sono piuttosto propensi a ritenere che l'azione dell'innesto, nei riguardi della resistenza e recettività, si espliciti indirettamente.

Il fatto contrario è dimostrato <sup>(2)</sup> dalle ricerche di Wormald e Grubb, Rawlins e Parker, Fikry. I primi <sup>(3)</sup> hanno riscontrato che diverse varietà di melo rendono meno resistente all'attacco del *Bacterium tumefaciens* il porta-innesto, mentre altre lo rendono più resistente. Rawlins e Parker hanno segnalato recentemente <sup>(4)</sup> che i ciliegi innestati sul *Mabaleb* sfuggono o resistono alla infezione naturale della malattia denominata « buckskin » e Fikry ha constatato <sup>(5)</sup> l'influenza del soggetto sulla suscettibilità dei susini ad una malattia fisiologica comparsa in Egitto.

Questi risultati contrastanti non devono stupire perchè la resistenza e la refrattarietà dei vegetali è con ogni verosimiglianza legata a fattori diversi da tipo a tipo di pianta, fattori che non vengono necessariamente messi in gioco o per lo meno non vengono mobilitati in eguale misura col processo dell'innesto.

Nel caso specifico dell'olmo varie sono le ipotesi che si possono fare per spiegare i fenomeni sopra descritti: È ammissibile che l'olmo siberiano e gli altri olmi resistenti contengano una qualche sostanza nociva o dotata di una proprietà chemotatticamente negativa per il *Graphium ulmi*, la quale viene distrutta o modificata a contatto della linfa dell'olmo campestre; od altrimenti può essere che la linfa di quest'ultimo sia dotata di una sostanza favorevole o chemotatticamente positiva <sup>(6)</sup> per il *Graphium* la quale viene

(1) E. FISCHER und E. GÄUMAN, *Biologie der Pflanzenbewohnenden parasitischen Pilzen*. Jena, 1929, 428 pp.; T. ROEMER, W. H. FUCHS und K. ISENBECK, *Die Züchtung resistenter Rassen der Kulturpflanzen*. Berlin, 1938, 427 pp.

(2) Quantunque non strettamente attinenti all'argomento che si sta trattando merita che siano ricordate le ricerche di HOFMAN e RICHMOND (F. W. HOFMAN, *Reciprocal effects from grafting*. « Journ. Agric. Res. », 34, 1927, pp. 673-676; T. E. RICHMOND, *Legume inoculation as influenced by stock and scion*. « Bot. Gaz. », 82, 1926, pp. 438-442). Questi AA. hanno descritto un caso particolarmente interessante: le inoculazioni dei ceppi di *Bacterium radicola*, isolati dalle radici di *Phaseolus lunatus* riescono negative sulle radici di *Phaseolus communis*, come quelle con ceppi del batterio di *Phaseolus communis* sono negative sulle radici del *Ph. lunatus*. Mediante l'innesto reciproco delle due specie di fagiolo gli AA. sono riusciti ad ottenere la perdita della specificità nelle radici emesse dal seme prodotto dalle piante bimembri; cioè i semi prodotti dalla marza di *Ph. communis*, innestata su *Ph. lunatus*, furono attaccati dal batterio di *Ph. lunatus* e viceversa.

(3) H. WORMALD and N. H. GRUBB, *The crown-gall disease of nursery stocks. I. Field observations on apple stocks*. « Ann. appl. biol. », 11, 1924, pp. 278-291.

(4) T. E. RAWLINS and K. G. PARKER, *Influence of rootstocks on the susceptibility of sweet cherry to the buckskin disease*. « Phytopath. », 24, 1934, pp. 1029-1031.

(5) A. FIKRY, *Water-table effects. I. The gumming and death of plum trees*. « Min. of Agric. Egypt., Techn. and sc. Service (Myc. sect.), Bull. 141 », 1934, 35 pp.

(6) Sull'importanza del chemotropismo per le capacità parassitarie dei funghi si veda l'acuto lavoro di PETRI, *Una esperienza sopra il valore del chemotropismo sull'azione parassitaria dei funghi*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », Cl. Sc. fis. mat. nat., vol. XVIII, ser. 5ª, 1909, pp. 545-553.

immessa nella linfa del siberiano o degli altri olmi resistenti <sup>(1)</sup>. A tale concezione abbastanza semplicistica di una sostanza preesistente nelle due linfe può sostituirsi l'altra, basata su analogo principio, che cioè determinate sostanze favorevoli all'infezione si originino soltanto nella linfa della pianta bimembre.

Al fatto che l'innesto modifica profondamente i processi vitali originari delle piante messe in combinazione, si può riconnettere l'ipotesi di una trasformazione nei caratteri morfologici-anatomici e chimico-fisiologici, quali ad esempio spessore delle pareti, dimensioni degli elementi cellulari, pressione, reazione e composizione dei succhi circolanti e del contenuto cellulare, a cui notoriamente è affidata la resistenza e la recettività attiva e passiva dei vegetali.

Su quale delle ipotesi formulate e di quelle che ancora si potrebbero formulare per spiegare l'intima natura dei fenomeni osservati, è difficile ed avventato pronunciarsi in base agli elementi finora a disposizione. Altre ricerche verranno fatte sull'accrescimento delle colonie di *Graphium* sul legno morto e sul succo emesso spontaneamente od estratto con la pressatura dei tessuti legnosi dei vari tipi di olmo che si sono considerati; verranno inoltre eseguite esperienze su piante con radici di *Ulmus pumila* per vedere se vi è costanza nella trasmissione dei caratteri di resistenza e recettività dall'elemento funzionante come portainnesto, o se tale fenomeno è legato alla combinazione portainnesto recettivo-marza resistente.

Il valore pratico e specialmente l'interesse scientifico che hanno, e che potrebbero suscitare negli ulteriori sviluppi sperimentali, i fatti descritti giustificano la enunciazione e il commento provvisorio di essi nella presente Nota preventiva.

(1) La mescolanza della linfa nelle piante innestate, anche se non completa per tutti i suoi componenti, è un fatto ben dimostrato: cfr. ad es.: L. DANIEL, *La question phylloxérique. La greffage et la crise viticole*, fasc. I, 1908, p. 128 e sgg.; A. MEYER und E. SCHMIDT, *Ueber die gegenseitige Beeinflussung der Symbionten heteroplastischer Transplantation, mit besonderer Berücksichtigung der Wanderung der Alkaloide durch die Propfstellen*. «Flora», 100, 1910, pp. 377-397.

**Fisiologia** (Chimica biologica). — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — VIII. *Sul valore del pH del liquido seminale di coniglio* <sup>(1)</sup>. Nota di V. ZAGAMI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. S. BAGLIONI,

Dalle ricerche finora da noi <sup>(3)</sup> eseguite, sperimentando sempre con tecnica adeguata ed uniforme, è risultato, che la concentrazione in ioni  $H^+$  del liquido seminale è pressochè identica, quando si considera, comparativamente, il liquido di animali della stessa specie, ma assai diversa, quando si considera, comparativamente, il liquido di animali di specie differenti (uomo, cane, gallo).

Mentre, infatti, il liquido seminale umano normale, a pressione parziale di  $CO_2$  corrispondente a quella fisiologica e alla temperatura di  $18-20^\circ C.$ , presenta un pH di 7.50-7.74, quello di cane, in pari condizioni sperimentali, presenta un pH di 6.65-6.79, e quello di gallo, sempre nelle stesse condizioni, presenta un pH di 7.02-7.18.

A complemento di questi risultati, per varie considerazioni di ordine scientifico e pratico, ci è sembrato interessante estendere le nostre osservazioni al liquido seminale anche di altre specie di animali, e stabilire i limiti entro cui normalmente si presenta, nelle varie specie, la concentrazione idrogenionica.

Per intanto le nostre indagini sono state estese al liquido seminale di coniglio.

Ricordiamo, per quanto riguarda la letteratura in merito, che Milovanov <sup>(4)</sup>, in base ai lavori degli Autori russi, riferisce, che il liquido seminale di coniglio presenta un pH di 6.8-7.0; ma, mancandoci al solito ogni notizia relativa alla tecnica adottata da tali autori, non siamo affatto in grado di valutare tali valori, e tanto meno di poterli confrontare coi nostri precedentemente assunti, sperimentando sul liquido seminale di uomo, di cane e di gallo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 novembre 1938.

(3) V. ZAGAMI, *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — I. *Sul valore del pH del liquido seminale umano normale*. « Rendic. R. Accad. Naz. Lincei », vol. XXV, 1937, p. 268; II. *Sul valore del pH del liquido seminale di gallo*. « Ibidem », vol. XXVI, 1937, p. 123; IV. *Sul valore del pH del liquido seminale di cane*. « Ibidem », vol. XXVII, 1938, p. 597.

(4) V. K. MILOVANOV, trad. di T. BONADONNA, *Le basi scientifiche e le possibilità applicative della fecondazione artificiale negli animali domestici*. G. Vannini, Edit., Brescia, 1927.

Le ricerche le abbiamo eseguite su tre conigli in ottime condizioni generali e di nutrizione, e in piena maturità ed efficienza sessuale.

Per la raccolta del liquido seminale ci siamo serviti della vagina artificiale, in cui, come per il cane, veniva messo inizialmente un po' di olio di vasellina, in maniera che il liquido ejaculato dall'animale rimanesse subito coperto e al riparo dal contatto con l'aria.

Le raccolte venivano eseguite intercalando fra una raccolta e l'altra un congruo periodo di riposo sessuale.

Le determinazioni del pH sono state eseguite col solito metodo elettrometrico, adoperando la siringa-elettrodo di Mislowitzer, e adottando la tecnica precedentemente descritta per evitare ogni eventuale perdita di  $\text{CO}_2$ .

Nella annessa tabella sono riportati i valori del pH del liquido seminale a 20° C. di temperatura.

*Valori del pH (a 20° C) del liquido seminale del coniglio.*

Soggetto n. 1			Soggetto n. 2			Soggetto n. 3		
Numero progressivo delle esperienze	Riposo sessuale ore	pH	Numero progressivo delle esperienze	Riposo sessuale ore	pH	Numero progressivo delle esperienze	Riposo sessuale ore	pH
1	48	6.48	1	48	6.98	1	48	6.74
2	0.30'	6.65	2	72	6.84	2	96	6.84
3	48	6.44	3	24	6.74	3	48	6.57
4	0.30'	6.70	4	48	6.90	4	48	6.70
5	48	6.59	5	120	6.84	5	24	6.75
6	48	6.68	6	48	6.84	6	48	6.73
MEDIE . . .		6.59	—	—	6.86	—	—	6.72

Dall'esame di essa si nota, che il valore medio del pH del liquido seminale è stato di 6.59 nel coniglio n. 1, di 6.86 nel coniglio n. 2, e di 6.72 nel coniglio n. 3.

Raffrontando questi valori con quelli da noi accertati, sperimentando sul liquido seminale di uomo, di cane e di gallo, si nota, che la concentrazione idrogenionica del liquido seminale di coniglio può ritenersi assai vicina a quella presentata dal liquido seminale di cane, ma differente da quella presentata dal liquido seminale di uomo e di gallo. Ma a parte tale raffronto, che può

assumere maggiore importanza quando le nostre indagini saranno estese anche al liquido seminale di altre specie di animali, per intanto ci interessa fissare questo ulteriore contributo alla conoscenza della organizzazione chimico-fisica di questo importantissimo liquido dell'organismo, cui precisamente tendono le ricerche che da tempo conduciamo.

Per concludere, rimane stabilito, che il liquido seminale di coniglio presenta, a 20° C. di temperatura e a pressione parziale di  $\text{CO}_2$  corrispondente a quella fisiologica, un pH medio di 6.59-6.86.



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. MILLOSEVICH, dà inizio all'anno accademico col saluto al Re e il saluto al Duce. Ricorda i Soci defunti durante le ferie e commemora brevemente il Vice-Presidente CARLO ALFONSO NALLINO, l'Accademico Segretario, NICOLA PARRAVANO, i Soci PIERO ALOISI e GIUSEPPE STEFANINI, e il Socio Straniero HALE. Dopo aver rivolto un mesto pensiero alla memoria di tutti gli Scomparsi, assicura i colleghi che di ognuno di essi sarà tenuta una degna commemorazione nelle prossime sedute della Classe.

Proclama quindi i nuovi Soci eletti, consegnando ai presenti le tessere in bronzo o i diplomi e rivolge a tutti i nuovi Colleghi il saluto dell'Accademia. I nuovi Soci GIULIO CESARE TRABACCHI e MAURO PICONE prestano il giuramento accademico.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio LOMBARDI presenta in omaggio il suo volumetto su: « L'elettrotecnica » facente parte della « Enciclopedia scientifica monografica Bompiani ». Presenta anche il « Vocabolario elettrotecnico internazionale » pubblicato dalla Commissione Elettrotecnica internazionale illustrando i criteri col quale venne compilato.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione negli Atti dell'Accademia i Soci BOMPIANI, CHECCHIA RISPOLI, GUIDI CAMILLO, PICONE.

## PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente legge una domanda del sig. Giuseppe Pellegrini che ha depositato in data 7 giugno 1929 un plico suggellato presso l'Accademia e chiede ora l'apertura del plico medesimo e la restituzione. Il Presidente, fatta constatare l'integrità dei suggelli del plico in parola, lo apre e prega il Segretario AMALDI di dare lettura della breve comunicazione.

Il Segretario AMALDI legge detta comunicazione che riguarda la determinazione del sesso negli animali.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio BOMPIANI anche a nome del Collega BERZOLARI legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di Mario Villa: « Determinazione delle varietà a quattro dimensioni che posseggano  $\infty^7$  quasi asintotiche  $\gamma_{1,3}$  ».

L'Assemblea approva.

## COMUNICAZIONI VARIE

Passando a svolgere le comunicazioni della Presidenza il sen. MILLOSEVICH mette al corrente i Colleghi della ricostituzione del Consiglio di Presidenza e riferisce sulle pratiche svolte per ottenere un aumento della dotazione governativa. A tale proposito annunzia che per la benevolenza del Capo del Governo l'Accademia ha potuto ottenere già fin da questo anno finanziario un aumento pari quasi alla richiesta avanzata dall'Accademia stessa.

Propone quindi che si inviino a S. M. il Re Imperatore, al Capo del Governo e a S. E. il Ministro dell'Educazione Nazionale telegrammi esprimenti la devozione e la gratitudine dell'Accademia.

La Classe approva con vive acclamazioni.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 5 novembre 1938.*

- ACQUAVIVA FRANCESCO. — La tecnica colturale e l'economia della cipolla in Calabria. Napoli, 1938. 8°, pp. 1, 44.
- ANTUNEZ DE MAYOLO SANTIAGO. — Les energies primaires qui composent l'electron et leurs interpretations: matiere, gravitation et vie. Lima, 1938. 8°, pp. 1-28.
- Associazione Italiana di Aerotecnica. Volume commemorativo del XXV annuale del Laboratorio di aeronautica del R. Politecnico di Torino Roma, 1938. 8°, pp. 1-370.
- BAKER JAMES. — Vedi MENZEL DONALD.
- BATTAGLIA M. — Eumyces tuberculosès. (Estr. dal « Bollettino della Sezione Italiana della Società Internaz. di Microbiologia ». Vol. VII-VIII). Varese, 1938. 8°, pp. 1-8.
- BELLI CAMILLO. — La siericoltura nell'Africa Orientale Italiana. (Estr. dalla Rivista « La Seta »). Milano, 1938. 4°, pp. 1-20.
- BERIO E. — Lista dei lepidotteri eteroceri con note e diagnosi di eteroceri africani. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LVIII, pp. 189-203). Genova, 1938. 8°.
- BETTINI MANLIO. — La zootecnica nel Sud Africa. (Relazioni e monografie agrario-coloniali, n. 46). Firenze, 1938. 8°, pp. 1-263.
- BONATTI STEFANO. — Contributo alla conoscenza della sepiolite. (Estr. dai « Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XLVI). Pisa, 1937. 8°, pp. 1-12.
- BONATTI STEFANO. — La roccia granitoide del Sasso di Castro (Passo della Futa). (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XLVII). Pisa, 1938. 8°, pp. 1-16.
- BONATTI STEFANO. — Osservazioni cristallografiche e ottiche sopra la colesterina. (Estr. dai « Processi Verbali della Soc. Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XLVI). Pisa, 1937. 8°, pp. 1-8.
- BONATTI STEFANO. — Sulla struttura cristallina dello scantogenato di nichelio. (Estr. dagli « Atti della Soc. Toscana di Scienze Naturali residente in Pisa ». Vol. XLVII). Pisa, 1938. 8°, pp. 1-15.
- BONATTI S. e DERENZINI T. — Determinazione delle strutture cristalline dei sali dell'acido scantogenico. (Estr. dai « Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XLVII). Pisa, 1938. 8°, pp. 1-12.
- BOREL EMILE. — Applications aux jeux de hasard (Traité de calcul des probabilités et de ses applications. Tome IV, fasc. II). Paris. Editeur Gauthier, Villars, 1938. 8°, pp. 1-XI, 1-122.
- BREUNING S. — Quelques nouvelles espèces de lamiinae (Col. Ceramb.) de l'Afrique Orientale. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LXII, pp. 204-206). Genova, 1938. 8°.
- BROOK MAX. — Ionisation in Stellar Atmospheres. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 98, pagine 204-213). Edinburgh, 1938. 8°.
- BUA GAETANO. — Serie di esperimenti con sostanze attrattive per la mosca delle olive. Roma, 1938. 8°, pp. 1-19.
- BÜNEMANN OSCAR. — A method for the automatic detection of maxima and minima in the response of an observing instrument. (From « Memoirs

- and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 82, pp. 96-113). Manchester, 1938. 8°.
- BÜNEMANN OSCAR. — On the stability of a certain subharmonic oscillation. (From «Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 82, pagine 67-78). Manchester, 1938. 8°.
- CAPPARONI PIETRO. — Luigi Galvani (1737-1798). Discorso commemorativo per le onoranze bolognesi nel bicentenario della nascita, ottobre 1937. Terni, 1937. 8°, pp. 1-10.
- CAPRA F. — Sulla presenza in Libia di *Trinervitermes tripolitanus* Sjöst e *Trinervius* Ramb. (Isoptera). (Estr. dal « Bollettino della Società Entomologica Italiana ». Vol. LXX, p. 155) Genova, 1938. 8°.
- CAPRA F. — Una nuova Arcyptera delle Alpi Occidentali e sulla Ramburiella turcomana (F.-W.) (*Orth. Acrid.*) (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LX, pp. 104-110). Genova, 1938. 8°.
- CARTAN ELIE. — Les spineurs de l'espace a trois dimensions. (Leçons sur la théorie des spineurs. To. IX). Paris, Editeurs Hermann et C.<sup>ie</sup> 1938. 8°, pp. 1-98.
- CARTAN ELIE. — Les spineurs de l'espace a  $n > 3$  dimensions. Les spineurs en géometrie Riemannienne. (Leçons sur la théorie des spineurs. To. XI). Paris, Editeurs Hermann et C.<sup>ie</sup> 1938. 8°, pagine 1-96.
- CAUCHY AUGUSTIN. — Oeuvres complètes. Serie II, to. XIV. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1938. 4°, pp. 1-470.
- CHOU IO. — Ridescrizione dell'*Aspidiotus destructor* Sign. (Homoptera, Coccidae). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Ist. Superiore Agrario di Portici ». Vol. XXX, pp. 240-249). Spoleto, 1938. 8°.
- CIOLI RINALDO. — Artropatie e meccanismo di azione della « Cura Arnaldi ». Roma, 1938. 8°, pp. 1-80.
- CLAOUÉ CH. — Oreille interne. Étude anatomo-pathologique et clinique, technique histologique et expérimentale. Edition II. Paris, 1938. 8°, pp. 1-X, 1-227.
- CLARK G. L. — Vedi EDDINGTON ARTHUR. Commission Internationale de l'Éclairage en succession à la commission internationale de photométrie. Nouvième session, Berlin et Karlsruhe Juillet 1935. Recueil des travaux et compte rendu des séances, 1931-1935. Cambridge, 1932, 1937. 8°, pp. 1-693, 1-679.
- DALY BURGH. — A broncho-constrictor action of adrenaline following injections of pituitrin, pitocin or pitressin in isolated perfused lungs. (From the « Proceedings of the Physiological Society ». Vol. 89). S. I. 1937. 8°, pp. 1-2.
- DALY BURGH. — Blood perfusion pump and respiratory pump suitable for small laboratory animals. (Reprinted from the « Journal of Scientific Instruments ». Vol. XIV, n. 8, pagine 275-281). Edinburgh, 1938. 8°.
- DALY BURGH. — Sensory receptors in the pulmonary vascular bed. (Reprinted from the « Quarterly Journal of Experimental Physiology ». Volume XXVII, pp. 123-146). S. I. 1938. 8°.
- DALY BURGH. — The pulmonary arterial pressure in the unanaesthetized dog. (From the « Proceedings of the Physiological Society ». Vol. 91, pp. 2-3). S. I. 1938. 8°.
- DARWIN C. G. — The Attainment of Low Temperatures (From «Memoirs and Proceedings of the Manchester Library and Philosophical Society ». Vol. 82, pp. 51-66). Manchester, 1938. 8°.
- DASS BANESVAR. — The Works of Benoy Sarkar. Educational, Culture historical Economic and Sociological. Calcutta, 1938. 8°, pp. 1-14.

- DE BEAUX OSCAR. — Relazione sull'attività del Museo Civico di Storia Naturale « G. Doria » durante l'anno 1937. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LX). Genova, 1938. 8°, pp. I-XXIV.
- DERENZINI T. — Vedi BONATTI S.
- DEUTSCH ADAM and EGGLETON PHILIP. — XXVII. The use of sodium sulphate for the preparation of concentrated proteinfree tissue extracts. (From the « Biochemical Journal ». Vol. XXXII, n. 1, pp. 203-207). Edinburgh, 1937. 8°.
- DOBELL CLIFFORD. — Dr. O. Uplavici (1887-1938). (From « Parasitology ». Vol. XXX, pp. 239-241). London, 1938. 8°.
- DOBELL CLIFFORD. — Researches on the intestinal protozoa of monkeys and man. IX The life-history of *Entamoeba coli*, with special reference to metacystic development. (From « Parasitology ». Vol. XXX, pp. 195-238). Cambridge, 1938. 8°.
- EDDINGTON ARTHUR and CLARK G. L. — The problem of *n* bodies in general relativity theory. (Reprinted from « Proceedings of the Royal Society of London ». Serie A, n. 927. Vol. 166, pp. 465-475). London, 1938. 8°.
- EDWARDS D. L. — Vedi WILLIAMS E. GR.
- EGGLETON GRACE and EGGLETON PHILIP. — Distribution of chloride in frog's skeletal muscle immersed in saline solution. (Reprinted from the « Journal of Physiology ». Vol. 90, n. 2, pp. 167-182). S. I. 1937. 8°.
- EGGLETON PHILIP. — Vedi DEUTSCH ADAM.
- FERRARI GUIDO. — Acqua e agricoltura. Lucca, 1938. 8°, pp. 1-43.
- FERRARIS DOMENICO. — I sili economici albesi e gli altri tipi di sili a chiusura ermetica. (Società Coltura Propaganda Agraria). Torino, 1938. 8°, pp. 1-27.
- FRASER E. M. — Robert Owen in Manchester, 1787-1800. (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Vol. 82, pp. 29-41). Manchester, 1938. 8°.
- GAGE A. T. — A history of the Linnean Society of London. London, 1938. 8°, pp. 1-175.
- GALVANI LUIGI. — Celebrazione del secondo Centenario della nascita di L. Galvani. Bologna, 18-21 ottobre 1937-XV. I. Rendiconto Generale. II. Atti del Congresso della Società Italiana di Fisica. III. Atti del terzo Congresso dei nuclei italiani di radiobiologia. IV. Atti del convegno straordinario della Società Italiana di biologia sperimentale. Bologna, 1938. 8°, pp. 1-156, 1-286, 1-275, 1-158.
- GAPOSCHKIN SERGEI I. — A study of the absolute dimensions of eclipsing variables. (Reprinted from « Proceedings of the American Society ». Vol. 79, pp. 327-340). S. I. 1938. 8°.
- GIGLIOLI GUIDO RENZO. — L'erosione del terreno agrario nei tropici. (Relazioni e monografie agrario-coloniale. N. 49). Firenze, 1938. 8°, pp. 1-94.
- GIORDANI SOIKA A. — La specie del sottogenere *Nortovia* Sauss. (Hym. Vespidae). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LX, pp. 111-116). Genova, 1938. 8°.
- GOLDBERG LEO. — Vedi MENZEL DONALD.
- GRANDORI REMO. — L'azione disinfestante della calciocianamide contro la mosca domestica sperimentalmente dimostrata. (Estr. dal « Bollettino di Zoologia Agraria e Bachicoltura ». Vol. VIII). Torino, 1938. 8°, pp. 1-20.
- GREENSTEIN JESSE L. — A determination of selective absorption based on the spectrophotometry of reddened B stars. (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Vol. 87, pp. 151-175). S. I. 1938. 8°.
- HAYAMI SÔTIRÔ. — Hydrological Studies on the Yontze River, China. (Separate of the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section I, vol. I, pp. 175-198). Shanghai, 1938. 8°.



- HUGE HIDEOMI. — Early Behavior of Embryos of an Ovoviviparous Fish, *Lebistes reticulatus*. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 3, pagine 177-187). Shanghai, 1938. 8°.
- Istituto nazionale medico farmacologico « Serono ». — Contributo dei laboratori di fabbrica dell'Istituto nazionale medico farmacologico « Serono » alla ricerca scientifica. Roma, 1938. 4°, pp. 1-14.
- JACCHIA L. — Osservazioni meteorologiche dell'annata 1937. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Classe di scienze fisiche ». Ser. IX, to. V, 1937-38). Bologna, 1938. 4°, pp. 1-11.
- JANNONE GIUSEPPE. — Aspetti bio-morfologici e somatometrici del problema delle fasi nel *Dociostaurus maroccanus Thunb.* in Italia e fuori, con particolare riguardo alla provincia di Napoli. (Estratto dal « Bollettino del R. Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici ». Vol. I, pp. 261-327). Portici, 1938. 8°.
- JANNONE GIUSEPPE. — Contributi alla conoscenza dell'ortotterofauna italiana. II. Ricerche sulla distribuzione in Italia della *Tylopsis liliifolia* (FAB.), *Phaneroptera quadripunctata* BRUM, e *Ph. falcata* (PODA). (Estr. dal « Bollettino della Società Entomologica Italiana ». Vol. LXX, pp. 142-155). Genova, 1938. 8°.
- JOHNSON T. — A Fruiting *Sassafras* from N. E. Ireland. (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Volume 82, pp. 43-47). Manchester, 1938. 8°.
- JOHNSTON ALAN. — Vedi McMICHAEL JOHN.
- KOPAL ZDENEK. — On the Form of rotating-gas configurations. II. Configurations possessing a reversal of the Density gradient. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 98, pages 589-597). Edinburg, 1938. 8°.
- KOPAL ZDENEK. — On the motion of the apsidal line in close binary Systems. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 98, pp. 448-458). Edimburgh, 1938. 8°.
- KROOK MAX. — A new soluble case of the equation of transfer for a line frequency. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 98, pp. 477-482). Edinburg, 1938. 8°.
- LANG ERNEST F. — The Old Lancashire Steel Company. (From « Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society ». Volume 82, pp. 79-93). Manchester, 1938. 8°.
- LOMBARDI LUIGI. — Elettrotecnica. Enciclopedia scientifica monografica italiana del XX secolo. Serie I, n. 2. Verona, 1938. 8°, pp. 1-268.
- LONGO B. — Ancora sul germoglio di opuntia sviluppatosi in ambiente umido. (Estr. dal « Boll. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». T. XIV, pp. 49-50). Napoli, 1938. 8°.
- LONGO LUIGI. — Influenza di alcune sostanze sulla cristallizzazione del clo-rammonio di formazione vulcanica. (Estr. dal « Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società Reale di Napoli ». Vol. VIII, ser. 4ª). Napoli, 1938. 8°. pp. 1-11.
- LORIA GINO. — Contributi dati dall'Italia alle matematiche pure, dai tempi più remoti ai giorni nostri. (Extras din « Mathematica ». Vol. XIV, pagine 155-179). Chy, 1938. 8°.
- LORIA GINO. — Nel secondo centenario della nascita di G. L. Lagrange (1736-1936). (Reprinted from « Isis ». Vol. XXVIII, 2 pp. 365-375). Bruges, 1938. 8°.
- LUCCHESI ELIO. — Contributi alla conoscenza dei lepidotteri del melo. I. *Cydia pomonella* L. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto

- superiore agrario di Portici». Volume XXX, pp. 321-369). Spoleto, 1938. 8°.
- LUMIÈRE AUGUSTO. — Quelques travaux complémentaires relatifs à la propagation de la tuberculose. Fascicules IV, V, VI. Lyon, 1934, 1937, 1938. 8°, pp. 1-29, 1-169, 1-154.
- LUPO VINCENZO. — Revisione delle cocciniglie italiane. II. (Howardia, Adiscodiaspis, Chionaspis, Pinnaspis, Fiorinia, Kuwanaspis). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Volume XXX, pp. 255-322). Spoleto, 1938. 8°.
- LYTLETON RAYMOND A. — On the origin of the Planets. (Reprinted from the « Monthly Notices of the R. Astronomical Society ». Vol. 98, pp. 536-543). Edinburgh, 1938. 8°.
- MARACONEANU STÉPHANIE. — Répercussion des phénomènes radioactifs dans la nature, pluie artificielle. Le danger de la radioactivité. Bucarest, 1938. 8°, pp. 1-8.
- MASI L. — Imenotteri calcididi. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Volume LVIII, pp. 207-214). Genova, 1938. 8°.
- MCMICHAEL JOHN. — The oxygen supply of the liver. (Reprinted from the « Quarterly Journal of Experimental Physiology ». Vol. XXVII, pp. 73-87). Edinburgh, 1938. 8°.
- MCMICHAEL JOHN and ALAN JOHNSTON. — Postural changes in cardiac output and respiration in man. (Reprinted from the « Quarterly Journal of Experimental Physiology ». Volume XXVII, pp. 55-72). Edinburgh, 1938. 8°.
- MENZEL DONALD, BAKER JAMES and GOLDBERG LEO. — Equivalent widths and the temperature of the solar reversing layer. (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Vol. 87, pp. 81-101). S. l. 1938. 8°.
- MINGOIA QUINTINO. — Sintesi di composti pirrolici ed indolici mediante impiego di magnesilderivati. (Estr. dal « Bollettino Chimico Farmaceutico ». Giugno, 1938). Milano, 1938. 8°, pp. 1-16.
- MORIYAMA HIDEO. — Further Studies on the Reversible Inactivation of Vaccinia-Virus-Protein by Acid. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 3, pp. 217-229). Shanghai, 1938. 8°.
- MORIYAMA HIDEO. — The Influences of Inorganic Salts upon Vaccinia-Virus-Protein. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 3, pp. 199-216). Shanghai, 1938. 8°.
- MORIYAMA HIDEO. — The Particle Size of Vaccinia-Virus-Protein. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 3, pp. 239-250). Shanghai, 1938. 8°.
- MORIYAMA HIDEO and OHASHI SHUNKICHI. — Studies on Reversible Inactivation of Phage Protein (Separate of the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 3, pp. 231-237). Shanghai, 1938. 8°.
- NISHIMURA HARNO. — On the Types of Cholera of Shanghai, Epidemic of 1937. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 3, pp. 251-268). Shanghai, 1938. 8°.
- NOBILE VITTORIO. — Preliminari per una necessaria revisione della teoria dell'aberrazione amuca. I Fondamenti teorici del problema. (Estr. da « Acta Pont. Academiae Scientiarum ». Anno II, vol. II, n. 4, pp. 29-44). Roma, 1938. 8°.
- OHASHI SHUNKICHI. — On the Influences of Inorganic Salts upon Phage Protein. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 3°, pp. 279-316). Shanghai, 1938. 8°.
- OHASHI SHUNKICHI. — Poisonous Character and Antigenicity of the Bacterial Minute-Body-Forming Protein. (Separate from the « Journal of the

- Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 3, pp. 187-197). Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — Diptera Sinica. Cyrtidae (Acroceridae). I On some cyrtid flies from Eastern China and a new species from Formosa (Entomological Report, n. 11). (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section III, vol. 4°, page 33-36). Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — Diptera Sinica. Muscidae-Eginiinae. I. A new Eginiid fly from Eastern China (Entomological Report, n. 6). (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. 4, page 15-18). Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — Diptera Sinica. Muscidae-Muscinae I On Some muscid flies from Eastern China (Entomological Report, n. 3). (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section III, vol. 4°, page 1-14). Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — Diptera Sinica. Muscidae-Muscinae. II. A new murcoid fly from South China (Entomological Report, n. 10). (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section III, vol. 4°, page 31-32). Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — Diptera Sinica. Muscidae-Phaoniinae. I. Notes on some flies of Genus *Fannia* from Eastern China. (Entomological Report, n. 7). (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section III, vol. 4°, pp. 19-22). Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — Diptera Sinica Rhachiceridae I A new Rhachicerid Fly from Eastern China (Entomological Report, n. 13). (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section III, vol. 4°, page 63-65. Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — Diptera Sinica. Stratiomyiidae. I. On Some Stratiomyiid flies from Eastern China (Entomological, Report n. 12). (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section III, vol. 4°, page 37-61). Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — Contributiones et cognitionem insectorum Asiae Orientales I, II. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section III, vol. 4°, pp. 23-29). Shanghai, 1938. 8°.
- ÔUCHI YOSHIO. — 1936 Supplements to Bibliographical Introduction to the Study of Chinese Insectes. (Separate of the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section III, vol. 3, pp. 233-327). Shanghai, 1938. 8°.
- PALMA PASQUALE. — Primo contributo allo studio dei Lamellicorni fitofagi, *Hybalus cornifrons* Brullé (Coleoptera: Scarabaeidae). (Estr. dal « Bollettino del R. Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici ». Vol. I, pp. 329-339). Portici, 1938. 8°.
- PARISI B. — Crostacei decapodi. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Volume LVIII, pp. 215-217). Genova, 1938. 8°.
- PROTTI GIACOMO. — L'opinione di un medico sopra i « Raggi mitogenetici ». (Estr. dalla Rivista: « Nuntius Radiologicus ». Anno VI, fasc. IV). Venezia, 1938. 8°, pp. 1-10.
- ROBERTI DOMENICO. — Contributi alla conoscenza degli Afidi d'Italia - I. I pemfigini del pioppo. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto Superiore agrario di Portici. Volume XXX, pp. 169-238). Spoleto, 1938. 8°.
- ROSSONI P. — La copiapite dell'isola del Giglio. (Estr. dai « Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XLV, n. 3). Pisa, 1936. 8°, pp. 1-5.
- ROSSONI F. — La laumontite di Val di Purga (Castellina Marittima). (Estr. da gli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XLIV). Pisa, 1935. 8°, pp. 1-9.
- ROSSONI PIERO. — Rocce diabasiche di Rosignano M. e Val di Purga e loro

- minerali geodici e filoniani. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali residente in Pisa ». Vol. XLVI). Pisa, 1936. 8°, pp. 1-14.
- RUSO ACHILLE. — Cenni sull'attività scientifica, didattica e accademica di Achille Russo dal 1891 al 1937. (Estr. dal volume in onore del prof. A. Russo). Catania, 1938. 4°, pp. 1-38.
- SAGASTUME CARLOS A. — Los estudios quimicos en la Universidad Nacional de La Plata. La Plata, 1937. 8°, pp. 1-31.
- SAKAI EIGO. — Vedi TOMITA TORU.
- SALVESTRONI PIETRO. — I dipping-tanks e la lotta contro gli ectoparassiti del bestiame nel Sud Africa e la profilassi e cura di varie malattie dagli stessi propagate o sostenute. (Relazioni e monografie agrario-coloniali, n. 47). Firenze, 1938. 8°, pp. 1-59.
- SCABARDI LIVIO. — Lo Zebù (Relazioni e monografie agrario coloniali. N. 42). Firenze, 1938. 8°, pp. I-IV, 1-144.
- SEDA KANTARO. — Über die Temperatur der ultrahohen Erdatmosphäre nach der Dissoziationstheorie. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section I, vol. I, pp. 163-174). Shanghai, 1938. 8°.
- SHAPLEY HARLOW. — A metagalactic density gradient. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XXIV, pp. 282-287). s. l. 1938. 8°.
- SHAPLEY HARLOW. — Note on the problem of the expanding universe. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Volume XXIV, pp. 148-154). S. l. 1938. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Agricoltura, autarchia agricola e insetti dannosi. (Estr. da « L'Autarchia alimentare ». Anno I, n. 1, pp. 9-11). s. l. 1938. 4°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Description of a New Myrmecophilous Lepisma (Thysanura) from India. (Reprinted from the « Records of the Indian Museum ». Vol. XL, part. II, pp. 143-145). Calcutta, 1938. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Descrizione di un nuovo genere di Margarodinae (Insecta, Coccidae) della Cina. (Estr. des « Notes d'Entomologie chinoise ». Volume V, fasc. 3, pp. 21-27. S. l. 1938. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Descrizione di uno straordinario Stafilinide (Insecta, Coleoptera) mirmecofilo. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Volume XXX, pp. 250-254). Spoleto, 1938. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Due nuovi generi deserticoli di Lepismatidae (Insecta, Thysanura). (Estr. dal « Bollettino del R. Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici ». Vol. I, pp. 340-353). Portici, 1938. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Primo contributo alla conoscenza dei Protura (Insecta) del Brasile e di Costa Rica. (In « Libro Jubilar prof. Travassos » Rio de Janeiro 1938, pp. 441-446). S. l. 1938. 8°.
- Sindacato Nazionale Fascista Chimici. L'Istituto Farmacologico Sironi e l'autarchia. (Estr. da « Il Chimico Italiano ». Anno V, 1938). Roma, 1938. 8°, pp. 1-4.
- STERNE T. E. — The secondary variation of 8 Scuti. (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Vol. 87, pp. 133-150). S. l. 1938. 8°.
- STRANEO S. L. — Pterostichini (Coleopt. Carabidae). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LVII, pp. 218-221). Genova, 1938. 8°.
- STRANEO S. L. — Studi sulle specie orientali del genere Caelostomus MacL. (Coleopt. Carabid.). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. LX). Genova, 1938. 8°, pp. 1-100.
- TAJANI FILIPPO. — Le comodità del viaggiare. S. l. 1938. 4°, pp. 1-62.
- TOMITA TORU and SAKAI EIGO. — Cenozoic Geology of the Huzina-Kimati District, Izumo Province, Japan. A



- contribution to the Igneous Geology of the East-Asiatic Province of Cenozoic Alkaline Rocks. (Separate from the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section II, volume II, pp. 147-204). Shanghai, 1938. 8°.
- TROTTER A. — Ricerche, osservazioni e divulgazioni fitopatologiche per la Campania ed il Mezzogiorno. (R. Osservatorio Regionale di Fitopatologia di Portici, Sezione di Patologia Vegetale). Napoli, 1938. 8°, pp. 1-72.
- VALENTE GIOACCHINO. — La mia teoria dei due raggi luminosi sulla visione operata con i due occhi. Napoli, 1938. 8°, pp. 1-14.
- VILLAT HENRI. — Mécanique des fluides. Edition II. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1938. 8°, pp. I-VII, 1-193.
- Vocabulaire electrotechnique international. Fascicule 50. Paris, 1938. 8°, pp. 1-311.
- WILLIAMS E. G. and EDWARDS D. L. — On the estimation of spectral type and luminosity in B - type stars. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 98, pp. 467-476). Edinburgh, 1938. 8°.
- WOOLLEY R. — A parabolic double-star orbit. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 98, pp. 380-383). Edinburgh, 1938. 8°.
- WOOLLEY R. — The contour of lines at the extreme limb of the sun. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 98). Edinburgh, 1938. 8°, pp. 1-20.

U. A.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Fascicolo del 19 novembre 1938 — Anno XVII*

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea.* — I. *Classificazione delle quasi-asintotiche.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. E. BOMPIANI.

#### 1. — OGGETTO DELLA RICERCA.

Sia dato un sistema di equazioni a derivate parziali lineari omogenee in una funzione incognita e di esso si consideri un gruppo di soluzioni (indipendenti) in numero superiore di almeno una unità a quello delle variabili indipendenti. Assunti i valori di quelle soluzioni (per un gruppo fissato di valori delle variabili indipendenti) come coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio proiettivo, il luogo di questi punti al variare delle variabili indipendenti, si dice una *varietà rappresentativa o integrale* del sistema dato.

Se dal gruppo considerato si passa ad un'altro gruppo di ugual numero di soluzioni ottenuto da quelle con combinazioni lineari omogenee a coefficienti costanti (e a determinante differente da zero) si sostituisce alla varietà integrale di prima un'altra ad essa omografica.

Fa parte integrante di questa rappresentazione la considerazione delle seguenti trasformazioni del sistema dato:

1) cambiamento delle linee parametriche sulla varietà, cioè trasformazioni delle variabili indipendenti in altre (con determinante funzionale

(1) Presentata nella seduta del 5 novembre 1938.

diverso da zero); 2) cambiamento del fattore di proporzionalità delle coordinate (che sarà in generale funzione del punto sulla varietà), cioè sostituzione della variabile dipendente con altra che differisca da essa per un fattore arbitrario ( $\neq 0$ ) funzione delle variabili indipendenti.

Queste trasformazioni operano non soltanto sul gruppo di soluzioni inizialmente scelto ma su *qualsiasi* gruppo di soluzioni (anche dipendente da funzioni arbitrarie). L'insieme delle proprietà invarianti di un *qualsiasi* gruppo di soluzioni, dipendenti quindi infine dal solo sistema differenziale dato, rispetto alle trasformazioni specificate è quella che, da tempo, ho chiamato *geometria proiettiva* del sistema dato di equazioni. In essa la dimensione dello spazio ambiente non ha in generale alcun senso (non è determinata, a meno che l'integral generale del sistema non dipenda che da un numero finito di costanti arbitrarie); unici elementi che conservano interesse, e rispetto ai quali devono esser enunciati i risultati, sono quegli spazi osculatori alla varietà divenuti ormai d'uso generale (per la ragione ora detta) negli studi di geometria proiettivo-differenziale.

Ho insistito più volte su questo ordine di idee.

Appartengono all'indirizzo ora accennato: la teoria dell'equazione di Laplace (equazione differenziale lineare del 2° ordine di tipo non parabolico in due variabili indipendenti) e delle sue trasformazioni, cioè la teoria di un doppio sistema coniugato di una superficie indipendentemente dallo spazio d'immersione di questa <sup>(1)</sup>; la teoria delle quasi asintotiche (sopra una superficie o varietà) <sup>(2)</sup>; la teoria dei sistemi coniugati di specie superiore <sup>(3)</sup>.

Già nei primi lavori sulle quasi-asintotiche ebbi occasione di notare che accanto a quelle caratterizzate da due indici,  $\gamma_{r,s}$  (di cui il primo dà l'ordine dell'intorno del punto sulla varietà e il secondo l'ordine dell'intorno del punto sulla curva che hanno fra loro una particolare relazione proiettiva mentre non ne hanno gli intorni di ordine inferiore), e di cui facevo uso, si presentavano altre curve, o sistemi di curve, proiettivamente caratterizzati sulla superficie o varietà: e che ad individuare questi (cioè a definirne le particolarità proiettive) sarebbero occorsi più indici. Non credetti

(1) Si veda un'esposizione di questa, p. es., in G. TZITZEICA, *Géométrie différentielle projective des réseaux* (Bucarest, 1924).

(2) Per l'introduzione di questa nozione, cfr. le mie Note: *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi* («Proceedings of the V<sup>th</sup> International Congress of Mathematicians», Cambridge, 1912); *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* («Atti R. Acc. delle Scienze di Torino», vol. XLVIII, 1913); *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* («Rend. Circ. Mat. di Palermo», to. XXXVII, 1913); *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica* («Atti R. Acc. delle Scienze di Torino», vol. XLIX, 1913-14. Le quasi-asintotiche sono state poi utilizzate da me e da altri (TERRACINI, VITALI, BORTOLOTTI, VILLA, BUZANO, BOGDAN) in molti lavori successivi.

(3) Cfr. la mia Nota: *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi* («Rend. Circ. Matem. di Palermo», to. XLVI, 1922); poi lavori di E. BORTOLOTTI e B. SEGRE.

opportuno, allora, poichè non era strettamente necessario, andar oltre questo rilievo. Analogamente dicasi per i sistemi coniugati di specie superiore (o quasi-coniugati).

Che le quasi-asintotiche e i sistemi quasi-coniugati fossero uno strumento essenziale per lo studio delle proprietà proiettivo-differenziali è stato poi provato da numerosi lavori di altri e miei; essi si presentano di necessità anche in problemi metrici, p. es. nelle deformazioni, o geometrie riemanniane, di specie superiore.

Anzi in queste, come in altre ricerche, si presentano proprio quei sistemi non caratterizzabili con due soli indici e proprio da questo fatto alcuni teoremi traggono il loro rilievo: in tali casi ho dovuto esplicitamente, e caso per caso, enunciare le proprietà caratteristiche del sistema in esame.

Dato ciò, e in vista di ulteriori risultati generali in cui l'enunciazione caso per caso diverrebbe troppo prolissa, ritengo opportuno dare quella sistemazione che, all'inizio, mi sarebbe parsa prematura o sovrabbondante; limitandomi anche questa volta a quanto mi occorre: cioè al caso di *una* equazione (differenziale lineare d'ordine  $n$ ) in *due* variabili indipendenti.

Questa può definire sulla superficie o un sistema di quasi-asintotiche o un sistema quasi-coniugato. Nel primo caso la struttura proiettiva è definita da un certo numero  $p$  di coppie di numeri (interi positivi o nulli) che sono altrettanti invarianti proiettivi dell'equazione. Ad eccezione di un caso, che si caratterizza pienamente in base ai numeri invarianti ora detti (e di cui quello delle ordinarie asymptotiche è un primo esempio), l'equazione data definisce, oltre al sistema di quasi-asintotiche, uno o più sistemi invarianti di linee che chiamo associati (al sistema di quasi-asintotiche) che si distinguono con due indici (anch'essi ricavabili dalle  $p$  coppie predette). La scelta delle linee quasi-asintotiche, e delle linee di uno dei sistemi associati (quando uno ne esista) come linee parametriche attribuisce all'equazione una forma invariante ridotta: e di queste ne esistono tante quante sono le curve dei sistemi associati distinte passanti per un punto generico della superficie.

Anche nel caso di sistemi quasi-coniugati si riesce mediante un certo numero  $p$  di coppie di numeri (invarianti proiettivi) a caratterizzare la struttura dell'equazione: e si trovano in generale più forme ridotte in relazione alle particolarità che presentano le curve del sistema quasi-coniugato.

Le proprietà qui discusse sono fondamentali, ma anche le più semplici che possono rilevarsi: esse sono ben lungi dall'esaurire una teoria invariante dell'equazione. Ma era anzitutto necessario porre in luce i sistemi di curve (o tessuti) invarianti definiti dall'equazione: un'ulteriore approfondimento deve condurre a servirsi della geometria dei tessuti o topologia differenziale di W. Blaschke, di cui si prevede qui una brillante applicazione.

Anche una teoria geometrica delle trasformazioni dell'equazione data deve riferirsi a quei sistemi invarianti; ad essa, come alla teoria dei sistemi quasi-coniugati, intendo dedicare altre Note.

## 2. - TRASFORMAZIONE DELL'EQUAZIONE. EQUAZIONE CARATTERISTICA.

Sia data l'equazione differenziale lineare d'ordine  $n$  in  $x(u, v)$ :

$$(2.1) \quad a_{n,0} x_{n,0} + \binom{n}{1} a_{n-1,1} x_{n-1,1} + \dots + a_{0,n} x_{0,n} + \dots = 0$$

ove  $x_{p,q} = \frac{\partial^{p+q} x}{\partial u^p \partial v^q}$ ; i coefficienti sono pure (in generale) funzioni di  $u, v$ .

Per brevità la derivata  $x_{p,q}$  s'indicherà con  $p, q$  e quando occorrerà scriverne alcune di seguito si separeranno con punto e virgola; quando della equazione si voglia tener presente solo il legame lineare fra le derivate effettivamente esistenti in essa, ma si prescinda dai coefficienti, si scriveranno i simboli di quelle fra parentesi quadre seguite dal segno  $= 0$ ; quando si vorrà indicare una combinazione lineare di  $x$  e delle sue derivate d'ordine  $\leq v$  si scriverà in parentesi  $S(v)$ : ciò perchè scelto un gruppo di soluzioni  $x^i$  al quale si faccia corrispondere un punto di una superficie in uno spazio proiettivo, esso e i « punti derivati » d'ordine  $\leq v$  individuano lo spazio  $v$ -osculatore,  $S(v)$ , nel punto alla superficie. Con queste convenzioni l'equazione precedente potrà scriversi

$$(2.2) \quad [S(n)] = 0 \text{ ovvero } [u, 0; n-1, 1; \dots; 1, n-1; 0, n; S(n-1)] = 0.$$

Assoggettiamo la (2.1) alle trasformazioni

$$(2.3) \quad \bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v); \quad x = \rho(u, v) \bar{x}$$

e prendiamo in esame il gruppo delle derivate d'ordine  $n$ , sia nell'equazione data che in quella trasformata.

Si ha

$$(2.4) \quad x_{p,q} = \rho \sum_{i=0}^{p+q} \bar{x}_{p+q-i,i} \partial \binom{p+q-i}{p, q} + \dots$$

ove i  $\dots$  indicano i termini nelle derivate d'ordine  $< p+q$  e il simbolo  $\partial \binom{p+q-i}{p, q}$  ha il significato seguente: è la somma di tutti i termini che si ottengono come prodotti di  $p+q$  derivate del 1° ordine di  $\bar{u}$  o di  $\bar{v}$  rispetto a  $u$  o  $v$  in modo che vi figurino  $p+q-i$  derivate di  $\bar{u}$  ed  $i$  di  $\bar{v}$  fatte complessivamente  $p$  volte rispetto ad  $u$  e  $q$  volte rispetto a  $v$ .

Dal gruppo di termini d'ordine  $n$ ,  $\sum_{q=0}^n \binom{n}{q} a_{n-q,q} x_{n-q,q}$  dell'equazione data si passa al gruppo di termini d'ordine  $n$  dell'equazione trasformata

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & \rho \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} a_{n-q,q} \sum_{i=0}^n \bar{x}_{n-i,i} \partial \binom{n-i}{n-q, q} = \\ & = \rho \sum_{i=0}^n \bar{x}_{n-i,i} \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} a_{n-q,q} \partial \binom{n-i}{n-q, q}. \end{aligned}$$

In particolare si potrà far sì che sia nullo il coefficiente di  $\bar{x}_{0,n}$  cioè che

$$(2.6) \quad \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} a_{n-q,q} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right)^{n-q} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^q = 0$$

e poichè sulle linee  $\bar{v} = \text{cost.}$  è  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} dv = 0$  bisognerà scegliere come  $\bar{v} = \text{cost.}$  le linee definite da

$$(2.7) \quad \sum_{q=0}^n (-1)^q \binom{n}{q} a_{n-q,q} du^q dv^{n-q} = 0.$$

Questa è notoriamente l'equazione caratteristica della (2.1).

Potranno accadere due casi:

1) o tutte le radici  $du/dv$  dell'equazione caratteristica coincidono (per qualsiasi coppia di valori di  $u, v$ ); e allora chiamando  $v$  la nuova variabile  $\bar{v}$  (cioè supposto già scelto come sistema di linee  $u$  quello definito da  $d\bar{v} = 0$ ) l'equazione è del tipo

$$[n, 0 \quad ; \quad S(n-1)] = 0$$

e si dirà che l'equazione individua un sistema di quasi-asintotiche (le linee  $u; dv = 0$ ) sopra una qualsiasi superficie rappresentativa dell'equazione;

2) oppure ciò non accade e si dirà che l'equazione individua un sistema coniugato o quasi-coniugato.

### 3. — QUASI-ASINTOTICHE. INDICI DI UNA QUASI-ASINTOTICA, LORO SIGNIFICATO GEOMETRICO.

Occupiamoci del primo caso.

Nell'equazione, fatta la scelta delle linee  $u$  che riduce i suoi termini d'ordine  $n$  all'unico  $x_{n,0}$ , potranno mancare alcune delle derivate d'ordine  $< n$ .

Notiamo che le trasformazioni da prendere ancora in esame sono le seguenti

$$(3.1) \quad \bar{u} = \bar{u}(u, v) \quad , \quad \bar{v} = \bar{v}(v) \quad ; \quad x = \rho(u, v) \bar{x}.$$

Ciò porta che se nell'equazione data v'è un termine con la derivata  $x_{p,q}$  in una sua trasformata generica vi sono certamente anche i termini  $\bar{x}_{p,q}$ ,  $\bar{x}_{p+1,q-1}$ , ...,  $\bar{x}_{p+q,0}$  (e ad introdurre questi termini bastano le prime due trasformazioni (3.1)) e inoltre tutti i termini in  $\bar{x}_{p',q'}$  con  $p' + q' < p + q$  e  $q' \leq q$  (che derivano dall'eseguire alcune delle  $p$  derivazioni rispetto ad  $u$  e delle  $q$  rispetto a  $v$  sul fattore  $\rho$  piuttosto che su  $\bar{x}$ ); cioè in totale tutti i termini  $\bar{x}_{p',q'}$  con  $p' + q' \leq p + q$  e  $q' \leq q$ .

Questa proprietà dell'equazione rispetto alle trasformazioni (3.1) si può mettere in vista con un diagramma costruito come segue.



Si assumano due semirette uscenti da un punto e formanti un angolo di  $45^\circ$  come semi-assi (positivi) di un sistema cartesiano; e assunta su uno di essi, che diciamo  $u$ , una unità di misura, assumiamo come unità di misura sull'altro  $v$  la precedente moltiplicata per  $\sqrt{2}$ . Rappresentiamo in questo sistema la derivata  $x_{p,q}$  col punto di coordinate  $p, q$ ; e ciò per tutte le derivate che figurano nell'equazione (diagramma dell'equazione). La proprietà rilevata equivale a questa: che se al diagramma appartiene un punto  $(p, q)$  vi appartengono tutti i punti (a coordinate intere) situati all'interno e sul contorno del trapezio limitato dai semiassi e dalla parallela e dalla perpendicolare all'asse  $u$  condotte per il punto  $(p, q)$ .

Notiamo anche, per il seguito, che i punti (a coordinate intere) appartenenti al triangolo (contorno incluso) limitato dai semiassi e dalla perpendicolare all'asse  $u$  per il punto  $(v, 0)$  sono rappresentativi delle derivate che determinano lo  $S(v)$  osculatore (nel punto  $x$  che si considera).

Consideriamo ora nell'equazione i termini di un determinato ordine  $h \leq n$ .

I loro punti rappresentativi, e quelli rappresentativi dei sistemi che in conseguenza delle trasformazioni (3.1) devono figurare nell'equazione, appartengono ad uno dei trapezi ora descritti (che può ridursi come casi estremi ad un triangolo del tipo pure descritto, o ad un segmento dell'asse  $u$ ); e questo trapezio è del tutto determinato dal vertice opposto all'origine che rappresenta la derivata d'ordine  $h$  effettivamente presente nell'equazione con il minimo ordine di derivazione rispetto ad  $u$  (e il massimo rispetto a  $v$ ).

Se si ripete questa operazione per tutti i valori di  $h$ , detti trapezi vengono a coprire un'area *a gradinata* limitata dai semiassi e da una spezzata con lati alternativamente paralleli e perpendicolari all'asse  $u$  che possiamo immaginare percorsa dal vertice più alto a sinistra (sull'asse  $v$ ) a quello più basso a destra (sull'asse  $u$ ); s'incontreranno alternativamente vertici *salienti* e rientranti della spezzata (il primo sull'asse  $v$ , è da considerarsi saliente se ci si muove da esso perpendicolarmente all'asse  $u$ ; l'ultimo, sull'asse  $u$ , è da considerarsi saliente poichè si giunge ad esso sull'asse  $u$ ). È ovvio che i vertici salienti della spezzata determinano tutta la configurazione, cioè il tipo o la struttura dell'equazione. Una notazione comoda per essa, quindi per il sistema di quasi-asintotiche  $\gamma$  da essa individuato, si avrà scrivendo le coordinate dei vertici salienti, nell'ordine che è stato fissato, su due linee (nella prima le coordinate  $u$  e nella seconda, in colonna, le coordinate  $v$ ) nel modo seguente:

$$\gamma \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_p \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_p \end{pmatrix}.$$

È ovvio che

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_p = n \quad \text{e} \quad r_1 > r_2 > \cdots > r_p = 0;$$

inoltre

$$s_1 + r_1 < s_2 + r_2 < \dots < s_p + r_p = n.$$

Che i numeri  $p, s_1, r_1, \dots, s_p, r_p$  siano invarianti proiettivi dell'equazione risulta chiaramente dal significato geometrico di questa, quando si sia provato che detti numeri permettono di enunciare geometricamente la proprietà espressa dall'equazione.

Sia  $(s_h, r_h)$  il vertice che determina il trapezio d'ordine  $h = s_h + r_h$ . Detto trapezio può immaginarsi descritto per traslazione parallela ad  $u$  di  $s_h$  unità del triangolo che ha due lati sui semiassi e il terzo che stacca su di essi i segmenti  $r_h$ . Questo triangolo rappresenta lo  $S(r_h)$  in  $x$ ; la traslazione parallela ad  $u$  indica che bisogna derivare questo  $S(r_h)$   $s_h$  volte rispetto ad  $u$ , cioè considerare gli  $S(r_h)$  uscenti dai punti di un elemento  $E_{s_h}$  della quasi-asintotica  $u$  passante per  $x$ . La proprietà espressa dall'equazione riguarda dunque la dimensione dell'ambiente a cui appartengono gli  $S(r_h)$  uscenti dai punti degli  $E_{s_h}$  di quasi-asintotica per  $h = 1, \dots, p$ . È presto visto <sup>(1)</sup> che tale dimensione è

$$\frac{r_1(r_1 + 3)}{2} + s_1 r_1 - r_1 + n - 1 + \sum_{i=1}^{p-1} [(s_{h+1} + r_{h+1}) - (s_h + r_h)] r_{h+1}$$

e non superiore di un'unità come avverrebbe per un  $E_{s_h}$  di qualsiasi altra curva della superficie.

P. es. nel caso delle ordinarie asintotiche definite da un'equazione  $[x_{20}, x_{10}, x_{01}, x] = 0$  si ha il simbolo  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; ciò vuol dire che bisogna considerare lo  $S(1)$  cioè il piano tangente in un punto e in questo punto lo  $S_2$  osculatore all'asintotica; il loro spazio congiungente dev'essere uno  $S_2$  ( $p = 2, s_1 = 0, r_1 = 1, n = 2$ ) cioè quei due piani coincidono.

Ad una quasi asintotica  $\gamma_{r,s}$ , determinata dall'equazione  $[x_{s,0}, S(r)] = 0$  conviene il simbolo  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & s \\ r & 0 \end{pmatrix}$ ; lo  $S(r)$  osculatore alla superficie in un punto e lo  $S_s$  osculatore ivi alla curva ( $s > r$ ) stanno in uno spazio di dimensione  $\frac{r(r+3)}{2} + s - r - 1$ .

Altro esempio:

Per i sistemi autocongiugati di specie  $v(2)$  definiti da un'equazione del tipo

$$[x, x_{10}, x_{01}, x_{20}, x_{11}, \dots, x_{v-1,0}, x_{v-2,1}, x_{v,0}, x_{v-1,1}, x_{v+1,0}] = 0$$

il cui simbolo è  $\gamma \begin{pmatrix} v-1 & v+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  si ha che i piani tangenti nei punti di un  $E_{v+1}$  di  $\gamma$  e lo  $S_{v+1}$  osculatore a  $\gamma$  (nel punto da cui  $E_{v-1}$  è spiccato) stanno in un  $S_{2v}$ .

(1) Basta contare i punti del diagramma dell'equazione e togliere dal loro numero due unità.

(2) Cfr. la mia Nota: *Sistemi coniugati* ecc. già citata.

Riassumiamo quanto s'è stabilito finora:

Data un'equazione differenziale lineare in due variabili indipendenti d'ordine  $n$  la cui equazione caratteristica sia a radici tutte coincidenti è possibile definire  $p$  coppie  $\left[ 2 \leq p \leq \left[ \frac{n}{2} \right] + 1 \right]$  di numeri invarianti proiettivi della equazione o del sistema  $\infty^1$  di quasi asintotiche  $\gamma$  da caratterizzarsi, per mezzo di quei numeri, con la notazione:

$$\gamma \left( \begin{matrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_p \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_p \end{matrix} \right)$$

ove  $s_1 < s_2 < \cdots < s_p = n$  ;  $r_1 + s_1 < r_2 + s_2 < \cdots < r_p + s_p = n$ . Essa esprime il fatto che considerati gli  $E_{s_h}$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ) di una tal curva per un punto e gli  $S(r_h)$  osculatori alla superficie nei punti di ciascun  $E_{s_h}$  tutti questi spazi stanno in uno spazio di dimensione

$$\frac{r_1(r_1 + 3)}{2} + s_1 r_1 - r_1 + n - 1 + \sum_{h=1}^{p-1} [(s_{h+1} + r_{h+1}) - (s_h + r_h)] r_{h+1}.$$

Assunte le quasi-asintotiche come linee  $u$  ( $dv = 0$ ), una notazione invariante per l'equazione differenziale è la seguente

$$\left[ S(r_1) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u} S(r_1), \dots, \frac{\partial^{s_1}}{\partial u^{s_1}} S(r_1) \quad , \right. \\ \left. \frac{\partial^{s_1+1}}{\partial u^{s_1+1}} S(r_2), \dots, \frac{\partial^{s_2}}{\partial u^{s_2}} S(r_2), \dots, \frac{\partial^n}{\partial u^n} \right] = 0$$

ove  $x$  è il punto per il quale sono costruiti quegli  $S(r_h)$ .

#### 4. CONFRONTO DI DUE QUASI-ASINTOTICHE.

Occorre alle volte confrontare il grado di generalità di due quasi-asintotiche  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$ . Se esse sono scelte del tutto a piacere il confronto non è possibile; ma lo è in alcuni casi. Supponiamo che sia

$$\gamma \left( \begin{matrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_j & s_{j+1} & \cdots & s_p \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_j & r_{j+1} & \cdots & r_p \end{matrix} \right)$$

e che si abbia  $s_{j+1} > s_j + 1$ . Inseriamo nel simbolo fra  $s_j$  e  $s_{j+1}$  tutte le unità mancanti e in corrispondenza agli indici inseriti in prima linea inseriamo nella seconda  $r_{j+1}$  (tante volte quante occorre) e ripetiamo questa operazione ogni volta che due  $s$  contigue differiscano di più di un'unità (1). Si

(1) Se  $s_1 > 0$  inseriamo pure in prima linea (a sinistra di  $s_1$ )  $0, 1, \dots, s_1 - 1$  e in seconda linea  $r_1$ .

ottiene un simbolo che diremo *sovrabbondante* che rappresenta curve con la stessa proprietà geometrica, perchè i punti corrispondenti alle nuove coppie figuravano già nel diagramma; queste nuove coppie si diranno *neutre* appunto perchè non alterano la situazione.

Sul simbolo sovrabbondante facciamo ora l'operazione seguente: passiamo una o più unità (quando ciò sia possibile) da un'indice della seconda linea all'indice corrispondente della prima (la loro somma rimane quindi invariata) e quest'operazione si faccia pure su più coppie di indici purchè nel simbolo risultante sia sempre rispettata la condizione che la successione degli indici della prima linea sia non decrescente e la somma degli indici di una colonna sia minore di quella della successiva. Dal simbolo ottenuto si tolgano le coppie neutre (se ve ne sono); si otterrà il simbolo di quasi-asintotiche  $\bar{\gamma}$  che diremo *particolari* rispetto alle  $\gamma$ . Geometricamente ciò equivale a dire che il diagramma delle  $\bar{\gamma}$  è contenuto nel diagramma delle  $\gamma$ ; i due hanno certo in comune i punti sull'asse  $u$ .

Esempio. Si consideri l'equazione  $[4,0; S(3)] = 0$  cui corrisponde il simbolo  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ . L'operazione descritta fornisce p. es. il simbolo  $\bar{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  o quello sovrabbondante  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  e da questo si passa a  $\bar{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  e da questo a  $\bar{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  equivalente a  $\bar{\gamma} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  che poteva ottenersi direttamente dal primo con trasferimento di due unità (necess. sulla prima colonna); il trasferimento di tre unità dà  $\bar{\gamma} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  cioè  $\bar{\gamma} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  e queste sono linee di  $S_3$ . Tutti questi sono casi particolari delle  $\gamma_{3,4}$ . È facile scrivere le relative equazioni.

Il confronto potrà farsi anche per quasi-asintotiche  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  di ordini  $n$  ed  $\bar{n}$  diversi purchè accada che il diagramma dell'una sia  $\gamma$ , contenga tutti i punti del diagramma dell'altra,  $\bar{\gamma}$ , che si dirà più particolare di  $\gamma$ .

Se ciò non accade si può definire sempre in modo unico un tipo di quasi-asintotiche  $\Gamma$  che sia il « minimo » comprendente come casi particolari  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$ . Dati i simboli di questi basterà formare un nuovo simbolo composto con le loro coppie (disposte in ordine crescente delle  $s$ ) e poi sopprimerle le coppie neutre per avere il simbolo di  $\Gamma$ .

P. es. dati  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\bar{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  si ha  $\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 12 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Matematica.** — *Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea.* — II. *Sistemi invarianti associati ad un sistema di quasi-asintotiche.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. E. BOMPIANI.

5. - SISTEMI ASSOCIATI D'ORDINE  $n - 1$   
AD UN SISTEMA DI QUASI-ASINTOTICHE  $\gamma_{n-1, n}$  ( $n > 2$ ).

Riprendiamo a considerare l'equazione differenziale d'ordine  $n$  che definisce un sistema  $\infty^1$  di quasi-asintotiche  $\gamma$  e queste siano, sulla superficie rappresentativa, le linee  $dv = 0$ , talchè, scrivendo per esteso i termini d'ordine  $n - 1$  l'equazione sia

$$(5.1) \quad x_{n,0} + \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{p} a_{n-1-p,p} x_{n-1-p,p} + \dots = 0$$

ove i  $\dots$  indicano termini d'ordine  $\leq n - 2$ .

Le trasformazioni rispetto alle quali va studiata l'equazione sono

$$(5.2) \quad \bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(v), \quad x = \rho(u, v) \bar{x}.$$

Osserviamo ora la formola di derivazione

$$(5.3) \quad \frac{\partial^{s+t} x}{\partial u^s \partial v^t} = \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^s \sum_0^t \binom{t}{j} \frac{\partial^{s+t} \bar{x}}{\partial \bar{u}^{s+t-j} \partial \bar{v}^j} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^{t-j} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^j + \dots$$

ove i puntini indicano termini contenenti derivate d'ordine  $< s + t$ .

Da essa segue intanto che il termine  $x_{n,0}$  dà per trasformazione termini in  $\bar{x}_{n,0}, \bar{x}_{n-1,0}, \dots, \bar{x}$  ma non dà mai origine a termini contenenti una o più derivazioni rispetto a  $v$  (da notare che i coefficienti di  $\bar{x}_{n-1,0}, \dots, \bar{x}$  contengono derivate di  $\rho$  rispetto ad  $u$ ). Dal gruppo dei termini d'ordine  $n - 1$  togliamo il termine in  $x_{n-1,0}$ ; il gruppo residuo

$$(5.4) \quad \sum_1^{n-1} \binom{n-1}{p} a_{n-1-p,p} x_{n-1-p,p}$$

(1) Presentata nella seduta del 5 novembre 1938.



dà luogo ai seguenti termini d'ordine  $n-1$  nell'equazione trasformata, tolto il termine in  $\bar{x}_{n-1,0}$ ,

$$(5.5) \quad \rho \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^{n-1} \bar{x}}{\partial \bar{u}^{n-1-j} \partial \bar{v}^j} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^j \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \binom{p}{j} a_{n-1-p,p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^{n-1-p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^{p-j}$$

sicchè il coefficiente di  $\bar{x}_{n-1-j,j}$  per  $j \geq 1$ , a parte il fattore  $\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^j$ , è

$$(5.6) \quad \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \binom{p}{j} a_{n-1-p,p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^{n-1-p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^{p-j}.$$

Se si pone questo = 0, si ottiene una equazione atta in generale a definire le linee  $\bar{u} = \text{cost.}$ ,  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} dv = 0$ ,

$$(5.7) \quad \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \binom{p}{j} a_{n-1-p,p} (-1)^p du^{p-j} dv^{n-1-p} = 0$$

di grado  $n-1-j$  (omogenea in  $du/dv$ ). Precisamente questa equazione definisce le linee  $\bar{u} = \text{cost.}$  (diverse dalle  $\gamma, \bar{v} = \text{cost.}$ ) se in essa compaiano almeno due termini non nulli, quindi  $j \leq n-2$  e poichè  $j \geq 1$ ,  $n \geq 3$ . Dunque se  $n \geq 3$  è in generale possibile scegliere le linee  $\bar{v} (d\bar{u} = 0)$  in modo che nell'equazione trasformata manchi uno dei termini in

$$\bar{x}_{n-2,1}, \quad \bar{x}_{n-3,2}, \quad \dots, \quad \bar{x}_{1,n-2}.$$

È chiaro che alcuni di questi termini possono mancare nell'equazione data e in tutte le sue trasformate; per es., se nell'equazione data è  $a_{0,n-1} = a_{1,n-2} = 0$  mancano in tutte le trasformate le derivate  $x_{1,n-2}$  e  $x_{0,n-1}$ . Ma perchè si possa definire almeno uno dei sistemi precedenti occorre che esistano nell'equazione data almeno le derivate  $x_{n-2,1}$  e  $x_{n-3,2}$  (ciò perchè, com'è stato osservato al n. 3, se esiste nell'equazione il termine in  $x_{n-1-q,q}$  esistono anche in essa o in una sua trasformata generica tutti i termini con le derivate  $x_{n-1-q',q'}$  con  $q' \leq q$ ); allora la scelta indicata delle linee  $\bar{v}$  fa sparire il termine in  $\bar{x}_{n-2,1}$ .

Chiamiamo *sistema associato d'ordine  $n-1$  e d'indice  $j$*  (associato a quello delle quasi-asintotiche  $\gamma$ ) il sistema definito dalle equazioni (5.7). Per un punto generico della superficie passano  $n-j-1$  curve del sistema, le quali formano perciò in generale un  $(n-j-1)$ -tessuto: non è escluso però che alcune di queste curve coincidano fra loro e anche col sistema di quasi-asintotiche.

Facciamo subito un esempio. Sia data l'equazione

$$[12,0 ; 11,0 ; 10,1 ; 9,2 ; 8,3 ; 7,4 ; \dots] = 0,$$

ove si sono omessi i termini d'ordine  $< 11$ , cui corrisponde un sistema di quasi-asintotiche  $\gamma \begin{pmatrix} \cdots & 7 & 12 \\ \cdots & 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

I sistemi associati per  $j \geq 4$  svaniscono per l'annullarsi dei coefficienti  $a_{6,5} \cdots a_{0,11}$ . Si ha invece un sistema associato d'indice  $j = 1$  definito da

$$(a_{10,1} dv^3 - 10 a_{9,2} du dv^2 + 45 a_{8,3} du^2 dv - 120 a_{7,4} du^3) dv^7 = 0$$

che dà luogo ad un 3-tessuto (tolto  $dv^7 = 0$ ); scelte le linee  $v$  fra queste risulta  $a_{10,1} = 0$  (e può anche essere  $a_{9,2} = 0$ ,  $a_{8,3} = 0$ ).

Si ha poi un sistema associato d'indice  $j = 2$  definito da

$$(a_{2,2} dv^2 - 9 a_{8,3} du dv + 36 a_{7,4} du^2) dv^7 = 0$$

che dà luogo ad un 2-tessuto (e al sistema delle  $\gamma$  contato 7 volte) le cui curve potrebbero coincidere (se fosse  $9 a_{8,3}^2 = 16 a_{9,2} a_{7,4}$ ).

Preso un sistema di curve di questo tessuto come sistema di curve  $v$  ( $du = 0$ ) si ha  $a_{9,2} = 0$  (ed eventualmente anche  $a_{8,3} = 0$ ).

Si ha ancora un sistema associato d'indice  $j = 3$  definito da

$$dv^7 (a_{8,3} dv - 8 a_{7,4} du) = 0$$

che dà luogo (tolto  $dv^7 = 0$ ) ad un sistema semplice di curve; prese queste come curve  $v$  si ha  $a_{8,3} = 0$ .

Invece, data l'equazione

$$[3, 0 ; 2, 0 ; 1, 1 ; S(1)] = 0$$

non è possibile scegliere le linee  $v$  in modo che nell'equazione trasformata venga a mancare il termine  $\bar{x}_{1,1}$ .

Possiamo intanto raccogliere le osservazioni fatte nel seguente enunciato:

*Data un'equazione differenziale lineare omogenea d'ordine  $n \geq 3$  la cui equazione caratteristica sia a radici coincidenti e che rappresenti quindi un sistema di quasi-asintotiche  $\gamma \begin{pmatrix} \cdots & s_p - 1 & s_p \\ \cdots & r_{p-1} & r_p \end{pmatrix}$  con  $s_p = n$ ,  $r_p = 0$ ,  $s_{p-1} + r_{p-1} = n - 1$ , l'equazione stessa definisce sistemi di curve associati, d'ordine  $n - 1$ , al precedente caratterizzati da un indice  $j$ , con  $1 \leq j \leq r_{p-1} - 1$ . Il sistema d'indice  $j$  si compone (del sistema delle quasi-asintotiche contato  $s_{p-1}$  volte, che scarteremo dal sistema associato e) di un  $(n - j - 1 - s_{p-1})$ -tessuto le cui curve per un punto generico potranno in tutto o in parte coincidere.*

*Il sistema  $\infty^2$  delle quasi-asintotiche  $\gamma$  e un sistema  $\infty^1$  associato d'ordine  $n - 1$  e d'indice  $j$  (scelto nel relativo tessuto) sono tali che presi rispettivamente*

come sistema  $u$  ( $dv = 0$ ) e come sistema  $v$  ( $du = 0$ ) riducono l'equazione alla forma

$$(5.8) \quad [n, 0 \ ; \ n-1, 0; \dots; n-j, j-1; \\ n-j-2, j+1; \dots; n-1-r_{p-1}, r_{p-1}; \dots] = 0$$

in cui vi è un solo termine d'ordine  $n$  e manca la derivata  $(n-j-1, j)$  fra quelle d'ordine  $n-1$ ; i puntini dopo l'ultima derivata scritta indicano termini d'ordine  $\leq n-2$ .

L'unico caso in cui non esistono sistemi associati (d'ordine  $n-1$ ) si ha, come risulta da quanto precede, quando  $r_{p-1} = 1$  (quindi  $s_{p-1} = n-2$ ) cioè per una equazione che, scelte le  $\gamma \begin{pmatrix} \dots & n-2 & n \\ \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$  come linee  $u$ , sia della forma

$$(5.9) \quad [n, 0 \ ; \ n-1, 0 \ ; \ n-2, 1; \dots] = 0$$

ove i puntini indicano termini d'ordine  $\leq n-2$ ; o più in particolare

$$(5.10) \quad [n, 0 \ ; \ n-1, 0; \dots] = 0.$$

## 6. — INVARIANZA E SIGNIFICATO GEOMETRICO DEI SISTEMI ASSOCIATI D'ORDINE $n-1$ .

Riserviamoci di procedere (al n. 7) nella discussione del caso in cui manchino tutti i sistemi associati d'ordine  $n-1$ .

Il fatto essenziale che vogliamo porre in evidenza (e che non ha riscontro nel caso delle equazioni paraboliche del 2° ordine) è che i sistemi associati hanno carattere proiettivo, cioè sono invarianti per le trasformazioni definite in principio.

Ciò potrebbe vedersi analiticamente (osservando come operano le trasformazioni indicate sulle equazioni di definizione dei sistemi associati d'ordine  $n-1$ ); ma preferisco darne una prova geometrica. L'invarianza sarà dimostrata se sarà possibile esprimere l'equazione per mezzo di elementi proiettivi legati ai due sistemi di curve  $u$  (quasi-asintotiche) e  $v$  (uno dei sistemi associati).

Rappresentiamo in un diagramma cartesiano ortogonale ( $u, v$ ) (ad unità uguali) la derivata  $x_{p,q}$  col punto  $(p, q)$ ; e così facciamo per tutt'i termini della equazione data in cui la sola  $u$  sia variabile sulle quasi-asintotiche (o di una sua generica trasformata per le trasformazioni (5.2)). Questo diagramma dell'equazione (per le considerazioni già fatte al n. 3, salva la diversa scelta degli assi) è racchiudibile in un'area limitata dai semiassi positivi e da tratti alternativamente paralleli all'asse  $x$  e alla bisettrice esterna dell'angolo degli assi: uno di questi ultimi tratti arriva all'asse  $u$  (se si



nell'analogo individuato dalla colonna precedente (in cui si considerano gli  $S_{r_{p-1}-j+1}$  osculatori alle  $v$  nei punti dello stesso  $E_{s_{p-1}+j-1}$ ).

Sicchè uno schema atto a mettere in evidenza le proprietà geometriche del doppio sistema costituito dalle quasi-asintotiche  $\gamma \begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ r_1 \dots r_p \end{pmatrix}$ , linee  $u$ , e da un sistema associato d'ordine  $n-1$  e d'indice  $j$ , linee  $v$ , è il seguente

$$A_v^n \begin{pmatrix} s_1 & s_1 + 1 \dots s_2 & s_2 + 1 \dots s_{p-1} \dots s_{p-1} + j - 1 & s_{p-1} + j + 1 \dots s_p \\ r_1 & r_1 - 1 \dots r_2 & r_2 - 1 \dots r_{p-1} \dots r_{p-1} - j + 1 & r_{p-1} - j - 1 \dots r_p \end{pmatrix}$$

ove nella seconda linea si trovano tutti i numeri da  $r_1$  a zero, escluso  $r_{p-1}-j$  e il significato geometrico è il seguente: preso per ciascun  $s$  della prima riga un  $E_s$  di linea  $u$  e gli  $S_r$  (ove  $r$  è l'indice corrispondente ad  $s$ ) osculatori alle linee  $v$  per i suoi punti [oppure: un  $E_r$  di  $v$  e gli  $S_s$  osculatori alle  $u$  per i punti di  $E_r$ ] tutti questi spazi, quando  $s$  (quindi  $r$ ) assuma tutti i valori sopra indicati, appartengono ad uno spazio di dimensione:

$$\frac{r_1(r_1+3)}{2} + s_1 r_1 - r_1 + n - 2 + \sum_{i=1}^{p-1} [(s_{h+1} + r_{h+1}) - (s_h + r_h)] r_{h+1}.$$

Da questo significato geometrico risulta in particolare l'invarianza proiettiva dei sistemi associati. Sono ancora nuovi caratteri proiettivi dei sistemi associati, quindi dell'equazione, gli ordini di molteplicità delle curve costituenti un determinato sistema associato.

Risulta facilmente da quanto precede che:

Se un sistema di curve facente parte del sistema associato d'indice  $j$  è multiplo in questo d'ordine  $n-j-1-s_{p-1}-\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) esso fa parte anche dei sistemi associati d'indice  $j-\eta$  ( $\eta > 0$ ) ed in esso è multiplo d'ordine  $n-j-1-s_{p-1}-\varepsilon-\eta$ .

Per verificarlo basta assumere il sistema in parola come quello delle linee  $v$ .

## 7. - SISTEMI ASSOCIATI D'ORDINE $< n-1$ .

Si è visto che nel caso delle equazioni d'ordine  $n$  di tipo (5.9) o più in particolare (5.10) mancano sistemi associati d'ordine  $n-1$ . Cerchiamo se sia possibile, ricorrendo ora naturalmente ai termini d'ordine  $n-2$ , definire altri sistemi invarianti che permettano di semplificare ulteriormente l'equazione. Già la rappresentazione grafica dell'equazione lascia prevedere la possibilità di questa riduzione; comunque vediamo analiticamente cominciando dal tipo più particolare (5.10) che ora scriviamo:

$$(7.1) \quad x_{n,0} + a_{n-1,0} x_{n-1,0} + a_{n-2,0} x_{n-2,0} + \\ + \binom{n-2}{1} a_{n-3,1} x_{n-3,1} + \dots + a_{0,n-2} x_{0,n-2} + \dots = 0.$$



Osserviamo che le trasformazioni (5.2) influiscono sul termine  $\bar{x}_{n-2,0}$  dell'equazione trasformata anche con derivate di  $\rho$ ; invece  $x_{n,0}$  e  $x_{n-1,0}$  non danno contributo agli altri termini d'ordine  $n-2$  della trasformata. Il gruppo di termini

$$(7.2) \quad \sum_{p=1}^{n-2} \binom{n-2}{p} a_{n-2-p,p} x_{n-2-p,p}$$

dà luogo oltre che ad un termine in  $\bar{x}_{n-2,0}$ , che non prendiamo in considerazione, ai seguenti altri termini d'ordine  $n-2$ :

$$(7.3) \quad \rho \sum_{p=1}^{n-2} \binom{n-2}{p} a_{n-2-p,p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^{n-2-p} \sum_{j=1}^p \binom{p}{j} \bar{x}_{n-2-j,j} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^{p-j} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^j = \\ = \rho \sum_{j=1}^{n-2} \bar{x}_{n-2-j,j} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^j \sum_{p=j}^{n-2} \binom{n-2}{p} \binom{p}{j} a_{n-2-p,p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^{n-2-p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^{p-j},$$

sicchè il coefficiente di  $\bar{x}_{n-2-j,j}$ , a parte il fattore  $\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^j$ , è

$$(7.4) \quad \sum_{p=j}^{n-2} \binom{n-2}{p} \binom{p}{j} a_{n-2-p,p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^{n-2-p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^{p-j}.$$

Se si pone questo  $= 0$  si ottiene in generale un'equazione atta a definire come linee  $\bar{v}$  ( $d\bar{u} = 0$ ) quelle sulle quali, per  $j \geq 1$ , è

$$(7.5) \quad \sum_{p=j}^{n-2} \binom{n-2}{p} \binom{p}{j} a_{n-2-p,p} (-1)^p du^{p-j} dv^{n-2-p} = 0.$$

Analogamente nel caso dell'equazioni di tipo (5.9), che scriviamo

$$(7.6) \quad x_{n,0} + a_{n-1,0} x_{n-1,0} + (n-1) a_{n-2,1} x_{n-2,1} + \\ + \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n-2}{p} a_{n-2-p,p} x_{n-2-p,p} + \dots = 0.$$

Osserviamo che i termini  $x_{n,0}$ ,  $x_{n-1,0}$ ,  $x_{n-2,1}$  per effetto delle trasformazioni considerate (5.2), portano contributo sia ai termini con derivate pure rispetto ad  $u$ , sia a quelli nei quali entra una sola derivazione rispetto a  $v$ , ma non agli altri. Sicchè il gruppo di termini

$$(7.7) \quad \sum_{p=2}^{n-2} \binom{n-2}{p} a_{n-2-p,p} x_{n-2-p,p}$$

dà luogo al gruppo di termini analoghi (cioè esclusi anche qui quelli in  $\bar{x}_{n,0}$ ,  $\bar{x}_{n-1,0}$ ,  $\bar{x}_{n-2,1}$ ,  $\bar{x}_{n-2,0}$ )

$$\rho \sum_{j=2}^{n-2} \bar{x}_{n-2-j,j} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^j \sum_{p=j}^{n-2} \binom{n-2}{p} \binom{p}{j} a_{n-2-p,p} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^{p-j} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^{n-2-p}$$

e quindi si può in generale definire un sistema di curve  $\bar{v}$  ( $d\bar{u} = 0$ ) per il quale si annulli il coefficiente di  $\bar{x}_{n-2-j,j}$  con l'equazione (per  $j \geq 2$ )

$$(7.8) \quad \sum_{p=j}^{n-2} \binom{n-2}{p} \binom{p}{j} a_{n-2-p,p} (-1)^p du^{p-j} dv^{n-2-p} = 0.$$

Il sistema di curve definito per la (7.1) dalla (7.5) per  $1 \leq j \leq n-3$  e per la (7.6) dalla (7.8) per  $2 \leq j \leq n-3$  si dirà il *sistema associato d'ordine  $n-2$  e d'indice  $j$* .

Nel primo caso affinché esista almeno un sistema associato (a quello delle  $\gamma$ ) occorre e basta che in una trasformata generica dell'equazione (7.5) siano presenti almeno i termini in  $x_{n-3,1}$  e  $x_{n-4,2}$  (quindi intanto  $n \geq 4$ ) e allora si potranno sempre scegliere le curve  $\bar{v}$  in modo che manchi il termine in  $\bar{x}_{n-3,1}$ . Nel secondo caso occorre invece che nella (7.6) o in una sua trasformata siano presenti almeno i termini in  $x_{n-4,2}$  e  $x_{n-5,3}$  (quindi  $n \geq 5$ ) e allora si potrà far sparire il termine in  $\bar{x}_{n-4,2}$ .

Sicché gli unici casi nei quali mediante sistemi associati d'ordine  $n-2$  non sia possibile ridurre l'equazione sono i seguenti:

$$[n, 0; n-1, 0; n-2, 0; n-3, 1; S(n-3)] = 0$$

$$[n, 0; n-1, 0; n-2, 1; n-2, 0; n-3, 1; S(n-3)] = 0$$

o casi più particolari (cioè in cui manchino alcune delle derivate qui indicate; già il primo caso è particolare rispetto al secondo).

Se ci riferiamo alla notazione delle  $\gamma$  troviamo nei due casi

$$\gamma \left( \begin{smallmatrix} \cdots & n-3 & n \\ \cdots & 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) \quad \text{e} \quad \gamma \left( \begin{smallmatrix} \cdots & n-4 & n-2 & n \\ \cdots & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \right).$$

Si potrà in questi casi spingere la ricerca ai termini d'ordine  $n-3$ ; poichè mi sembra chiaro come debba procedersi enuncerò il risultato:

*Sia data un'equazione differenziale d'ordine  $n$  a caratteristiche coincidenti, che definisca cioè un sistema di quasi-asintotiche*

$$\gamma \left( \begin{smallmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_p \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_p \end{smallmatrix} \right) \quad s_p = n, \quad r_p = 0.$$

*Se i numeri  $r_i$  sono i seguenti*

$$r_p = 0, \quad r_{p-1} = 1, \dots, r_2 = p-2, \quad r_1 = p-1$$

*non si possono definire sistemi associati alle quasi-asintotiche che (scelte come linee  $u$ ) semplifichino ulteriormente l'equazione data.*

*Ciò è invece possibile in ogni altro caso.*

*Precisamente, se*

$$r_p = 0, \quad r_{p-1} = 1, \dots, r_{p-\varepsilon} = \varepsilon, \quad r_{p-\varepsilon-1} > \varepsilon + 1, \quad 0 \leq \varepsilon \leq p-2$$

esistono sistemi associati d'ordine  $s_{p-\varepsilon-1} + r_{p-\varepsilon-1}$ . Questi si distribuiscono in più sistemi in relazione ai valori di un indice intero variabile fra  $\varepsilon + 1$  e  $r_{p-\varepsilon-1} - 1$ ; sicchè:

esiste un sistema associato d'indice  $\varepsilon + 1$  costituente un  $(r_{p-\varepsilon-1} - \varepsilon - 1)$ -tessuto (le cui curve potranno coincidere in uno o più gruppi; gli ordini di molteplicità delle curve del tessuto sono pure invarianti proiettivi dell'equazione); preso un sistema semplice  $\infty^1$  di curve nel tessuto come linee  $v$  (e le  $\gamma$  come linee  $u$ ) manca nell'equazione il termine con la derivata  $(s_{p-\varepsilon-1} + r_{p-\varepsilon-1} - \varepsilon - 1, \varepsilon + 1)$ : esiste un sistema associato d'indice  $\varepsilon + 2$ , formante un  $(r_{p-\varepsilon-1} - \varepsilon - 2)$ -tessuto, atto ad eliminare la derivata  $(s_{p-\varepsilon-1} + r_{p-\varepsilon-1} - \varepsilon - 2, \varepsilon + 2)$ ; e così via fino ad avere un sistema associato d'indice  $r_{p-\varepsilon-1} - 1$  le cui curve formano un sistema semplice  $(1)$ -tessuto, atto ad eliminare la derivata  $(s_{p-\varepsilon-1} + 1, r_{p-\varepsilon-1} - 1)$ .

Tutti i sistemi associati d'ordine  $s_{p-\varepsilon-1} + r_{p-\varepsilon-1}$  sono proiettivamente invarianti: il numero delle curve distinte passanti per un punto generico della superficie così definite (quasi-asintotiche e sistemi associati) è

$$\leq \frac{1}{2} (r_{p-\varepsilon-1} - \varepsilon - 1) (r_{p-\varepsilon-1} - \varepsilon) + 1$$

e in ogni caso le molteplicità delle curve nei vari sistemi associati sono invarianti proiettivi numerici dell'equazione.

Quando una curva d'un sistema d'indice  $j$  è multipla secondo  $k$  essa appartiene al sistema d'indice  $j + 1$  con molteplicità  $k - 1$  e così di seguito.

Se il numero delle curve distinte invarianti per un punto è  $\geq 4$  si hanno invarianti proiettivi forniti da sole operazioni algebriche sui coefficienti dell'equazione.

Ricorrendo al diagramma cartesiano ortogonale dell'equazione si può enunciare il significato proiettivo dell'equazione ridotta assumendo come linee parametriche le quasi-asintotiche ( $dv = 0$ ) e quelle di un sistema associato ( $du = 0$ ) e dare uno schema a due serie di indici per essa contando i segmenti di varia lunghezza paralleli all'asse  $v$  con i quali si può ricoprire il diagramma.

Per es., l'equazione:

$$[9, 0; 8, 0; 7, 0; 6, 1; 6, 0; 5, 1; 4, 2; 5, 0; 4, 1; 3, 2; S(4)] = 0$$

che dà luogo ad un sistema di quasi-asintotiche  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  possiede un solo sistema associato del 4° ordine; qui  $r_4 = 0, r_3 = 1, r_2 = 2, r_1 = 4, \varepsilon = 2, \varepsilon + 1 = r_{p-\varepsilon-1} - 1 = 3$  quindi il sistema associato è d'indice 3 (e semplice) e scelto come quello delle linee  $v$  fa perdere all'equazione il termine in  $x_{1,3}$ .

Il significato geometrico dell'equazione ridotta è il seguente: lo  $S_4$  osculatore in un punto alla linea  $v$ , gli  $S_2$  osculatori alle  $v$  uscenti dai

punti di un  $E_4$  della  $u$  (per punto fissato), le tangenti alle  $u$  nei punti di un  $E_6$  della  $u$  e finalmente lo  $S_9$  osculatore alla  $u$  stanno in un spazio di dimensione 22. Per esprimere questo fatto si può usare il simbolo

$$A_v^u \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha gli stessi indici di quello delle  $\gamma$ , ma con significato diverso.

#### 8. — ALTRI SISTEMI ASSOCIATI.

Quanto è stato trovato fin qui sui sistemi associati si riferisce al primo salto (di più di un'unità) nella successione di indici  $r_p, r_{p-1} \dots$ . Non è naturalmente escluso che possa presentarsi nella stessa successione un altro salto (o più). Se si ha un salto passando da  $r_q$  ( $q < p$ ) a  $r_{q-1} > r_q + 1$  si potranno definire sistemi associati d'ordine  $s_{q-1} + r_{q-1}$ ; e questi potranno distinguersi mediante un indice  $j$  variabile da  $r_q + 1$  a  $r_{q-1} - 1$ . Il sistema associato d'ordine  $s_{q-1} + r_{q-1}$  e d'indice  $j$  è un  $(r_{q-1} - j)$ -tessuto (in generale, cioè del quale in particolare alcune curve per un punto generico potranno coincidere); scelto il sistema di linee  $v$  entro quello d'indice  $j$  (e le  $\gamma$  come  $u$ ) si fa sparire dall'equazione il termine con la derivata  $(s_{q-1} + r_{q-1} - j, j)$ .

Nel diagramma dell'equazione ciò equivale a togliere uno dei punti, che non siano i suoi estremi, di un segmento obliquo della spezzata limitante il diagramma.

Per es. data l'equazione  $[6, 0; 5, 0; 4, 1; 3, 2; S(4)] = 0$  che definisce un sistema di quasi-asintotiche  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  si hanno due salti nella successione delle  $r$ . In corrispondenza si ha: un sistema associato del 5° ordine e d'indice 1, che è un 1-tessuto, atto ad eliminare la derivata  $x_{4,1}$ ; un sistema associato del 4° ordine, d'indice 3, pure 1-tessuto, atto ad eliminare  $x_{1,3}$ . Questi due sistemi associati possono anche coincidere. Le proprietà geometriche relative ai tre casi sono espresse negli schemi

$$A_v^u \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_v^u \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_v^u \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ancora: l'equazione

$$[11, 0; 10, 0; 9, 0; 8, 1; 7, 2; 6, 3; 8, 0; 7, 1; 6, 2; 5, 3; S(7)] = 0$$

definisce un sistema di  $\gamma \begin{pmatrix} 0 & 6 & 11 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  e inoltre due sistemi associati d'ordine 9 (d'indici 1 e 2) atti a far sparire dall'equazione la derivata  $x_{8,1}$  o rispettivamente  $x_{7,2}$ ; e tre sistemi associati d'ordine 7 (d'indici 4, 5, 6) atti rispettivamente a far sparire una delle derivate  $x_{3,4}$ ,  $x_{2,5}$ ,  $x_{1,6}$ .

# MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche.*  
Nota II di M. VILLA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

6. Determiniamo le condizioni necessarie e sufficienti perchè  $V_k$  possegga  $\infty^8 E_2$  di  $\gamma_{s-2, s}$  (problema A)

$$2k - 1 \leq \delta \leq 3k - 2 \quad (s > 2).$$

$L'S(s-2)$  osculatore in un punto  $x(\tau_1, \dots, \tau_k)$  a  $V_k$  è lo spazio di  $x$  e di tutti i punti derivati d'ordine  $\leq s-2$ .

$L'S_s$  osculatore ad una curva di  $V_k$  in  $x$  è individuato dai punti  $x$ ,  $dx = \sum x_i d\tau_i$ ,  $d^2 x = \sum x_{i_1 i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} + \sum x_i d^2 \tau_i, \dots, d^{s-1} x = \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} + \dots, d^s x = \sum x_{i_1 i_2 \dots i_s} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_s} + s \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d^2 \tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} + \dots;$

gli indici  $i, i_1, i_2, \dots, i_s$  assumono in tutti i modi possibili i valori  $1, 2, \dots, k$ .

Affinchè  $L'S(s-2)$  osculatore e  $L'S_s$  precedenti abbiano uno spazio intersezione di dimensione  $> s-2$  (oppure  $L'S_s$  sia indeterminato) deve essere

$$(2) \quad \left| \begin{array}{c} S(s-2) \\ \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} \\ \sum x_{i_1 i_2 \dots i_s} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_s} + s \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d^2 \tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} \end{array} \right| = 0,$$

dove  $S(s-2)$  sta ad indicare le orizzontali costruite con le coordinate dei punti che lo determinano.

Perchè le (2) siano compatibili considerate come equazioni lineari nei differenziali  $d^2 \tau_{i_1}$ , deve essere

$$(3) \quad \left| \begin{array}{c} S(s-2) \\ \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \sum x_{i_2 i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \vdots \\ \sum x_{hi_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \sum x_{i_1 i_2 \dots i_s} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_s} \end{array} \right| = 0.$$

(1) Nella seduta del 5 novembre 1938.



Affinchè  $V_k$  possedga  $\infty^{\delta} E_2$  di  $\gamma_{s-2,s}$  esattamente (cioè  $\infty^{\delta-2k+1}$  esattamente, fissandone ad arbitrio un punto e la direzione in esso) ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-2$ ) è necessario e sufficiente che siano nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , le matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo  $\delta-2k+1$  delle ultime  $k+1$  orizzontali (e che non siano tutte nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , le matrici che si ottengono dalla

$$(4) \quad \begin{vmatrix} S(s-2) \\ \Sigma x_{1i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \Sigma x_{2i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \vdots \\ \Sigma x_{ki_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \end{vmatrix}$$

sopprimendo  $\delta-2k+1$  delle ultime  $k$  orizzontali).

Da queste condizioni segue, in particolare, che, per  $\delta=2k-1$ , la matrice (4) è  $\equiv 0$ , e, per  $\delta > 2k-1$ , sono tutte nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , le matrici che s'ottengono dalla (4) sopprimendo  $\delta-2k$  delle ultime  $k$  orizzontali mentre non sono tutte nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , quelle che si ottengono sopprimendo  $\delta-2k+1$  delle ultime  $k$  orizzontali.

7. Supponiamo  $s=3$ , cioè consideriamo le  $\gamma_{1,3}$ .

Alla matrice (4), in cui si sia posto  $s=3$ , si perviene anche in un'altra questione.

Com'è noto<sup>(1)</sup>, la varietà  $W$  luogo degli  $S_k$  tangenti ad una  $V_k$  ha, in generale, dimensione  $2k$ , ma può anche avere dimensione inferiore.

Se  $V_k$  è descritta dal punto  $x(\tau_1, \dots, \tau_k)$ , si trova, come si vedrà nel n. 8, che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè  $W$  abbia dimensione  $2k-l$  ( $0 < l \leq k$ ) è che siano tutte nulle, identicamente rispetto alle variabili  $v_i$ , le matrici che s'ottengono dalla

$$\begin{vmatrix} S(1) \\ \Sigma x_{1i} v_i \\ \Sigma x_{2i} v_i \\ \vdots \\ \Sigma x_{ki} v_i \end{vmatrix}$$

sopprimendo  $l-1$  dalle ultime  $k$  orizzontali (mentre non sono tutte nulle, identicamente rispetto alle  $v_i$ , quelle che si ottengono sopprimendo  $l$  delle ultime  $k$  orizzontali).

(1) BOMPIANI, N, p. 98.

Si ritrovano dunque le condizioni espresse alla fine del n. 6 (per  $s = 3$ ,  $l = \delta - 2k + 1$ ).

Segue:

Se una  $V_k$  ( $k > 1$ ) possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $2k - 1 \leq \delta \leq 3k - 2$ ), la varietà  $W$  formata dagli  $S_k$  tangenti ad essa ha esattamente dimensione

$$2k - (\delta - 2k + 1).$$

Su questo risultato s'impenna un metodo per la ricerca delle  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $\delta > 2k - 1$ ) (problema A), che ho già esposto nella mia Memoria lineare in corso di stampa, citata nella Nota I. Esso, sostanzialmente, consiste nello spezzare la ricerca in due tempi: 1° Ricercare tutte le  $V_k$  per cui la  $W$  relativa ha dimensione  $2k - (\delta - 2k + 1)$  (problema B); 2° Ricercare fra le  $V_k$  trovate quelle che posseggono  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ .

E l'interesse di ciò risiede principalmente nel fatto che è nota la via che si deve seguire per trovare le  $V_k$  per cui la  $W$  ha dimensione  $2k - l$ , almeno in casi concreti.

8. In vece della varietà  $W$ , luogo degli  $S_k$  tangenti a  $V_k$ , consideriamo, più in generale, la varietà  $W(m)$  luogo degli  $S(m)$  osculatori a  $V_k$  (manifestamente  $W(1) \equiv W$ ).

La varietà  $W(m)$  ha, come vedremo, in generale, dimensione

$$d = \frac{(m+1) \cdots (m+k)}{k!} + k - 1,$$

ma può anche avere dimensione inferiore.

Il problema di trovare le  $V_k$  per cui la  $W(m)$  relativa ha dimensione  $d - l$  ( $l > 0$ ) (problema B) per  $m > 1$  non è stato ancora studiato se si esclude un caso, per  $m = 2$ , esaminato dal Bompiani e di cui ci occuperemo più tardi (n. 9).

Orbene: la risoluzione di questo problema, che ha manifestamente interesse anche di per sé, e di cui s'è vista l'importanza per  $m = 1$  nel n. 7, può essere utile per il problema A, anche per  $m > 1$ , come ora vedremo.

L' $S(m)$  osculatore nel punto  $x$  alla  $V_k$  da esso descritta è individuato dai punti

$$x, x_{i_1}, x_{i_1 i_2}, \dots, x_{i_1 i_2 \dots i_m} \quad (i_1; i_2; \dots; i_m = 1; 2, \dots, k).$$

La varietà  $W(m)$ , luogo degli  $S(m)$  osculatori, è descritta dal punto

$$y = x + \sum_1^k \lambda_i x_i + \sum_{i_1, i_2}^k \mu_{i_1 i_2} x_{i_1 i_2} + \dots + \\ + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m}^k \nu_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

( $\mu_{i_1 i_2} = \mu_{i_2 i_1}$  e analogamente) al variare dei parametri

$$\lambda_i, \mu_{i_1 i_2}, \dots, \nu_{i_1 i_2 \dots i_m}, \tau_1, \dots, \tau_k.$$

Per avere la dimensione della varietà  $W(m)$  descritta dal punto  $y$  basta cercare la dimensione dello spazio ad essa tangente in  $y$ .

Esso è individuato dai punti

$$\begin{aligned} x, \quad x_{i_1}, x_{i_1 i_2}, \dots, x_{i_1 i_2 \dots i_m}, \quad \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m}^k \nu_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1 i_2 \dots i_m}, \dots \\ \dots, \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m}^k \nu_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{k i_1 i_2 \dots i_m}, \end{aligned}$$

cioè dall' $S(m)$  osculatore in  $x$  a  $V_k$  e dai  $k$  punti

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m}^k \nu_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1 i_2 \dots i_m}, \dots, \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m}^k \nu_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{k i_1 i_2 \dots i_m}.$$

Si conclude:

*In generale  $W(m)$  ha dimensione*

$$\frac{(m+1) \dots (m+k)}{k!} + k - 1.$$

Infatti l' $S(m)$  osculatore a una  $V_k$  ha in generale dimensione

$$\frac{(m+1) \dots (m+k)}{k!} - 1.$$

Questa dimensione si abbassa ovviamente quando l' $S(m)$  osculatore a  $V_k$  non è regolare. Più precisamente:

*Se l' $S(m)$  osculatore a  $V_k$ , in un punto generico, ha dimensione*

$$\rho \left( \rho \leq \frac{(m+1) \dots (m+k)}{k!} - 1 \right),$$

*$W(m)$  ha, in generale, dimensione*

$$D = \rho + k^{(1)}.$$

Si ha poi:

*Se l' $S(m)$  osculatore a  $V_k$ , in un punto generico, ha dimensione  $\rho$ , perchè  $W(m)$  abbia dimensione  $< D$  deve essere la matrice*

(1) Se si vuole che  $W(m-1)$  abbia dimensione ordinaria occorre supporre necessariamente  $\rho \geq \frac{m(m-1) \dots (m+k-1)}{k!} + k - 1$ . Se  $S(m)$  è regolare,  $W(m-1)$  ha dimensione ordinaria (e non vale necessariamente il viceversa).

$$(5) \quad \begin{array}{c} S(m) \\ \left| \begin{array}{ccc} \sum x_{i_1 i_1 \dots i_m} v_{i_1 \dots i_m} \\ \sum x_{i_2 i_1 \dots i_m} v_{i_1 \dots i_m} \\ \vdots \\ \sum x_{i_l i_1 \dots i_m} v_{i_1 \dots i_m} \end{array} \right| = 0, \end{array}$$

identicamente rispetto ai  $v_{i_1 i_2 \dots i_m}$ .

Più precisamente:

Se l' $S(m)$  osculatore generico a  $V_k$  ha dimensione  $\rho$ , condizione necessaria e sufficiente perchè  $W(m)$  abbia dimensione

$$D - l \quad (0 < l \leq k)$$

è che siano tutte nulle, identicamente rispetto ai  $v_{i_1 i_2 \dots i_m}$ , le matrici che si ottengono dalla (5) sopprimendo  $l - 1$  delle ultime  $k$  orizzontali (mentre non sono tutte nulle, identicamente rispetto ai  $v_{i_1 i_2 \dots i_m}$ , quelle che si ottengono sopprimendo  $l$  delle ultime  $k$  orizzontali).

Si osservi che, posto  $m = s - 2$ , le matrici (4), (5) - considerando rispettivamente i  $d\tau_i$  o le  $v_{i_1 \dots i_m}$  come variabili e le  $x_{j i_1 \dots i_m}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) come coefficienti - coincidono solo se  $s = 3$  (s'intende, ponendo inoltre  $v_{i_1} \equiv d\tau_i$ ), mentre non coincidono per  $s > 3$ .

È però evidente, per  $s > 3$ , che la (4) si ottiene dalla (5) vincolando fra loro le variabili  $v_{i_1 \dots i_{s-2}}$  ponendo

$$v_{i_1 \dots i_{s-2}} = d\tau_{i_1} \cdot d\tau_{i_2} \cdots d\tau_{i_{s-2}}.$$

Segue:

Per  $s = 3$ , posto  $l = \delta - 2k + 1$ , come s'è già visto nel n. 7, le condizioni per l'abbassarsi della dimensione di  $W (\equiv W(1))$  di  $\delta - 2k + 1$  unità coincidono con quelle della fine del n. 6, da ciò segue che affinché una  $V_k$  possedga  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  è necessario che  $W$  abbia dimensione  $2k - (\delta - 2k + 1)$ , e di qui il metodo esposto nel n. 7.

Posto  $m = s - 2, l = \delta - 2k + 1$ , per  $s > 3$ , si può dire che se sono verificate le condizioni per l'abbassarsi della dimensione  $D$  di  $W(s - 2)$  di  $\delta - 2k + 1$  unità sono verificate anche quelle, per gli  $E_2$  di  $\gamma_{s-2,s}$ , della fine del n. 6, relative alla (4).

Rimane tuttavia da vedere fino a che punto questa proposizione si possa invertire.

9. Applichiamo le conclusioni precedenti in un caso particolare notevole suggerito da un risultato già annunciato del Bompiani.

La  $W(2)$  di una  $V_k$  ha, in generale, dimensione  $\frac{k(k+5)}{2}$  (n. 8). Più precisamente, se  $V_k$  soddisfa a  $\nu$  equazioni di Laplace ( $\nu \geq 0$ ),  $W(2)$  ha, in generale, dimensione  $D = \frac{k(k+5)}{2} - \nu$  (n. 8).

Il Bompiani ha trovato <sup>(1)</sup> che se  $W(2)$  ha dimensione  $D - 1$  e se  $V_k$  rappresenta il minimo numero possibile di equazioni del terzo ordine <sup>(2)</sup>, queste equazioni debbono essere in numero di  $\frac{k(k+1)}{2}$  linearmente indipendenti e necessariamente a caratteristica <sup>(3)</sup>.

Supponiamo appunto che  $V_k$  soddisfi esattamente a  $\frac{k(k+1)}{2}$  equazioni del 3° ordine (lin. ind.) e inoltre supponiamo che alcune di queste equazioni possano considerarsi ottenute per derivazione da  $\nu$  equazioni del 2° ordine (lin. ind.) ( $\nu > 0$ ) componenti un sistema parabolico <sup>(4)</sup>. In questa ipotesi il Bompiani ha portato a termine la ricerca delle  $V_k$  per cui la  $W(2)$  ha dimensione  $D - 1$  (problema B), pervenendo al seguente risultato, che è quello a cui si alludeva:  $V_k$  si compone di  $\infty^{k-\nu}$  coni di prima specie aventi i loro vertici sopra un  $S_{k-\nu}$  ( $2 < \nu \leq k$ ) <sup>(5)</sup>.

Osserviamo subito che questa  $V_k$  giace sopra un cono  $C$  proiettante dallo  $S_{k-\nu}$  una  $V_{k-1}$  non soddisfacente ad equazioni del 3° ordine (il cui spazio ambiente è sghembo con l' $S_{k-\nu}$ ), ed è formata da  $\infty^{k-1}$  rette situate negli  $S_{k-\nu+1}$  di  $C$  (componenti  $\infty^{k-\nu}$  coni di 1<sup>a</sup> specie).

(1) BOMPIANI, N, p. 128. Se la  $W$  di  $V_k$  ha dimensione  $2k - 1$ ,  $W(2)$  ha senz'altro dimensione  $D - 1$  e  $V_k$  soddisfa alle equazioni del 3° ordine che si ottengono per derivazione da quelle del 2°. Quindi quelle del 3° ordine saranno in numero minimo quando saranno in numero minimo quelle del 2°, cioè in numero di  $k$ , componenti necessariamente un sistema parabolico (BOMPIANI, N, pp. 98, 99). Le equazioni del 3° ordine saranno quindi ancora  $\frac{k(k+1)}{2}$  e comporranno un sistema a caratteristica.

(2) Se  $V_k$  rappresenta qualche equazione del 2° ordine vanno prese in considerazione le equazioni del 3° ordine (fra loro indipendenti) che se ne ottengono per derivazione.

(3) BOMPIANI, N, p. 113.

(4) BOMPIANI, N, p. 90.

(5) BOMPIANI, N, p. 126.

Per  $\nu = 1$ ,  $\nu = 2$  intervengono anche altre  $V_k$  fra le quali sarebbe interessante ricercare quelle che posseggono  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$ .

Sempre restando nell'ipotesi che  $V_k$  soddisfi a  $\frac{k(k+1)}{2}$  equazioni di 3° ordine (lin. indep.) esattamente, avrebbe pure interesse trovare le  $V_k$  per cui la  $W(2)$  ha dimensione  $D - 1$  quando alcune delle equazioni del 3° ordine possono ottenersi per derivazione da  $\nu$  equazioni del 2° ordine ( $\nu > 0$ ) componenti un sistema a caratteristica non parabolico (cioè che si potrebbe fare partendo dal risultato di Bompiani a p. 111 di N) oppure quando  $V_k$  non soddisfa ad equazioni di Laplace. Fra le  $V_k$  trovate si potrebbero poi ricercare quelle che posseggono  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$ .



Infatti  $V_k$  può rappresentarsi con equazioni parametriche del tipo

$$(6) \quad x = \tau_1 \left( A_0 + \sum_{v+1}^k A_i \tau_i \right) + B(\tau_2, \dots, \tau_v, \tau_{v+1}, \dots, \tau_k)$$

dove i  $k - v + 1$  punti  $A_0, A_{v+1}, \dots, A_k$  individuano l' $S_{k-v}$ .

Se  $S_p$  è lo spazio ambiente di  $V_k$ , proiettiamo dall' $S_{k-v}$  la varietà  $B$  (a  $k - 1$  dimensioni) sopra un  $S_{p-k+v-1}$  sghembo con  $S_{k-v}$ : otteniamo una varietà  $B'$  pure a  $k - 1$  dimensioni perchè  $V_k$  non soddisfa a più di  $\frac{k(k+1)}{2}$  equazioni del 3° ordine (lin. indep.) <sup>(1)</sup>. E per questo stesso motivo  $B'$  non soddisfa ad equazioni del 3° ordine.  $V_k$  appartiene poi manifestamente al cono  $C$  proiettante dall' $S_{k-v}$  la  $B'$ , ed è formata, come mostra la (6), da  $\infty^{k-1}$  rette situate negli  $S_{k-v+1}$  di  $C$  (componenti  $\infty^{k-v}$  coni di 1ª specie).

Orbene, vediamo se questa  $V_k$  può possedere  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$ , cioè  $\infty^1 E_2$  di  $\gamma_{2,4}$  per ogni  $E_1$  (caso  $s = 4$ ,  $\delta = 2k$  del problema A).

Si ha:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè  $V_k$  possenga  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$  è che  $C$  sia il cono dell' $S_{\frac{k(k+1)(k+2)}{6} + k - v}$  proiettante da  $S_{k-v}$  la  $V_{k-1}^{k-1}$  rappresentante le forme cubiche  $V_{k-2}^3$  di  $S_{k-1}$ .*

Infatti  $V_k$ , verificando le condizioni per l'abbassarsi della dimensione  $D$  di  $W$  (2) di un'unità, verifica anche le condizioni della fine del n. 6, relative alla (4), per  $s = 4$  e  $\delta = 2k$  (n. 8). Quindi, fra le  $V_k$  in discorso, quelle (supposte esistenti) che posseggono  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$  dovranno verificare le ulteriori condizioni del n. 6 per  $s = 4$  e  $\delta = 2k$ , cioè annullare la matrice

$$(7) \quad \begin{vmatrix} S(2) & & & \\ \sum x_{2i_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} & & & \\ \sum x_{3i_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \sum x_{4i_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} & & & \\ \sum x_{i_1i_2i_3i_4} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} d\tau_{i_3} d\tau_{i_4} & & & \end{vmatrix}$$

identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ ; s'è supposto (com'è lecito, scambiando eventualmente gli indici ai  $\tau$ ) che i punti che individuano l' $S(2)$  e i punti  $\sum x_{2i_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2}, \dots, \sum x_{ki_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2}$  siano linearmente indipendenti.

(1) Si ha infatti:

$$B = (B', A_0, A_{v+1}, \dots, A_k).$$

Se, ad es.,  $B'$  non contenesse il  $\tau_2$  si avrebbe  $B_2 = (A_0, A_{v+1}, \dots, A_k)$  e quindi  $x_2 = (x_1, x_{1v+1}, \dots, x_{1k})$ , ecc.

Per la (6), la (7) diviene:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} A_0 \\ A_{v+1} \\ \vdots \\ A_k \\ S_B(2) \\ \Sigma B_{2i_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \\ \Sigma B_{3i_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \\ \vdots \\ \Sigma B_{ki_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \\ \Sigma B_{i_1i_2i_3i_4} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} d\tau_{i_3} d\tau_{i_4} \end{vmatrix} = 0,$$

identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , dove  $S_B(2)$  sta ad indicare le orizzontali costruite con le coordinate dei punti che individuano l' $S(2)$  osculatore alla varietà  $B$  (al solito s'è posto  $B_2 = \frac{\partial B}{\partial \tau_2}$  e analog.;  $i_1, i_2, i_3, i_4$  assumono in tutti i modi possibili i valori  $1, 2, \dots, k$ ).

Fra il punto  $B$  (che descrive la varietà  $B$ ) e la sua proiezione  $B'$  dall' $S_{k-v}$ , si ha

$$(9) \quad B = (B', A_0, A_{v+1}, \dots, A_k),$$

indicando con  $(B', \dots, A_k)$  una combinazione lineare omogenea, a coefficienti funzioni di  $\tau_2, \dots, \tau_k$ , dei punti  $B', \dots, A_k$ .

Per la (9), la (8) può scriversi

$$\begin{vmatrix} A_0 \\ A_{v+1} \\ \vdots \\ A_k \\ S_{B'}(2) \\ \Sigma B'_{2i_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \\ \vdots \\ \Sigma B'_{ki_1i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \\ \Sigma B'_{i_1i_2i_3i_4} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} d\tau_{i_3} d\tau_{i_4} \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi, essendo lo spazio ambiente di  $B'$  sghembo con l' $S_{k-v}$  dei punti  $A_0, A_{v+1}, \dots, A_k$ ,

$$\begin{vmatrix} S_{B'}(2) \\ \Sigma B'_{2i_1 i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \Sigma B'_{ki_1 i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \\ \Sigma B'_{i_1 i_2 i_3 i_4} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} d\tau_{i_3} d\tau_{i_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Ma condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi di questa matrice è che  $B'$  possenga per ogni  $E_1$  un  $E_2$  di  $\gamma_{2,4}$ , cioè complessivamente  $\infty^{2(k-1)-1} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$  (n. 6).

Siccome  $B'$  non soddisfa ad equazioni del 3° ordine, per il teorema di Bompiani esposto nel n. 5,  $B'$  è quindi la  $V_{k-1}^{k-1}$  di  $S_{\frac{k(k+1)(k+2)}{6}-1}$  rappresentante le forme cubiche  $V_{k-2}^3$  di  $S_{k-1}$ . E ciò dimostra l'asserto.

Si ha dunque:

*Una  $V_k$  dell' $S_{\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+k-v}$ , situata sul cono proiettante da un  $S_{k-v}$  la  $V_{k-1}^{k-1}$  che rappresenta le forme cubiche  $V_{k-2}^3$  di  $S_{k-1}$ , formata da  $\infty^{k-1}$  rette poste negli  $S_{k-v+1}$  del cono (e componenti  $\infty^{k-v}$  coni di 1ª specie), possiede  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$ .*

Non mi trattengo ulteriormente su questa  $V_k$  perchè essa rientra, come caso molto particolare, nella classe delle  $V_k$  situate sui coni proiettanti le varietà che rappresentano le forme d'ordine  $n$  di uno spazio lineare, di cui, come già dissi nel n. 1, mi occuperò in un prossimo lavoro.

OSSERVAZIONE. — Voglio qui osservare esplicitamente che una ricerca della natura di quella ora fatta per trovare fra le  $V_k$  di Bompiani quelle che posseggono  $\infty^{2k} E_2$  di  $\gamma_{2,4}$ , non offre mai gravi difficoltà perchè si conosce l'espressione della  $x$  (la (6) nel caso precedente). Ciò conferisce particolare importanza alla ricerca delle  $V_k$  che soddisfano alle condizioni della fine del n. 6, relative alla (4), sulla quale abbiamo appunto insistito nei 1, 7, 8, perchè una volta trovata una tale  $V_k$  non è difficile il passo per giungere alla  $V_k$  con  $\infty^{\delta} E_2$  di  $\gamma_{s-2,s}$  che si cercava (problema A).

**Matematica.** — *Sulle estremanti di un integrale in forma ordinaria, dipendente da funzioni a derivate prime equiuniformemente lipschitziane*<sup>(1)</sup>. Nota di T. VIOLA, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. M. PICONE.

1. In questa Nota, e in un'altra che farò seguire tra breve, esporrò, nelle sue linee essenziali, un procedimento per la costruzione delle estremanti di un integrale in forma ordinaria

$$(1) \quad J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

in un insieme  $A$  chiuso e compatto di funzioni  $y = f(x)$ , a derivate  $f'(x)$  equiuniformemente lipschitziane nell'intervallo  $\overline{ab}$ . Con ciò intendo che  $A$  è contenuto nell'insieme  $E_L$  di tutte le funzioni  $f(x)$  che, per ogni coppia di punti  $x_1, x_2$  appartenenti ad  $ab$ , soddisfano alla relazione fondamentale

$$(2) \quad |f'(x_1) - f'(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

essendo  $L$  un numero positivo fisso (cioè indipendente dalla funzione  $f(x)$  di  $E_L$ ). Chiuso e compatto (nello spazio di tutte le funzioni continue e derivabili in  $\overline{ab}$ ) è, per es., l'insieme parziale costituito da tutte le funzioni di  $E_L$ , tali che, in tutto  $\overline{ab}$ , sia  $|f(x)| \leq M$  (essendo  $M$  un numero positivo prefissato).

Mostrerò poi come il procedimento possa essere applicato alla costruzione delle estremanti dell'integrale

$$(3) \quad J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

che esprime la lunghezza di un arco di curva  $y = f(x)$  in  $\overline{ab}$ . Darò anche alcuni esempi e alcune soluzioni pratiche.

Non mi diffonderò sulle dimostrazioni, rimandando, per tutti i dettagli, a un lavoro che ho in corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». Ringrazio vivamente il prof. M. Picone, per avermi suggerito questo interessante campo di ricerca.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 5 novembre 1938.

2. Suddividiamo  $\overline{ab}$  in un numero finito d'intervalli parziali. Appartiene ad  $E_L$  ogni funzione continua  $y = \varphi(x)$ , soddisfacente all'una o all'altra delle due aquazioni:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \pm L,$$

alternativamente in ciascuno di questi intervalli parziali. Una qualunque di tali funzioni è individuata da due condizioni ai limiti, per es. dai valori  $\varphi(a), \varphi'(a)$ . *L'insieme  $\Phi$  di tutte queste funzioni  $\varphi(x)$ , in corrispondenza di tutte le possibili suddivisioni di  $\overline{ab}$ , è denso in  $E_L$ .* Infatti siano  $f(x)$  una qualunque funzione di  $E_L$ ,  $\varepsilon$  un numero positivo comunque piccolo. Indichiamo poi con  $M$  un numero tale che  $|f'(x)| < M$  in tutto  $\overline{ab}$ , con  $n$  un intero positivo maggiore di  $\frac{3M(b-a)}{\varepsilon}$  e di  $\sqrt{\frac{3L}{2\varepsilon}}(b-a)$ . Dividiamo  $\overline{ab}$  in  $n$  parti uguali e indichiamo con  $\overline{cd}$  una generica di questi parti. Se  $h, k$  sono due punti tali che  $c \leq h \leq k \leq d$ , è lecito definire una funzione  $\varphi(x)$  di  $\Phi$  in  $\overline{cd}$ , in modo che sia

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -L, \quad \text{per } c \leq x \leq h, \quad \text{e per } k \leq x \leq d,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = +L, \quad \text{per } h \leq x \leq k.$$

Se s'impongono le quattro condizioni

$$\varphi(c) = f(c), \quad \varphi'(c) = f'(c), \quad \varphi(d) = f(d), \quad \varphi'(d) = f'(d),$$

i punti  $h, k$  risultano univocamente individuati. Definita con siffatta legge entro ciascuno degl'intervalli parziali come  $\overline{cd}$ ,  $\varphi(x)$  risulta definita in tutto  $\overline{ab}$ .

Ora un punto qualunque  $x$  in  $\overline{ab}$  apparterrà ad un certo intervallo parziale  $\overline{cd}$  e si dimostra facilmente che è

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - f(x)| &\leq |f'(c)|(d-c) + \frac{1}{2} L(d-c)^2 < M(d-c) + \\ &+ \frac{1}{2} L(d-c)^2 < \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Essendo inoltre

$$|f(x) - f(c)| < M(d-c) < \frac{\varepsilon}{3},$$

risulta infine

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon.$$



Si dimostra anche facilmente che, assegnato ad arbitrio un numero positivo  $\eta$ , ne esiste un altro  $\varepsilon$  tale che, se  $f_1(x), f_2(x)$  sono due funzioni qualunque di  $E_L$ , soddisfacenti alla disuguaglianza

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq \varepsilon,$$

in tutto  $\overline{ab}$ , esse soddisfano anche all'altra:

$$|f'_1(x) - f'_2(x)| \leq \eta.$$

Se  $\varepsilon \leq \eta$ , risulta dunque che  $\varphi(x)$  appartiene all'intorno d'ampiezza  $\eta$  di  $f(x)$ , anche quando si assuma la definizione di intorno del prim'ordine.

Le stesse cose possono dirsi dell'insieme  $\Psi$  di tutte le funzioni continue  $\psi(x)$ , che si definiscono suddividendo  $\overline{ab}$  in un numero qualunque di parti e richiedendo che, in ciascuna di queste parti, sia soddisfatta una delle tre equazioni:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = +L, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -L, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

Del resto si osserva che  $\Psi$  contiene intieramente  $\Phi$ , essendo più vasto di quest'insieme.

3. L'integrale (1) vari con continuità al variare, in  $A$ , della  $y(x)$  e della sua derivata: ammetta perciò sia massimo che minimo in  $A$ .

Supponiamo  $A$  definito in  $E_L$  imponendo, come condizioni ai limiti, che  $y(x)$ , ed eventualmente anche  $y'(x)$ , assumano determinati valori in determinati punti di  $\overline{ab}$ . La costruzione del numero precedente si può immaginare eseguita (anzichè sull'intervallo  $\overline{ab}$ ), separatamente su ciascuno degli intervalli parziali in cui i detti punti suddividono  $\overline{ab}$ . Si vede dunque che, presa in considerazione una qualunque funzione  $y(x)$  di  $A$ , è possibile costruire delle funzioni  $\varphi(x)$  di  $\Phi$  che assumono (insieme con le loro derivate  $\varphi'(x)$ ) gli stessi valori di  $y(x)$  (e rispettivamente di  $y'(x)$ ) nei detti punti. Ciò vale anzi a dimostrare che l'insieme  $\Phi A$  è denso in  $A$ .

L'insieme numerico descritto dall'integrale, al variare di  $y$  in  $\Phi A$ , è necessariamente denso nell'insieme descritto al variare di  $y$  in  $A$ : perciò il massimo e il minimo del secondo insieme, coincide con gli estremi, rispettivamente superiore ed inferiore, del primo. La ricerca di questi estremi può, in generale, farsi sistematicamente perchè, se nell'integrale s'identifica  $y$  con una qualunque funzione  $\varphi(x)$  di  $\Phi A$ , l'integrale viene ad esprimersi come somma di un certo numero d'integrali parziali:

$$\int_a^b F[x, \varphi(x), \varphi'(x)] dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} F \left[ x, \varphi(a_i) + \varphi'(a_i)(x - a_i) \pm \right. \\ \left. \pm (-1)^i \frac{1}{2} L(x - a_i)^2, \varphi'(a_i) \pm (-1)^i L(x - a_i) \right] dx.$$

Ognuno degl'integrali parziali assume un'espressione ben determinata che, in taluni casi, potrà addirittura essere calcolata in termini finiti. Ma potrà anche accadere che sia possibile stabilire una relazione di disuguaglianza fra il valore assunto dall'integrale (1) per  $y$  uguale alla  $\varphi(x)$  considerata, e i valori assunti per  $y$  variabile nella parte di  $A$  che è contenuta in un intorno (abbastanza ristretto) della  $\varphi(x)$ . E ciò senza che sia necessario un effettivo calcolo, neppure approssimato, di tali valori. In ogni caso, se  $y = f(x)$  è una funzione di  $A$  tale che per essa l'integrale (1) risulti  $\geq$  che per ogni  $y = \varphi(x)$  di  $\Phi A$ , tale funzione  $f(x)$  rende senz'altro massimo l'integrale in  $A$ . (E analogamente per il minimo).

Le stesse cose possono dirsi a proposito delle funzioni  $\psi(x)$  dell'insieme  $\Psi A$ .

4. Facciamo una prima semplice applicazione di quanto precede, alla costruzione dell'arco di curva di lunghezza minima, unente due punti assegnati  $H = (a, \alpha)$ ,  $K = (b, \beta)$  nel piano, rappresentata da un'equazione  $y = f(x)$ , essendo  $f(x)$  in  $E_L$  (minimo dell'integrale (3)). Supporremo che, oltre a queste due condizioni ai limiti, cioè  $f(a) = \alpha$ ,  $f(b) = \beta$ , siano eventualmente assegnate anche qualcuna delle seguenti altre condizioni:  $f'(a)$ ,  $f'(b)$  (tangenti negli estremi), valori che  $f(x)$  assume in uno o più punti prefissati nell'interno di  $\overline{ab}$  (passaggio per prefissati punti del piano). È facile dimostrare il seguente

TEOREMA. — *Il problema di minimo è sempre risolto, in  $ab$ , da una funzione  $\psi(x)$  dell'insieme  $\Psi$  definito al n. 2.*

Per dimostrare questo teorema, proviamo che, se  $f(x)$  è una qualunque funzione di  $E_L$  non appartenente a  $\Psi$ , soddisfacente alle condizioni ai limiti imposte, è possibile costruire una funzione  $\psi(x)$  di  $\Psi$ , tale che  $J[\psi] < J[f]$  in  $\overline{ab}$ . All'uopo suddividiamo  $\overline{ab}$  in un numero finito di parti, prendendo, fra i punti di divisione, le ascisse degli eventuali punti del piano per i quali è imposto il passaggio della curva  $y = f(x)$ . Indichiamo l'operazione da eseguire in ognuna  $\overline{cd}$  di queste parti, in cui  $f(x)$  non coincida con una funzione di  $\Psi$  (vedi fig. 1).

Si considerano le quattro parabole:

$$(5) \quad \begin{cases} y = f(c) + f'(c)(x - c) \pm \frac{1}{2} L (x - c)^2 \\ y = f(d) + f'(d)(x - d) \pm \frac{1}{2} L (x - d)^2 \end{cases}$$

che limitano un certo dominio finito del piano, compreso fra le ordinate  $y = c$ ,  $y = d$ . Si dimostra che l'arco di curva  $y = f(x)$  corre intieramente in questo dominio. Fra le rette che si possono tracciare tangenti simultaneamente a una delle prime due parabole e a una delle ultime due, ve n'è

una ed una sola i cui punti di tangenza  $p, q$  ( $p \leq q$ ) appartengono all'intervallo  $\overline{cd}$ . Supponiamo, per es., che tale retta risulti tangente alla seconda e alla quarta parabola. Sia  $\psi(x)$  una funzione di  $\Psi$  che coincida con la seconda parabola in  $\overline{cp}$ , con la quarta in  $\overline{qd}$ , e sia lineare in  $\overline{pq}$ . È  $f(x) \geq \psi(x)$  in tutto  $\overline{cp}$  e in tutto  $\overline{qd}$ . Se non è  $f(x) \geq \psi(x)$  anche in

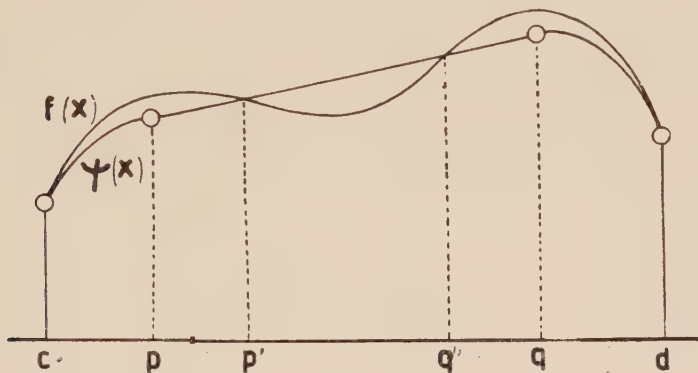


Fig. 1.

tutto  $\overline{pq}$ , siano  $p'$  il più piccolo e  $q'$  il più grande dei valori  $x$  in  $\overline{pq}$ , tali che  $f(x) \leq \psi(x)$  (vedi fig. 1). Il segmento che unisce i punti  $(p', f(p'))$ ,  $(q', f(q'))$  ha lunghezza  $< J[f(x)]$  in  $\overline{p'q'}$ . Al fine della relazione da dimostrare, è dunque lecito supporre  $f(x) \geq \psi(x)$  addirittura in tutto  $\overline{cd}$ . Ma allora risulta effettivamente  $J[f] > J[\psi]$  in tutto  $\overline{cd}$ , perchè  $\psi(x)$  è una

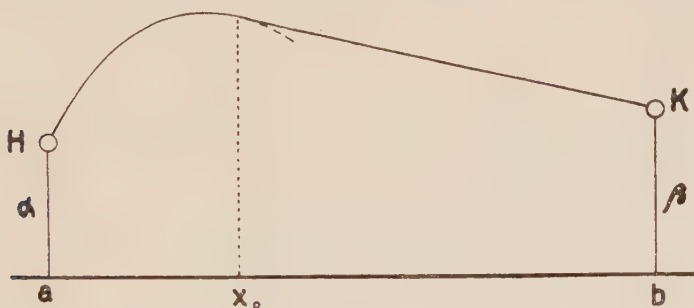


Fig. 2.

funzione convessa in  $\overline{cd}$ . La definizione della funzione  $\psi(x)$  e la dimostrazione della proprietà  $J[f] > J[\psi]$  in  $\overline{cd}$ , sono ovviamente analoghe negli altri tre casi di tangenza che si possono presentare, fra la retta e due delle parabole (5).

5. Nella dimostrazione del numero precedente, è implicita la risoluzione del problema di minimo, quando siano prefissati i valori  $f'(a), f'(b)$ ,

oltre  $f(a)$ ,  $f(b)$ . Affinchè il problema ammetta soluzione, è evidentemente necessario che sia

$$|f'(b) - f'(a)| \leq L(b - a).$$

Analogamente si risolve il problema di minimo, quando sia assegnato soltanto uno dei valori che la derivata  $f'(x)$  assume negli estremi, per es.,  $f'(a)$ . La condizione d'esistenza è:

$$\left| f'(a) - \frac{\beta - \alpha}{b - a} \right| \leq \frac{1}{2} L(b - a).$$

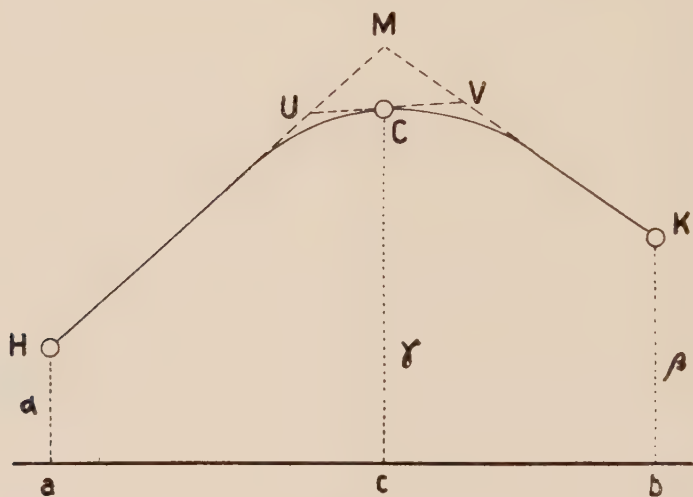


Fig. 3.

La soluzione si ottiene tracciando, dal punto  $K = (b, f(b))$ , la tangente alla parabola

$$y = \alpha + f'(a)(x - a) \pm \frac{1}{2} L(x - a)^2,$$

valendo il segno  $\pm$  secondochè è  $f'(a) \leq \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ . Se  $x_0$  è l'ascissa del punto di tangenza, il cui valore si trova essere

$$x_0 = b - \frac{1}{L} \sqrt{2L(b - a) \left\{ \frac{1}{2} L(b - a) - \left[ f'(a) - \frac{\beta - \alpha}{b - a} \right] \right\}},$$

l'integrale è reso minimo dalla funzione  $\psi(x)$ , rappresentata, entro  $\overline{ax_0}$  dalla parabola, entro  $\overline{x_0b}$  dalla tangente (vedi fig. 2).

Un ultimo esempio: fissato un terzo punto  $C = (c, \gamma)$  non situato sul segmento  $\overline{HK}$  ( $a < c < b$ ), congiungere  $H, K$  mediante una curva  $y = f(x)$  di  $E_L$ , di minima lunghezza, passante per  $C$  (vedi fig. 3).

La soluzione è fornita da una funzione  $\psi(x)$  composta da un arco di parabola passante per  $C$  e dai due segmenti di tangenti, condotti a detta parabola dai punti  $H, K$ . Indicati con  $M$  l'intersezione di queste due tangenti (prolungate oltre i punti di tangenza), con  $U, V$  le intersezioni, con dette tangenti, della terza tangente, tracciata alla parabola in  $C$ , si dimostra che i segmenti  $\overline{MU}, \overline{MV}$  sono uguali. Esporrò, nel lavoro cui ho accennato in principio, la semplice dimostrazione basata su considerazioni d'indole meccanica. Aggiungo che la condizione d'esistenza è:

$$\left| \frac{\gamma - \alpha}{c - a} - \frac{\beta - \alpha}{b - a} \right| \leq \frac{1}{2} L (b - c).$$

**Matematica.** — *Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti.* Nota di G. SCORZA DRAGONI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. M. PICONE.

In un lavoro recente <sup>(2)</sup> sono riuscito a indicare, sotto ipotesi larghissime, un criterio di risolubilità per il problema di valori al contorno  $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ ,  $y(a) = \alpha$ ,  $y(b) = \beta$ , l'insieme  $C$  in cui la  $f$  è definita essendo del tipo  $a \leq x \leq b$ ,  $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$ ,  $-\infty < y' < +\infty$ .

Il criterio si ottiene, prolungando convenientemente l'equazione; dimostrando l'esistenza della soluzione per l'equazione prolungata; e sfruttando poi un teorema di confronto, il quale permette di asserire che una curva integrale dell'equazione prolungata si deve mantenere in  $C$ , per poco ch'essa soddisfaccia alle condizioni ai limiti assegnate: questa è almeno l'essenza del procedimento che ho tenuto, le modalità di esecuzione se ne allontanano invece a prima vista, ma più che altro per comodità espositiva.

Seguendo questa via ho raggiunto lo scopo, supponendo fra l'altro che

*lungo le curve  $y = \sigma(x)$ ,  $y' = \sigma'(x)$  e  $y = \tau(x)$ ,  $y' = \tau'(x)$  la  $f(x, y, y')$  soddisfacesse, rispetto a  $y'$ , a una condizione locale di continuità uniforme generalizzata;*

(1) Nella seduta del 19 novembre 1938.

(2) G. SCORZA DRAGONI, *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti* [in corso di stampa nei « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma »], § 4.



ciò significando: si può trovare un numero positivo  $\delta$  tale che, per  $|\sigma'(x) - y'| < \delta, |\tau'(x) - y'| < \delta$ , sia, rispettivamente, quasi ovunque in  $a \leq x \leq b$

$$(1) \quad \begin{cases} |f(x, \sigma(x), \sigma'(x)) - f(x, \sigma(x), y')| \leq \lambda(x) \mu(\sigma'(x) - y'), \\ |f(x, \tau(x), \tau'(x)) - f(x, \tau(x), y')| \leq \lambda(x) \mu(\tau'(x) - y'), \end{cases}$$

dove  $\lambda(x) \geq 0$  e  $< +\infty$  è sommabile nell'intervallo di estremi  $a$  e  $b$ , mentre  $\mu(v)$ , positiva per  $0 < |v| < \delta$ , è infinitesima con  $v$  e nulla per  $v = 0$ .

In questa Nota mi propongo di far vedere che, giusta quanto avevo previsto<sup>(1)</sup>, l'ipotesi in discorso è superflua. Con ciò il teorema ricordato diviene:

*L'equazione, in  $y(x)$ ,*

$$(2) \quad y(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u, y(u), y'(u)) du + \\ + \frac{b-x}{b-a} \alpha + \frac{x-a}{b-a} \beta - \int_a^b dt \int_a^t f(u, y(u), y'(u)) du,$$

dove  $f(x, y, y')$  è definita nell'insieme

$$C: a \leq x \leq b, \quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x), \quad -\infty < y' < +\infty \\ \text{con} \\ \sigma(x) < \tau(x),$$

ammette almeno una soluzione, assolutamente continua con la sua derivata nell'intervallo

$$i: a \leq x \leq b$$

— e verificante ivi le  $\sigma(x) \leq y(x) \leq \tau(x)$  —, tutte le volte che:

I)  $f(x, y, y')$ , ovunque finita<sup>(2)</sup>, è continua rispetto a  $(y, y')$  e misurabile rispetto a  $x$  nell'insieme  $C$ <sup>(3)</sup>;

II)  $f(x, y, y')$  verifica la

$$(3) \quad |f(x, y, y')| < \varphi(y') + \chi(x),$$

(1) Loc. cit. nota prec.; se ne veda la nota (28).

(2) Questa condizione si può ritenere sempre soddisfatta, in virtù della (3): nel caso contrario, infatti, basterebbe modificare  $f$  in un insieme che, per la (3), sarebbe contenuto in un insieme di misura nulla costituito da piani normali all'asse  $x$ .

(3) Cioè  $f(x, y_0, y'_0)$  è misurabile nell'insieme chiuso (se non vuoto) in cui essa è definita; e questo qualunque siano le costanti  $y_0$  e  $y'_0$ . Ricordiamo che dalla I) segue la misurabilità di  $f(x, p(x), q(x))$ , se  $p(x)$  e  $q(x)$  sono funzioni continue (o misurabili) in  $i$ , naturalmente con  $\sigma(x) \leq p(x) \leq \tau(x)$ .

con  $\varphi(u) > 0$  finita e continua in  $-\infty < u < +\infty$  e  $\chi(x) \geq 0$  sommabile in  $i$ , avendosi inoltre

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)} du = \int_0^{-\infty} \frac{u}{\varphi(u)} du = +\infty$$

$$\varphi(u) > k|u| \quad (k = \text{cost.} > 0),$$

quest'ultima condizione potendo essere soppressa quando  $\chi(x)$  è quasi ovunque nulla;

III) le funzioni  $\sigma'(x)$  e  $\tau'(x)$  sono (finite e) continue in  $i$ , riuscendo in  $i$  non decrescenti le

$$\sigma'(x) = \int_a^x f(u, \sigma(u), \sigma'(u)) du, \quad \tau'(x) = \int_a^x f(u, \tau(u), \tau'(u)) du = \tau'(x);$$

e, finalmente, purchè

$$\text{IV) riesca } \sigma(a) \leq \alpha \leq \tau(a), \sigma(b) \leq \beta \leq \tau(b).$$

Non mi attarderò intorno al caso che si sostituisca la (3) mediante la  $|f(x, y, y')| \leq \varphi_0(y) \varphi(y') + \chi(x)$ , con  $\varphi_0(u) > 0$  sommabile in ogni intervallo limitato dell'asse  $u$ , nè intorno al caso che sia  $\sigma(x) \leq \tau(x)$ , perchè entrambi non dovrebbero essere difficili a trattarsi (ammesso, come è probabile, che siano suscettibili di una risposta soddisfacente): per dei cenni che potranno essere utili in proposito, si vedano il n. 11 e la nota <sup>(1)</sup> della mia Memoria citata, alla quale rimando anche per tutti i raffronti e le indicazioni bibliografiche.

La non difficile dimostrazione del teorema attuale sarà data nel n. 2; le considerazioni del n. 1 sono svolte più che altro allo scopo di esemplificare un particolare procedimento di approssimazione, forse non del tutto inutile in questo genere di ricerche; il risultato del n. 1, parziale rispetto a quello del n. 2, non sarà sfruttato in seguito.

I. Mostriamo che nel teorema ricordato nelle prime righe di questa Nota, la condizione anzidetta di continuità uniforme generalizzata può essere, se non soppressa del tutto, per lo meno attenuata, nel senso che, fermo il resto, basta che la funzione  $\lambda(x)$  delle (1) sia sempre positiva, finita e misurabile in  $i$ , perchè il mio teorema citato all'inizio sia ancora valido <sup>(1)</sup>.

Indichiamo infatti con  $e_n$ ,  $n$  essendo un intero positivo, la porzione di  $i$  in cui  $\lambda(x) \leq n$ ; di guisa che la successione  $e_1, e_2, \dots$  è monotona

(1) Vale a dire: se oltre alla condizione ora detta sono verificate le I), ..., IV), allora è possibile soddisfare alla (2).

non decrescente con  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = i$ , Poniamo  $\lambda_n(x) = \lambda(x)$  in  $e_n$  e  $\lambda_n(x) = 0$  in  $i - e_n$ , di guisa che  $\lambda_n(x)$  è sommabile in  $i$ .

Scegliamo il numero  $\rho > 0$  in modo che dalle  $|\sigma'(x) - y'| \leq 2\rho$ ,  $|\tau'(x) - y'| \leq 2\rho$  segua, rispettivamente,

$$|f(x, \sigma(x), \sigma'(x))| < 2\varphi(y') + \chi(x), \quad |f(x, \tau(x), \tau'(x))| < 2\varphi(y') + \chi(x):$$

ciò può sempre farsi, dato che vale la (3), mentre per la continuità e la positività di  $\varphi(u)$  le differenze  $2\varphi(y') - \varphi(\sigma'(x))$  e  $2\varphi(y') - \varphi(\tau'(x))$  hanno un minimo positivo, purchè sia rispettivamente  $|\sigma'(x) - y'| \leq 2\rho$  e  $|\tau'(x) - y'| \leq 2\rho$ , con  $\rho > 0$  e opportunamente scelto,  $x$  variando in  $i - e_n$  — si tenga presente che  $\sigma'(x)$  e  $\tau'(x)$  sono finite e continue.

Definiamo la funzione  $f_n(x, y, y')$  ponendo intanto:

$$\begin{aligned} f_n(x, y, y') &= f(x, y, y'), \text{ se } x \text{ è in } e_n; \\ f_n(x, \sigma(x), y') &= f(x, \sigma(x), \sigma'(x)), \text{ se } x \text{ è in } i - e_n \text{ e } |\sigma'(x) - y'| \leq \rho; \\ f_n(x, \tau(x), y') &= f(x, \tau(x), \tau'(x)), \text{ se } x \text{ è in } i - e_n \text{ e } |\tau'(x) - y'| \leq \rho. \end{aligned}$$

Per completare la definizione di  $f_n$  nei punti di  $C$  per cui  $y = \sigma(x)$  oppure  $y = \tau(x)$ ,  $x$  appartenendo sempre a  $i - e_n$ , poniamo

$$f_n(x, \sigma(x), y') = 0, \text{ quando } |\sigma'(x) - y'| \geq 2\rho,$$

e imponiamo a  $f_n(x, \sigma(x), y')$  di essere lineare nei due intervalli

$$\sigma'(x) - 2\rho \leq y' \leq \sigma'(x) - \rho, \quad \sigma'(x) + \rho \leq y' \leq \sigma'(x) + 2\rho,$$

cioè poniamola, rispettivamente, uguale a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} f(x, \sigma(x), \sigma'(x)) (2\rho - \sigma'(x) + y'), \\ \frac{1}{\rho} f(x, \sigma(x), \sigma'(x)) (2\rho + \sigma'(x) - y'); \end{aligned}$$

e nel definire  $f_n(x, \tau(x), y')$  procediamo in maniera analoga. Di guisa che, in tutto  $i - e_n$  e per ogni  $y'$ , sarà

$$|f_n(x, \sigma(x), y')| < 2\varphi(y') + \chi(x), \quad |f_n(x, \tau(x), y')| < 2\varphi(y') + \chi(x).$$

Dato poi  $(x, y, y')$  con  $x$  contenuto in  $i - e_n$  e  $\sigma(x) < y < \tau(x)$ , sarà

$$\begin{aligned} f_n(x, y, y') &= \\ &= \frac{1}{\sigma(x) - \tau(x)} [f_n(x, \tau(x), y') (\sigma(x) - y) - f_n(x, \sigma(x), y') (\tau(x) - y)]; \end{aligned}$$

vale a dire: per  $x$  in  $i - e_n$ , la  $f_n(x, y, y')$  sarà lineare rispetto a  $y$  nell'intervallo  $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$ .

In tutto  $C$  è quindi

$$|f_n(x, y, y')| < 2\varphi(y') + \chi(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e ciascuna delle  $f_n$ , oltre a soddisfare a condizioni analoghe alle I), II), III), verifica anche, sia pure localmente e in modo generalizzato, una condizione di continuità uniforme rispetto a  $y'$  lungo le curve  $y = \sigma(x)$ ,  $y' = \sigma'(x)$  e  $y = \tau(x)$ ,  $y' = \tau'(x)$ . Infatti, dalle (1) e dalla definizione di  $f_n(x, y, y')$  segue

$$|f_n(x, \sigma(x), \sigma'(x)) - f_n(x, \sigma(x), y')| \leq \lambda_n(x) \mu(\sigma'(x) - y'),$$

$$|f_n(x, \tau(x), \tau'(x)) - f_n(x, \tau(x), y')| \leq \lambda_n(x) \mu(\tau'(x) - y'),$$

per quasi tutti gli  $x$  di  $i$  e per tutti gli  $y'$  verificanti, rispettivamente, le  $|\sigma'(x) - y'| < \delta^*$ ,  $|\tau'(x) - y'| < \delta^*$ ,  $\delta^*$  essendo il più piccolo dei numeri  $\delta$  e  $\rho$  — si noti che  $\lambda_n(x)$  è addirittura limitata in  $i$ , e non solo sommabile.

Quindi esiste sempre una funzione  $y_n(x)$ , assolutamente continua in  $i$  insieme con la propria derivata, per la quale  $\sigma(x) \leq y_n(x) \leq \tau(x)$  e

$$(4) \quad y_n(x) = \int_a^x dt \int_a^t f_n(u, y_n(u), y'_n(u)) du + \\ + \frac{b-x}{b-a} \alpha + \frac{x-a}{b-a} \left[ \beta - \int_a^b dt \int_a^t f_n(u, y_n(u), y'_n(u)) du \right],$$

le costanti  $\alpha$  e  $\beta$  soddisfacendo alla IV).

Ciò segue da quanto è stabilito nel § 4 della mia Memoria citata; nel quale paragrafo (al n. 10) è anche dimostrato, sia pure implicitamente, che in  $i$  riesce

$$(5) \quad |y'_n(x)| < K \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dove  $K$  è una costante positiva opportuna che non dipende da  $f_n$ , ma solo da  $\varphi(y')$ ,  $\chi(x)$  e, naturalmente,  $a, b, \alpha, \beta, \sigma(x)$  e  $\tau(x)$ .

Indi è quasi ovunque  $|y''_n(x)| \leq H + \chi(x)$ , dove  $H$  è il massimo di  $2\varphi(u)$  per  $|u| \leq K$ ; e di qui e dalla (5) segue subito che le  $y'_n(x)$  sono equicontinue ed equilimate; mentre le  $y_n(x)$  lo erano già in virtù della (5) e delle  $\sigma(x) \leq y_n(x) \leq \tau(x)$ .

Scegliamo i numeri naturali  $n_1, n_2, \dots$  in modo che le successioni di termini generali

$$z_p(x) = y_{n_p}(x) \quad , \quad z'_p(x) = y'_{n_p}(x)$$

convergono (uniformemente) in  $i$ ; diciamo  $z(x)$  la funzione limite di  $z_p(x)$ , er  $p \rightarrow \infty$ ; di guisa che  $z'(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} z'_p(x)$ : e poniamo

$$g_p(x, y, y') = f_{n_p}(x, y, y').$$

Sarà, per tutti gli  $x$  di  $i$ ,  $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(x, y, y') = f(x, y, y')$ ; anzi, per  $x$  contenuto in  $e_{n_p}$ , sarà addirittura  $g_p(x, y, y') = f(x, y, y')$ . Indi per tutti gli  $x$  di  $i$  è anche

$$\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(x, z_p(x), z'_p(x)) = \lim_{p \rightarrow \infty} f(x, z_p(x), z'_p(x)) = f(x, z(x), z'(x)),$$

dato che gli insiemi  $e_{n_1}, e_{n_2}, \dots$  formano una successione convergente verso  $i$ , monotona, non decrescente e dato che  $f(x, y, y')$  è continua rispetto a  $(y, y')$ .

Ma d'altra parte, come implicitamente si è già detto, riesce

$$|g_p(x, z_p(x), z'_p(x))| \leq H + \chi(x);$$

quindi nelle (4) si può passare al limite sotto il segno di integrale, ove si faccia tendere  $n$  all'infinito percorrendo la successione  $n_1, n_2, \dots$ .

E in tal modo, come volevamo, si riconosce che la (2) è soddisfatta, se vi si pone  $y(x) = z(x)$ .

2. Passiamo ora al teorema, la cui dimostrazione forma l'oggetto precipuo di questa Nota.

A ciò scegliamo il numero  $\nu > 0$  in modo da aversi  $\sigma(x) - \tau(x) > \frac{2}{\nu}$ ; poniamo poi

$$\sigma_n(x) = \sigma(x) + \frac{1}{n + \nu}, \quad \tau_n(x) = \tau(x) - \frac{1}{n + \nu} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

di guisa che  $\sigma_n(x) < \tau_n(x)$ ; e definiamo le funzioni  $\bar{f}_n(x, y, y')$  nel modo che segue <sup>(1)</sup>.

Poniamo

$$\begin{aligned} \bar{f}_n(x, \sigma(x), \sigma'(x)) &= f(x, \sigma(x), \sigma'(x)), \\ \bar{f}_n(x, \tau(x), \tau'(x)) &= f(x, \tau(x), \tau'(x)) \end{aligned}$$

per ogni  $x$  di  $i$ ; e poniamo del pari

$$\bar{f}_n(x, y, y') = f(x, y, y')$$

anche in tutto l'insieme  $a \leq x \leq b$ ,  $\sigma_n(x) \leq y \leq \tau_n(x)$ ,  $-\infty < y' < +\infty$ .

Per ogni  $x$  di  $i$  e per  $y$  contenuto in  $\sigma(x) \leq y \leq \sigma_n(x)$ , o in  $\tau_n(x) \leq y \leq \tau(x)$  sia, rispettivamente,

$$\bar{f}_n(x, y, \sigma'(x)) = f(x, y, \sigma'(x)) \quad ; \quad \bar{f}_n(x, y, \tau'(x)) = f(x, y, \tau'(x)).$$

(1) Naturalmente, per esaminare il caso che sia  $\sigma(x) \leq \tau(x)$ , si dovrebbero cambiare le definizioni di  $\sigma_n(x)$ ,  $\tau_n(x)$  e quindi  $\bar{f}_n(x, y, y')$ .



Indichiamo ora con  $\psi_n(u)$  la funzione lineare che vale  $\frac{1}{n}$  per  $u = 0$  e si annulla per  $u = \frac{1}{n + v}$ , e poniamo ancora una volta

$$\bar{f}_n(x, y, y') = f(x, y, y')$$

quando

$$\sigma(x) \leq y < \sigma_n(x) \quad , \quad |\sigma'(x) - y'| \leq \psi_n(y - \sigma(x)),$$

oppure quando

$$\tau_n(x) < y \leq \tau(x) \quad , \quad |\tau'(x) - y'| \leq \psi_n(\tau(x) - y),$$

In ogni segmento del tipo

$$x = \xi \quad , \quad y = \eta \quad , \quad \sigma'(\xi) \leq y' \leq \sigma'(\xi) + \psi_n(\eta - \sigma(\xi));$$

$$x = \xi \quad , \quad y = \eta \quad , \quad \sigma'(\xi) - \psi_n(\eta - \sigma(\xi)) \leq y' \leq \sigma'(\xi),$$

con  $a \leq \xi \leq b$  e  $\sigma(\xi) \leq \eta < \sigma_n(\xi)$ , la  $\bar{f}_n(x, y, y')$  è definita in base alla condizione di essere lineare in  $y'$ : di guisa che, posto  $\omega_n(x, y) = \psi_n(y - \sigma(x))$ , sarà rispettivamente

$$\begin{aligned} \bar{f}_n(\xi, \eta, y') &= \frac{1}{\omega_n(\xi, \eta)} [f(\xi, \eta, \sigma'(\xi) + \omega_n(\xi, \eta)) (y' - \sigma'(\xi)) + \\ &\quad + f(\xi, \eta, \sigma'(\xi)) (\sigma'(\xi) + \omega_n(\xi, \eta) - y')]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_n(\xi, \eta, y') &= \frac{1}{\omega_n(\xi, \eta)} [f(\xi, \eta, \sigma'(\xi)) (y' + \omega_n(\xi, \eta) - \sigma'(\xi)) + \\ &\quad + f(\xi, \eta, \sigma'(\xi) - \omega_n(\xi, \eta)) (\sigma'(\xi) - y')]. \end{aligned}$$

Analoga definizione diamo nei segmenti

$$x = \xi \quad , \quad y = \eta \quad , \quad \tau'(\xi) \leq y' \leq \tau'(\xi) + \psi_n(\tau(\xi) - \eta);$$

$$x = \xi \quad , \quad y = \eta \quad , \quad \tau'(\xi) - \psi_n(\tau(\xi) - \eta) \leq y' \leq \tau'(\xi),$$

purchè naturalmente  $\tau_n(\xi) < \eta \leq \tau(\xi)$ .

Il valore di  $\bar{f}_n(x, y, y')$  coincide con quello di  $f(x, y, y')$ , se  $|y'|$  supera una certa costante: di qui e dalle definizioni poste segue subito che per  $h > 0$  conveniente è

$$(6) \quad |\bar{f}_n(x, y, y')| < h\varphi(y') + \chi(x),$$

anzi per  $n$  abbastanza grande si può supporre  $h = 2$ . Inoltre  $\bar{f}_n(x, \sigma(x), y')$  e  $\bar{f}_n(x, \tau(x), y')$  sono lineari in  $y'$ , almeno finchè riesce rispettivamente

$|\sigma'(x) - y'| \leq \frac{1}{n}$ ,  $|\tau'(x) - y'| \leq \frac{1}{n}$ ; quindi per  $\bar{f}_n(x, y, y')$  si possono

ritenere soddisfatte delle disuguaglianze quali le (1), con  $\mu(v) = |v|$  per  $0 \leq |v| \leq \frac{1}{n}$  e  $\lambda(x) = \bar{\lambda}_n(x)$ ,  $\bar{\lambda}_n(x)$  essendo una conveniente funzione, finita e misurabile, che per la (6) si può supporre sommabile in  $i$  (1). Sono poi soddisfatte da  $\bar{f}_n(x, y, y')$  anche le condizioni analoghe alle I), III).

Quindi, se è verificata la IV), esiste una funzione  $\bar{y}_n(x)$ , per cui

$$\begin{aligned} \bar{y}_n(x) = & \int_a^x dt \int_a^t \bar{f}_n(x, \bar{y}_n(u), \bar{y}'_n(u)) du + \\ & + \frac{b-x}{b-a} \alpha + \frac{x-a}{b-a} \left[ \beta - \int_a^b dt \int_a^t \bar{f}_n(u, \bar{y}_n(u), \bar{y}'_n(u)) du \right], \end{aligned}$$

soddisfacente oltre che alla  $\sigma(x) \leq \bar{y}_n(x) \leq \tau(x)$  a una limitazione del tipo  $|\bar{y}'_n(x)| \leq K$ , con  $K$  costante opportuna (indipendente da  $n$ ); ciò segue, come si è già ricordato al n. 1, da quanto è detto nel § 4 della mia Memoria citata (2). Si possono perciò scegliere i numeri naturali  $n_1, n_2, \dots$  in modo che, posto

$$\bar{\zeta}_p(x) = \bar{y}_{n_p}(x),$$

le successioni  $\bar{\zeta}_1(x), \bar{\zeta}_2(x), \dots; \bar{\zeta}'_1(x), \bar{\zeta}'_2(x), \dots$  convergano uniformemente in  $i$ , cfr. n. 1. Si ponga

$$\bar{\zeta}(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{\zeta}_p(x),$$

di guisa che  $\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{\zeta}'_p(x) = \bar{\zeta}'(x)$ ; e

$$\bar{g}_p(x, y, y') = \bar{f}_{n_p}(x, y, y').$$

Allora, se per  $x = \xi$  contenuto in  $i$  è  $\sigma(\xi) < \bar{\zeta}(\xi) < \tau(\xi)$ , da un certo momento in poi sarà  $\bar{g}_p(\xi, \bar{\zeta}_p(\xi), \bar{\zeta}'_p(\xi)) = f(\xi, \bar{\zeta}_p(\xi), \bar{\zeta}'_p(\xi))$ ; e quindi, per  $x = \xi$ ,

$$(7) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{g}_p(x, \bar{\zeta}_p(x), \bar{\zeta}'_p(x)) = f(x, \bar{\zeta}(x), \bar{\zeta}'(x)).$$

(1) Infatti, per ogni  $x$  di  $i$  si può supporre che  $\lambda_n(x)$  sia, a meno del fattore  $n$ , il più grande dei quattro numeri

$$\begin{aligned} & \left| f(x, \sigma(x), \sigma'(x)) - f\left(x, \sigma(x), \sigma'(x) \pm \frac{1}{n}\right) \right|, \\ & \left| f(x, \tau(x), \tau'(x)) - f\left(x, \tau(x), \tau'(x) \pm \frac{1}{n}\right) \right|. \end{aligned}$$

(2) Nella dimostrazione del nostro teorema è quindi implicito l'uso di equazioni assegnate in insiemi più vasti di  $C$ . Naturalmente ciò non vuol dire che io ritenga questo uso inevitabile.

Questa uguaglianza è evidentemente soddisfatta anche nei punti di  $i$  nei quali  $\bar{\kappa}(x) = \sigma(x)$ ,  $\bar{\kappa}'(x) \neq \sigma'(x)$ , oppure  $\bar{\kappa}(x) = \tau(x)$ ,  $\bar{\kappa}'(x) \neq \tau'(x)$ .

Esaminiamo allora cosa succeda in un punto  $\xi$  di  $i$  in cui sia  $\bar{\kappa}(\xi) = \sigma(\xi)$  e  $\bar{\kappa}'(\xi) = \sigma'(\xi)$ ; quanto diremo in questo caso varrà anche quando sia  $\bar{\kappa}(\xi) = \tau(\xi)$ ,  $\bar{\kappa}'(\xi) = \tau'(\xi)$ .

Se il punto  $(\xi, \bar{\kappa}_p(\xi), \bar{\kappa}'_p(\xi))$  non è contenuto in quella porzione di  $C$  in cui  $\bar{g}_p(x, y, y') = \bar{f}_{n_p}(x, y, y') = f(x, y, y')$ , il numero  $\bar{g}_p(\xi, \bar{\kappa}_p(\xi), \bar{\kappa}'_p(\xi))$  è compreso, per costruzione, nell'intervallo determinato dalla più grande e dalla più piccola delle tre quantità

$$f(\xi, \bar{\kappa}_p(\xi), \sigma'(\xi) \pm \psi_{n_p}(\bar{\kappa}_p(\xi) - \sigma(\xi))) \quad , \quad f(\xi, \bar{\kappa}_p(\xi), \sigma'(\xi)),$$

che tendono tutte verso  $f(\xi, \sigma(\xi), \sigma'(\xi)) = f(\xi, \bar{\kappa}(\xi), \bar{\kappa}'(\xi))$ , per  $p \rightarrow \infty$ .

Di qui segue facilmente che la (7) è sempre soddisfatta. E la dimostrazione si completa ragionando come alla fine del numero precedente.

**Astronomia.** — *Fotometria eterocromatica ed indice di colore dei pianeti Nettuno e Vesta.* Nota di L. GIALANELLA, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

1. Il recente felice trasporto della sede del R. Osservatorio Astronomico di Roma sulla collina di Monte Mario ci ha permesso di includere nel programma dei lavori dell'Istituto una serie di osservazioni fotometriche visuali, eseguite principalmente in luce monocromatica adoperando convenienti filtri di luce.

Abbiamo iniziato questo programma col lavoro di cui in questa Nota esponiamo i risultati; lavoro comprendente innanzi tutto l'esame e la taratura dei filtri di luce (eseguita sia con mezzi di laboratorio e sia con osservazioni astronomiche), e poi la determinazione dell'indice di colore dei pianeti *Nettuno* e *Vesta*<sup>(2)</sup>.

(1) Nella seduta del 19 novembre 1938.

(2) Abbiamo anche iniziata e contiamo di portare a termine al più presto una nuova determinazione dell'estinzione atmosferica a Roma sia dal punto di vista *quantitativo* che *qualitativo*, adoperando un metodo che ci pare nuovo, onde riteniamo utile anticiparne un cenno in questa Nota. Abbiamo scelto coppie di stelle circumpolari, formata ciascuna da una stella della costellazione di Cassiopea e da una della costellazione dell'Orsa Maggiore o del Perseo e del Dragone, aventi all'incirca la medesima declinazione e distanti di dodici ore di ascensione retta; di guisa che, iniziando — ad es. — le osservazioni quando le stelle di una coppia sono in meridiano (una nella culminazione superiore ed una in quella inferiore) e ripetendo le osservazioni a convenienti intervalli di tempo (un'ora) per la durata complessiva di sei ore misurandone ogni volta la differenza di splendore (sia a luce diretta che con i filtri colorati), si ha la possibilità di poter esplorare tutto il cielo, dallo zenit all'orizzonte. Assunta allora come  $\Delta_m^*$  vera (differenza

Lo strumento adoperato è stato l'equatoriale medio Cavignato (mm. 155 di apertura e 2240 di distanza focale), a cui abbiamo applicato un fotometro a cuneo di Toepfer, corredato di tre filtri di luce rapidamente intercambiabili (giallo, violetto, rosso), forniti dalla medesima casa costruttrice. Di essi è stato determinato sperimentalmente l'assorbimento presso l'Istituto di Fisica della R. Università di Roma, mediante confronto con lo spettro del ferro<sup>(1)</sup> [v. tavola]. Poscia si è proceduto alla loro taratura mediante osservazioni astronomiche di stelle di cui era noto l'indice di colore. Precisa-

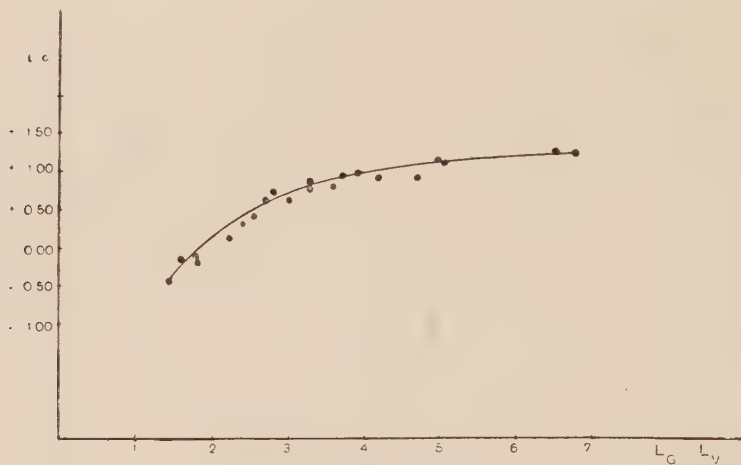


Fig. 1.

mente abbiamo adoperato stelle scelte nel recente Catalogo colorimetrico di E. Öpik<sup>(2)</sup>, il cui elenco è riportato nella seguente tabella I, la quale contiene inoltre per ogni stella l'indice di colore dedotto dal Catalogo, e la

di grandezza vera) quella corrispondente all'osservazione eseguita nel momento in cui le due stelle di ogni coppia hanno la medesima distanza zenitale, ogni altra osservazione fornisce un valore  $\Delta_m$  che introdotto nella nota equazione:

$$\Delta_m - \Delta_m^* = B(\sec \chi_1 - \sec \chi_2)$$

dà un valore del coefficiente di estinzione B [dipendente naturalmente dal tipo spettrale delle stelle] ( $\chi_1$  e  $\chi_2$  sono le due distanze zenitali). Un metodo simile è stato già applicato da E. A. Fath (Lick Bulletin n. 474); ma a noi sembra di averlo migliorato scegliendo stelle di uguale declinazione, e quindi eliminando del tutto i notevoli inconvenienti dovuti ad improvvise e inapprezzabili variazioni della trasparenza atmosferica tra le varie osservazioni.

(1) Mi è grato rinnovare qui i miei più vivi ringraziamenti al prof. Edoardo Amaldi.

(2) *On the relation of Absolute Magnitude to Colour, Spectrum and Proper Motion*. «Pubbl. Observatoire Astronom. de Tartu», to. XXVII, n. 1, 1929.

differenza  $L_G - L_V$  delle letture al fotometro con i filtri *giallo* e *violetto* (gli unici due che abbiamo potuto poi utilizzare per le osservazioni di *Nettuno* e *Vesta*, dato il tenue splendore di questi). Le osservazioni sono state fatte soltanto in serate completamente serene e limpide. Ogni stella è stata osservata almeno in tre sere; e per ogni sera ciascuna osservazione consisteva di dieci puntate, per cui i valori ottenuti e riportati nella tabella sono la media di almeno trenta puntate per ognuno dei due filtri adoperati.

TABELLA I.

*Taratura dei filtri « giallo » e « azzurro ».*

N.	Stella	i. c.	$L_G - L_V$
1	$\epsilon$ Orionis	— 0.44	1.43
2	$\sigma$ Leonis	— 0.21	1.81
3	$\tau$ Virginis	— 0.15	1.75
4	$\rho$ Leonis	— 0.15	1.58
5	$\beta$ Coronae borealis	+ 0.14	2.21
6	$\tau$ Bootis	+ 0.34	2.40
7	$\eta$ Bootis	+ 0.44	2.52
8	$\gamma$ Persei	+ 0.63	3.00
9	$\beta$ Aquarii	+ 0.68	2.72
10	$\epsilon$ Leonis	+ 0.77	2.82
11	$\gamma$ Piscium	+ 0.77	3.30
12	$\eta$ Pegasi	+ 0.80	3.60
13	$\alpha$ Aquarii	+ 0.88	3.26
14	$\epsilon$ Virginis	+ 0.91	4.17
15	$\epsilon$ Bootis	+ 0.90	4.7 $\sigma$
16	$\zeta$ Cygni	+ 1.00	3.70
17	$\epsilon$ Cygni	+ 1.02	3.91
18	$\alpha$ Serpentis	+ 1.20	4.99
19	$\iota$ Draconis	+ 1.19	5.11
20	$\rho$ Bootis	+ 1.26	6.77
21	$\mu$ Leonis	+ 1.30	6.52



Con i dati di questa Tabella ho costruito il diagramma rappresentato in figura, sul quale sono riportate in ascisse le differenze di letture  $L_G - L_V$  e in ordinate gli indici di colore *i. c.*

2. Le osservazioni dei pianeti *Nettuno* e *Vesta* per la determinazione dei rispettivi indici di colore sono state fatte con il medesimo metodo adoperato per le stelle di taratura dei filtri. Ho osservato i pianeti durante le rispettive opposizioni del 1938 e precisamente *Nettuno* in 10 serate dei mesi marzo-aprile e *Vesta* in 11 serate dei mesi maggio-giugno. Per tutti e due i pianeti ho assunto un unico valore per il rapporto  $K = \frac{i. c.}{L_G - L_V}$ , dato l'andamento sensibilmente rettilineo del diagramma nel breve tratto che ci interessa e che è compreso tra  $L_G - L_V = 2.73$  e  $L_G - L_V = 3.50$ . Più precisamente questo tratto del diagramma ci dà  $K = 0.240$  dalle stelle seguenti:

TABELLA II.

N.	Stella	K
8	$\gamma$ Persei	0.21
9	$\beta$ Aquarii	0.25
10	$\epsilon$ Leonis	0.27
11	$\gamma$ Piscium	0.23
12	$\eta$ Pegasi	0.22
13	$\alpha$ Aquarii	0.27
14	$\epsilon$ Virginis	0.22
15	$\epsilon$ Bootis	0.19
16	$\zeta$ Cygni	0.28
17	$\epsilon$ Cygni	0.26

Le seguenti tabelle III-IV, infine, contengono i risultati delle osservazioni dei pianeti: per ogni serata sono dati i valori delle singole letture (medie di venti puntate) e gli indici di colore ricavati.

TABELLA III.

*Indice di colore di Nettuno.*

Data	$L_G$	$L_V$	$L_G - L_V$	i. c.
1938				
Marzo . 30	43.30	40.47	2.83	+ 0.68
Aprile . 5	41.62	38.68	2.74	+ 0.65
» . 6	38.45	35.77	2.68	+ 0.64
» . 17	38.45	35.84	2.61	+ 0.63
» . 21	39.63	36.96	2.67	+ 0.64
» . 22	36.91	34.08	2.83	+ 0.68
» . 25	38.18	35.46	2.72	+ 0.65
» . 26	37.13	34.67	2.46	+ 0.59
» . 27	41.75	38.82	2.93	+ 0.70
Maggio. . 2	44.17	41.37	2.80	+ 0.67

TABELLA IV.

*Indice di colore di (4) Vesta.*

Data	$L_G$	$L_V$	$L_G - L_V$	i. c.
1938				
Maggio. . 31	52.49	49.09	3.40	+ 0.82
Giugno. . 2	51.04	47.35	3.69	+ 0.89
» . 3	51.46	47.81	3.65	+ 0.88
» . 4	50.77	47.35	3.42	+ 0.82
» . 16	48.25	44.87	3.38	+ 0.81
» . 17	46.93	43.30	3.63	+ 0.87
» . 20	45.98	42.77	3.21	+ 0.77
» . 21	48.31	44.64	3.67	+ 0.88
» . 22	47.74	44.28	3.46	+ 0.83
» . 24	48.06	44.65	3.41	+ 0.82
» . 27	47.57	44.02	3.55	+ 0.85

Le medie dei valori così ottenuti danno il risultato:

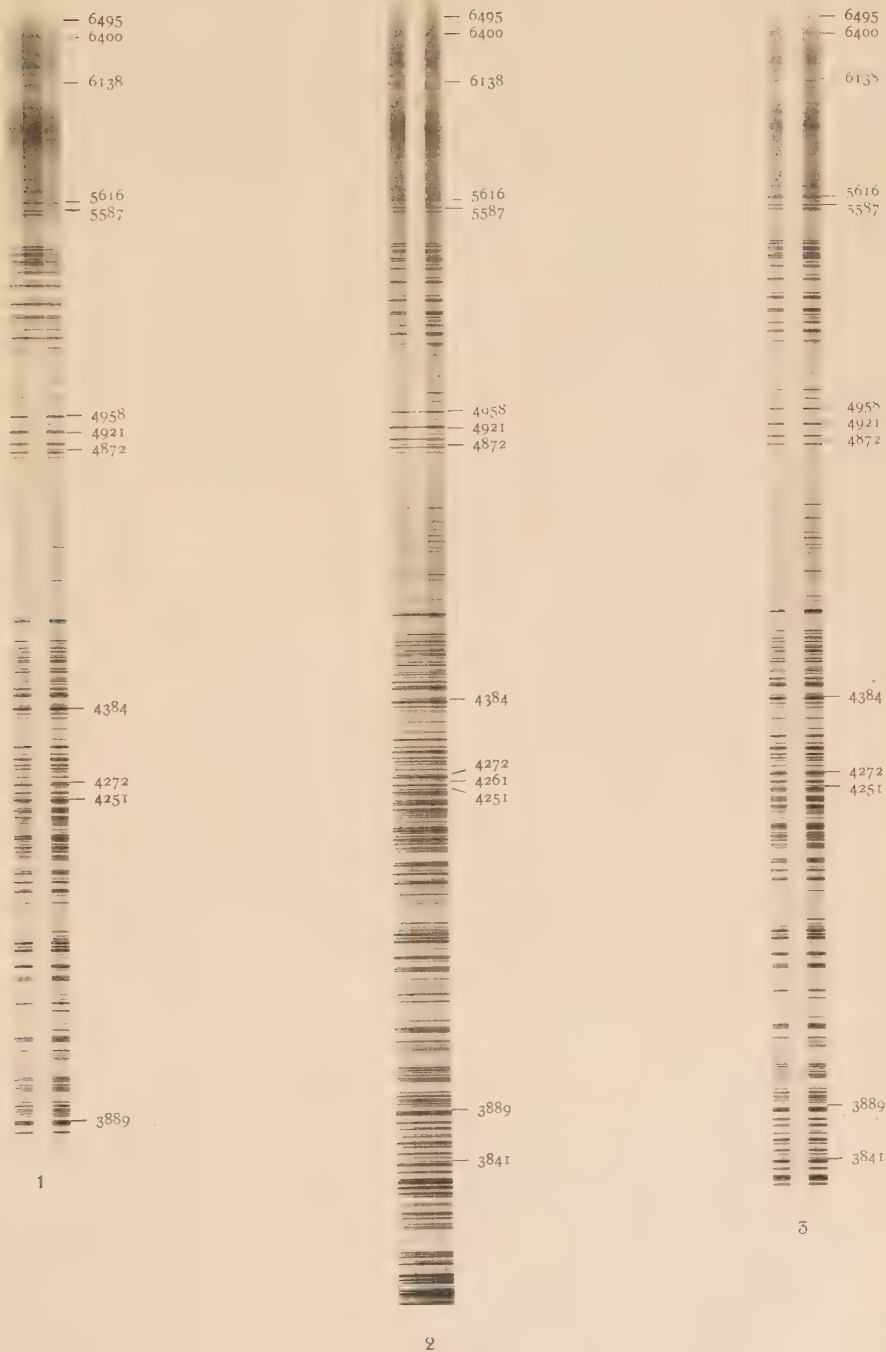
indice di colore di *Nettuno*                    + **0.653**  $\pm$  0.006 (e. p.)

indice di colore di (4) *Vesta*                    + **0.838**  $\pm$  0.006 (e. p.)

Di *Nettuno* era già stata fatta dal Graff una determinazione di indice di colore con metodo fotografico <sup>(1)</sup>, ed era stato ottenuto il valore + 0.654. Di *Vesta* non mi consta, secondo le ricerche fatte, che si sia mai determinato l'indice di colore (di piccoli pianeti la più numerosa determinazione di indice di colore è quella contenuta in A. J., vol. XXIV; e tra questi manca appunto *Vesta*).

(1) *Handbuch Aph.*, vol. VII, p. 412 e «Sternw: Wien Mitt.», n. 1, p. 25 (1931)

U. A.



Spettri di assorbimento dei filtri di luce del fotometro Toepler - Spettro del ferro per confronto.

1 filtro *giallo*. 2 filtro *violetto*. 3 filtro *rosso*.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 3 dicembre 1938 - Anno XVII*

*Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Nuove formole di maggiorazione per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine ellittico-paraboliche*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> del Corrisp. M. PICONE.

Dedicaì già, in passato, nel 1927 una Nota lincea<sup>(3)</sup> e nel 1929 una Memoria degli « Annali di Matematica »<sup>(4)</sup> all'ottenimento di semplici formole atte a fornire quantitative limitazioni dei valori assunti, in un dato dominio, dalle soluzioni di equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine, ellittico-paraboliche, in funzione dei valori assegnati, alle soluzioni stesse, sulla frontiera del dominio.

È ben nota l'importanza di tali formole e per i procedimenti di calcolo e per ricerche puramente esistenziali, in ispecie nell'indirizzo della moderna analisi funzionale.

Le formole già ottenute sono però utilizzabili soltanto in problemi, tipo problema di Dirichlet, in cui sono prescritti sulla frontiera del dominio i valori della soluzione, laddove, che io mi sappia, non sono state ancor date

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Presentata nella seduta del 3 dicembre 1938.

(3) PICONE, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*. Questi « Rendiconti », febbraio 1927.

(4) PICONE, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*. « Annali di Matematica pura e applicata », 1929; cfr. anche: PICONE, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo*. « Mathematische Annalen », 1929.

formole per problemi nei quali sono assegnati, in ogni punto della frontiera del dominio o di una sua parte, i valori di una certa combinazione lineare della soluzione e della derivata di questa secondo un determinato asse spiccato per il punto e penetrante nel dominio, in particolare per problemi tipo Neumann o tipo misto Dirichlet-Neumann.

Scopo di questa breve Nota è di far conoscere le formole, a cui sono recentemente pervenuto, atte a tali problemi, che riescono — inaspettatamente — del tutto simili a quelle conosciute sopradette.

1. — *Equazioni ellittico-paraboliche non negative.* — Siano: A un campo, cioè un insieme aperto di punti, dello spazio euclideo  $S_{(r)}$  a  $r$  dimensioni, del quale diremo X un punto generico e  $x_1, x_2, \dots, x_r$  le coordinate di questo,  $a_{hk}(X), b_h(X) (h, k = 1, 2, \dots, r) c(X), f(X)$ , assegnate funzioni reali del punto X, continue in ogni punto di A, e consideriamo in A l'equazione

$$(1) \quad E[u] = \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h^{1,r} b_h(X) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(X) u = f(X),$$

nella funzione incognita  $u$ , pur essa reale, che sarà detta soluzione in A dell'equazione, se è continua in ogni punto di A, con tutte le derivate parziali che compaiono nell'equazione e verifica l'equazione stessa.

Una funzione del punto X si dirà *regolare, biregolare*, in un insieme B di punti, rispetto all'equazione (1), se, essendo continua in ogni punto *interno* a B, con le sue derivate parziali che compaiono nell'equazione, riesce, inoltre, rispettivamente, continua, continua con *tutte* le sue derivate parziali del primo ordine in ogni punto di B che sia di accumulazione di punti interni a B. Ad una soluzione della (1), in A, si può dunque richiedere d'essere, per esempio, regolare, biregolare in  $A + FA^{(1)}$ .

Occorre ben chiarire, e basterà perciò un esempio, il grado di generalità delle date definizioni. Sia, per esempio, A il campo di un piano la cui frontiera sia costituita dal punto O e dalla circonferenza di centro in O e di raggio R; il dominio  $D = A + FA$  è il cerchio di centro in O e di raggio R, ma non è detto, secondo quelle definizioni, che una funzione regolare (biregolare) nel cerchio D, rispetto all'equazione (1), sia dotata di derivate parziali prime e seconde (di derivate parziali seconde) in ogni punto interno a D; nel centro O di questo, che fa parte di FA, vi è continuità della funzione (della funzione e di tutte le sue derivate parziali prime) ma non si sa nulla intorno alla eventuale derivabilità parziale (intorno alla eventuale derivabilità parziale del second'ordine) di questa.

(1) Se con una lettera si indica un insieme di punti, con la stessa lettera preceduta dalla F si indicherà la frontiera dell'insieme.

Se, per ogni punto  $X$  di  $A$ , la forma quadratica

$$(2) \quad \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(X) \lambda_h \lambda_k,$$

negli  $r$  parametri reali  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , riesce definita o semidefinita positiva, l'equazione (1), o l'espressione  $E[u]$ , sarà detta *ellittico-parabolica non negativa* in  $A$ , e tali saranno anche dette le espressioni

$$E_o(u) = \sum a_{hk}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum b_h(X) \frac{\partial u}{\partial x_h}, \quad E_{oo}[u] = \sum a_{hk}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}.$$

Supporremo che, essendo l'equazione (1) ellittico-parabolica non negativa in  $A$ , per ogni punto  $X$  di  $FA$ , sia possibile spiccare un asse  $l$  in modo che su questo esista un punto  $Y$  tale il punto  $Y$  ed ogni altro interno al segmento  $XY$  appartenga ad  $A$ , sia cioè possibile, come diremo, spiccare per ogni punto  $X$  di  $FA$  un asse *penetrante* in  $A$ . Una funzione  $u$  biregolare in  $A + FA$  possiede, in ogni punto  $X$  di  $FA$ , secondo un asse  $l$  spiccato da  $X$  e penetrante in  $A$ , la derivata  $du/dl$  e tale derivata è, su  $FA$ , funzione continua di  $X$  se tale è l'asse  $l$ . Orbene, ciò posto, noi vogliamo considerare il seguente generale problema di frontiera:

*Sono definiti in ogni punto  $X$  di  $FA$  un asse  $l$  penetrante in  $A$  e tre funzioni reali e limitate  $\alpha(X), \beta(X), g(X)$ , con la condizione che sia sempre*

$$(3) \quad \alpha(X) \geq 0, \quad \alpha(X) + |\beta(X)| > 0;$$

*costruire, in  $A$ , una soluzione della (1), biregolare in  $A + FA$ , che verifichi l'ulteriore equazione:*

$$(4) \quad L[u] \equiv \alpha(X) \frac{du}{dl} + \beta(X) u = g(X), \quad \text{su } FA.$$

Ai teoremi di unicità per un tale problema nonchè ad utili formole di maggiorazione per la soluzione  $u$  si perviene fondandosi sul seguente teorema:

I. *Sia  $A$  limitato e sia possibile definire in  $A + FA$  una funzione  $\omega(X)$ , biregolare e positiva, per la quale riesca*

$$(5) \quad E[\omega] < 0, \quad \text{in } A, \quad L[\omega] < 0, \quad \text{su } FA,$$

*allora, per ogni soluzione del posto problema si ha:*

$$(6) \quad \begin{cases} u(X) \leq 0, & \text{se } f(X) \geq 0 \text{ e } g(X) \geq 0, \\ u(X) \geq 0, & \text{se } f(X) \leq 0 \text{ e } g(X) \leq 0. \end{cases} \quad (1).$$

(1) Una relazione, per una funzione, scritta senza precisare la posizione del punto da cui essa dipende, deve intendersi valida in tutto l'insieme di definizione della funzione.

Posto infatti,  $u = v\omega$ ,

$$E_{\omega} = \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h^{1,r} \left( b_h + \frac{2}{\omega} \sum_k^{1,r} a_{hk} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_h} + \frac{E[\omega]}{\omega},$$

$$L_{\omega} = \alpha \frac{d}{dl} + \frac{L[\omega]}{\omega},$$

si trova che per  $v$ , essa pure biregolare in  $A$ , sussistono le equazioni

$$(7) \quad E_{\omega}[v] = \frac{f}{\omega}, \text{ in } A, \quad L_{\omega}[v] = \frac{g}{\omega}, \text{ su } FA.$$

Sia  $f \geq 0$  e  $g \geq 0$ . In ogni punto  $X$  di  $FA$  in cui  $\alpha(X) = 0$  si ha  $u = g/L \leq 0$ , in ogni punto in cui  $\alpha(X) > 0$ , la  $v$  non può neppure essere positiva, poichè, in tale ipotesi, la seconda delle (5) ci assicura della crescita di  $v$ , in  $X$ , nella direzione e nel verso dell'asse  $l$  e quindi della esistenza di punti di  $A$  nei quali la  $v$  assume valori positivi maggiori di quelli assunti sulla frontiera di  $A$ , e pertanto che  $v$  sarebbe dotata di un massimo positivo in  $A$ , ciò che [teorema I della Nota citata in <sup>(3)</sup> a p. 331] è impossibile per il verificarsi della prima delle (7) e delle (5). È dunque  $v \leq 0$  su tutta  $FA$  e quindi, in virtù dello stesso teorema,  $v \leq 0$  in  $A + FA$ , e pertanto  $u \leq 0$ , del pari in  $A + FA$ .

Nelle ipotesi del teorema riesce dunque  $u \equiv 0$  se  $f \equiv g \equiv 0$  e pertanto:

II. *Nelle ipotesi del teorema I, sussiste, per il posto problema di frontiera, il teorema d'unicità.*

Vediamo ora alcuni esempi nei quali sono soddisfatte le ipotesi del teorema I.

I *Esempio.* — Designando  $p$  e  $q$  due costanti positive, riesca in  $A$ , supposto limitato,  $a_{11} > 0$ ,  $c \leq 0$ ,  $b_1/a_{11} \leq q$ , e, su  $FA$ ,  $\beta \leq -p < 0$ . Posto

$$\omega = k - \frac{e^{-(q+1)x_1}}{q+1}$$

si ha

$$E[\omega] = a_{11} e^{-(q+1)x_1} \left( \frac{b_1}{a_{11}} - q - 1 \right) + c\omega, \quad \frac{L[\omega]}{\omega} \leq \frac{\alpha}{\omega} \frac{d\omega}{dl} - p,$$

$$\left| \frac{\alpha}{\omega} \frac{d\omega}{dl} \right| \leq \alpha e^{-(q+1)x_1} \left/ \left( k - \frac{e^{-(q+1)x_1}}{q+1} \right) \right|,$$

e basta quindi dare a  $k$  valori positivi abbastanza elevati perchè, con  $\omega > 0$  e  $E[\omega] < 0$ , riesca  $L[\omega]/\omega \leq -p/2$ , su  $FA$ .

II *Esempio.* — In  $A$  sono limitati i coefficienti  $a_{hk}$ ,  $b_h$  ( $h, k = 1, 2, \dots, r$ ) e, con  $m$  costante positiva, si ha  $c \leq -m$ , e, su  $FA$ ,  $\beta \leq 0$ . Detta  $\tau(X)$  una funzione biregolare in  $A + FA$  per la quale si abbia sempre  $d\tau/dl < 0$ , su  $FA$ , si ponga  $\omega = k + \tau$ . Si potrà assumere la costante positiva  $k$  talmente grande da far risultare  $\omega > 0$  in  $A + FA$  e  $E[\omega] < 0$  in  $A$ , e sarà

allora anche  $L[\omega] < 0$  su FA. Che se  $\alpha(X) > 0$  sulla parte F'A di FA e  $\alpha(X) = 0$  su FA — F'A, basterà richiedere che riesca  $d\tau/dl < 0$  su F'A.

Dal primo esempio, applicando all'equazione  $E_\omega[v] = 0$  il ragionamento già fatto, per l'equazione  $E[u] = 0$ , segue il teorema:

III. Sia A limitato e ivi positivo il coefficiente  $a_{11}$ . Se è possibile definire in  $A + FA$  una funzione  $\omega(X)$ , positiva e biregolare, per la quale riesca, in A,

$$E[\omega] \leq 0,$$

e limitata superiormente la funzione

$$(8) \quad \frac{1}{a_{11}} \left( b_1 + \frac{2}{\omega} \sum_k^{1,r} a_{1k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right),$$

e, su FA, con  $p$  costante positiva,

$$(9) \quad \frac{L[\omega]}{\omega} \leq -p < 0,$$

allora, per ogni soluzione  $u$  del posto problema di frontiera valgono le (6).

Dai teoremi I e III subito discendono i seguenti di maggiorazione:

IV. Nelle ipotesi del teorema I od in quelle del teorema III, se  $\omega$  verifica la (9), per ogni soluzione  $u$  dell'equazione omogenea  $E[u] = 0$ , biregolare in  $A + FA$ , si ha:

$$(10) \quad |u(X)| \leq \frac{\omega(X)}{p} \text{ estrsup}_{FA} \left| \frac{L[u]}{\omega} \right| \quad (1),$$

in particolare, se  $\beta \leq -1$  e si può porre  $\omega \equiv 1$  (e quindi se  $c < 0$ , oppure  $c \leq 0$ ,  $a_{11} > 0$  e  $b_1/a_{11}$  è limitato superiormente)

$$|u(X)| \leq \text{estr sup}_{FA} |L[u]|,$$

se  $\alpha \equiv 1$ ,  $\beta \equiv 0$ ,

$$|u(X)| \leq \omega(X) \max_{FA} \left( \frac{1}{\omega} \left| \frac{du}{dl} \right| \right) / \min_{FA} \left| \frac{d \log \omega}{dl} \right|.$$

Posto, invero,  $u = v\omega$ , detto  $M$  l'estremo superiore su FA di  $|L[u]/\omega| = |L_\omega[v]|$ , si ha

$$E_\omega \left[ v - \frac{M}{p} \right] = - \frac{E[\omega]}{\omega} \frac{M}{p} \geq 0, \quad E_\omega \left[ v + \frac{M}{p} \right] = \frac{E[\omega]}{\omega} \frac{M}{p} \leq 0,$$

$$L_\omega \left[ v - \frac{M}{p} \right] = L_\omega[v] - \frac{L[\omega]}{p\omega} M \geq L_\omega[v] + M \geq 0,$$

$$L_\omega \left[ v + \frac{M}{p} \right] = L_\omega[v] + \frac{L[\omega]}{p\omega} M \leq L_\omega[v] - M \leq 0,$$

(1) Con  $\max_T f$ ,  $\min_T f$ ,  $\text{estr sup}_T f$ ,  $\text{estr inf}_T f$  designamo il massimo, il minimo, l'estremo superiore, l'estremo inferiore di una funzione  $f$  in un insieme  $T$



donde, in forza del teorema I o del teorema III,  $|v| \leq M/p$ , cioè la (10).

V. Nelle stesse ipotesi, se esiste una funzione  $w(X)$ , non negativa e biregolare in  $A + FA$ , per la quale riesca

$$(11) \quad E_{\omega}[w] \leq -1, \quad L_{\omega}[w] \leq 0,$$

per ogni soluzione  $u$  della (1) biregolare in  $A + FA$ , si ha:

$$(12) \quad |u(X)| \leq \left( \frac{1}{p} \text{estr sup}_{FA} \left| \frac{L[u]}{\omega} \right| + w(X) \text{estr sup}_A \frac{|f|}{\omega} \right) \omega(X).$$

Posto, invero,  $M = \text{estr sup}_{FA} |L[u]/\omega|$ ,  $N = \text{estr sup}_A |f/\omega|$ , si ha

$$E_{\omega} \left[ Nw + \frac{M}{p} - v \right] = N E_{\omega}[w] + \frac{E[\omega]}{\omega} \frac{M}{p} - \frac{f}{\omega} \leq -N - \frac{f}{\omega} + \frac{E[\omega]}{\omega} \frac{M}{p} \leq 0,$$

$$E_{\omega} \left[ -Nw - \frac{M}{p} - v \right] = -N E_{\omega}[w] - \frac{E[\omega]}{\omega} \frac{M}{p} - \frac{f}{\omega} \geq N - \frac{f}{\omega} - \frac{E[\omega]}{\omega} \frac{M}{p} \geq 0,$$

$$L_{\omega} \left[ Nw + \frac{M}{p} - v \right] = N L_{\omega}[w] + \frac{L[\omega]}{f\omega} M - L_{\omega}[v] \leq 0,$$

$$L_{\omega} \left[ -Nw - \frac{M}{p} - v \right] = -N L_{\omega}[w] - \frac{L[\omega]}{f\omega} M - L_{\omega}[v] \geq 0,$$

donde, in forza del teorema I o del teorema III,  $|v(X)| \leq Nw(X) + M/p$ .

Ovviamente, è utile, per le applicazioni, possedere l'espressione di una funzione  $w(X)$  che possa essere adoperata per la (12) e la daremo in qualche caso particolare. Si verifica subito che, se, con  $a, b, \sigma, x_1^0$  e  $\delta$  costanti, risulta  $a_{11} \geq a > 0$ ,  $|b_1| \leq b$ ,  $c \leq 0$ ,  $\alpha \leq \sigma$ ,  $\beta \leq -1$ ,  $x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^0 + \delta$ , la funzione

$$w(X) = \frac{a}{2b^2} \left( e^{\frac{2b}{a}\delta} - e^{\frac{2b}{a}(x_1 - x_1^0)} \right) + \frac{\sigma}{b} e^{\frac{2b}{a}\delta},$$

soddisfa le (11) e si può porre  $\omega \equiv p = 1$ , onde la (12) fornisce:

$$|u(X)| \leq \text{estr sup}_{FA} |L[u]| + \frac{\sigma + \delta}{b} e^{\frac{2b}{a}\delta} \text{estr sup}_A |f|.$$

Se  $a_{11} \geq a > 0$ ,  $b_1 \geq 0$ ,  $c < 0$ ,  $\beta \leq -1$ ; oppure  $a_{11} \geq a > 0$ ,  $b_1 \geq 0$ ,  $c \leq 0$  e  $b_1$  è limitata, la funzione

$$w(X) = \frac{\delta^2 - (x_1 - x_1^0)^2}{2a} + \frac{\sigma\delta}{a},$$

soddisfa le (11) e potendosi ancora porre  $\omega \equiv p = 1$ , segue dalla (12),

$$|u(X)| \leq \text{estr sup}_{FA} |L[u]| + \frac{2\sigma\delta + \delta^2}{2a} \text{estr sup}_A |f|.$$

Se, per la funzione  $\omega$  riesce  $E[\omega]/\omega \leq -m < 0$ , con  $m$  costante, ed è  $\beta(X) \leq 0$ , con la  $w(X) \equiv 1/m$  si soddisfa le (11) e se è verificata la (9) si avrà

$$(13) \quad |u(X)| \leq \left( \frac{1}{p} \text{estr sup}_{FA} \left| \frac{L[u]}{\omega} \right| + \frac{1}{m} \text{estr sup}_A \left| \frac{f}{\omega} \right| \right) \omega(X).$$

Se, con  $c(X) \leq -m < 0$ ,  $\beta(X) \leq 0$ , i coefficienti  $a_{hk}$  e  $b_h$  riescono limitati in  $A$ , sono, come abbiamo visto, soddisfatte le ipotesi del teorema I e pertanto, se per una soluzione  $u$  della (1) si ha  $L[u] = 0$  su  $FA$ , il detto teorema, applicato alle funzioni  $N/m - u$  e  $-N/m - u$ , fornisce l'elegante maggiorazione:

$$(14) \quad |u(X)| \leq \frac{1}{m} \text{estr sup}_A |f|.$$

2. — **Equazioni totalmente paraboliche.** — Considereremo tali equazioni [cfr. i lavori citati in (4) a p. 1] nella forma

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(X,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h^{1,r} b_h(X,t) \frac{\partial u}{\partial x_h} + \\ + c(X,t)u - f(X,t) \equiv E[u] - f,$$

in un campo  $B$  dello spazio  $S_{(r+1)}$  a  $r+1$  dimensioni del punto  $(X,t)$  di coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_r, t$ , nel quale l'espressione  $E[u]$  si mantiene ellittico-parabolica non negativa. Della frontiera di  $B$  distingueremo due parti  $F'B$  e  $F''B$ ,  $F'B = FB - F''B$ , designando  $F''B$  la totalità dei punti di  $FB$  per i quali sono verificate le seguenti proprietà: *a)* se  $(X_0, t_0)$  è un punto di  $F''B$ , esiste un numero positivo  $\rho(X_0, t_0)$  tale che tutti i punti  $(X,t)$  per cui  $t = t_0$  e  $\overline{X_0 X} < \rho$ , appartengono a  $F''B$ ; *b)* ogni asse spiccato per un punto  $(X,t)$  di  $F''B$  penetra in  $B$  se ha la direzione dell'asse  $t$  e verso contrario, penetra nel complementare di  $B$  se ha la direzione e il verso dell'asse  $t$ . Una funzione  $u(X,t)$  sarà detta soluzione, in  $B$ , della (15) se è continua in ogni punto di  $B$  e di  $F''B$  con le sue derivate parziali che compaiono nella (15) e verifica l'equazione stessa. Una funzione del punto  $(X,t)$  si dirà *regolare, biregolare*, in un insieme  $C$  di punti, rispetto all'equazione (15), se, essendo continua in ogni punto interno a  $C$  e di  $F''C$ , con le sue derivate parziali che compaiono nella (15), riesce, inoltre, rispettivamente, continua, continua con tutte le sue derivate parziali del primo ordine, in ogni punto di  $C - F''C$  che sia di accumulazione di punti interni a  $C$ . Ciò posto, andiamo ad enunciare il generale problema di frontiera che considereremo per la (14):

Sono definiti, in ogni punto  $X$  della parte  $F'B$  di  $FB$ , un asse  $l(X,t)$  penetrante in  $B$  e tre funzioni reali e limitate  $\alpha(X,t)$ ,  $\beta(X,t)$ ,  $g(X,t)$ , con la condizione che sia sempre

$$\alpha(X,t) \geq 0 \quad \alpha(X,t) + |\beta(X,t)| > 0;$$

costruire, in  $B$ , una soluzione della (15), biregolare in  $B + FB$ , che verifichi l'ulteriore equazione:

$$(16) \quad L(u) \equiv \alpha(X, t) \frac{du}{dt} + \beta(X, t) u = g(X, t), \quad \text{su } F'B.$$

Un avvicinamento dei ragionamenti fatti al numero precedente con quelli dei lavori citati in <sup>(4)</sup> a p. 331, consente di pervenire facilmente, per il problema ora posto, a teoremi analoghi a quelli qui ottenuti per le equazioni (1) e (4). Ci limiteremo a dare il solo enunciato di due di essi.

I'. Sia  $B$  limitato e sia possibile definire una funzione  $\omega(X, t)$ , positiva e biregolare in  $B + FB$ , per la quale  $E[\omega] - \frac{\partial \omega}{\partial t}$  riesca in  $B$  limitata superiormente e

$$L[\omega] < 0 \quad \text{su } F'B,$$

allora, per ogni soluzione del posto problema si ha:

$$u(X, t) \leq 0, \quad \text{se } f(X, t) \geq 0 \quad \text{e } g(X, t) \geq 0,$$

$$u(X, t) \geq 0, \quad \text{se } f(X, t) \leq 0 \quad \text{e } g(X, t) \leq 0.$$

IV'. Sia  $B$  limitato e sia possibile definire una funzione  $\omega(X, t)$ , positivo e biregolare in  $B + FB$ , per la quale riesca

$$E[\omega] - \frac{\partial \omega}{\partial t} \leq 0, \quad \text{in } B, \quad \frac{L[\omega]}{\omega} \leq -p < 0, \quad \text{su } F'B,$$

per ogni soluzione dell'equazione omogenea  $\frac{\partial u}{\partial t} = E[u]$ , biregolare in  $B + FB$ , si ha:

$$|u(X, t)| \leq \frac{\omega(X, t)}{p} \text{ estrsup}_{F'B} \left| \frac{L[u]}{\omega} \right|.$$

**Matematica.** — *Nuove determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> del Corrisp. M. PICONE.

Siano:  $A$  un campo, cioè un insieme aperto di punti, dello spazio euclideo  $S_{(r)}$  a  $r$  dimensioni, del quale diremo  $X$  un punto generico e  $x_1, \dots, x_r$  le coordinate di questo,  $a_{ikh}(X), b_{ih}(X), c_i(X)$  ( $h, k = 1, \dots, r; i = 0, \dots, n$ ) assegnate funzioni reali del punto  $X$ , continue in ogni punto di  $A$ ,  $f(X, t)$  una funzione reale, essa pure data, del punto  $X$  e di una variabile numerica  $t$ , continua per  $X$  in  $A$  e per  $t$  qualsivoglia, ci proponiamo di considerare la determinazione delle soluzioni  $u(X, t)$  di equazioni lineari a derivate parziali, d'ordine  $\leq n + 2$ , del seguente tipo generale:

$$(1) \sum_{i=0}^n \left( \sum_{h,k}^{1,r} a_{ikh}(X) \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_h} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + \sum_h^{1,r} b_{ih}(X) \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + c_i(X) \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right) = f(X, t),$$

intendendo per *soluzione* dell'equazione una funzione reale  $u(X, t)$  delle variabili  $X$  e  $t$  che, con le sue derivate parziali che compaiono nell'equazione, sia continua per  $X$  in  $A$  e, per ogni  $X$ , al variare di  $t$  in un certo intervallo  $[T_1(X), T_2(X)]$ , contenente lo zero, e verifichi l'equazione.

Mi sono posto la ricerca — che, del resto, si offre del tutto spontaneamente, comparando nella (1) le derivate del 2° ordine rispetto alle  $x_h$  e di  $n$ -mo rispetto alla  $t$  — di teoremi di unicità relativi a problemi di integrazione dell'equazione (1) quando alla soluzione si prescrivano condizioni del seguente tipo: *Assegnate le funzioni  $u_i(X)$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ),  $\alpha(X)$ ,  $\beta(X)$ ,  $v(X, t)$ , le  $u_i$  definite in  $A$ , le  $\alpha$  e  $\beta$  sulla frontiera  $FA$  di  $A$ , la  $v$  per  $X$  su  $FA$  e, per ogni  $X$ , al variare di  $t$  in un intervallo  $[\tau_1(X), \tau_2(X)]$ , contenente lo zero, pur esso definito per  $X$  su  $FA$ , una soluzione  $u$  della (1) deve verificare le  $n$  condizioni iniziali, rispetto a  $t$ ,*

$$(2) \left[ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right]_{t=0} = u_i(X) \quad (i = 0, \dots, n-1),$$

e, rispetto al punto  $X$ , la condizione di frontiera

$$(3) \quad L[u] \equiv \alpha(X) \frac{du}{dt} + \beta(X) u = v(X, t),$$

per  $X$  su  $FA$  e  $\tau_1(X) \leq t \leq \tau_2(X)$ ,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Presentata nella seduta del 3 dicembre 1938.

ove designa un asse assegnato in ogni punto  $X$  di  $FA$ , in cui sia  $\alpha \neq 0$ , indipendente da  $t$ , spiccato per  $X$  e penetrante in  $A$  <sup>(1)</sup>.

Scopo della Nota presente è appunto quello di far conoscere i notevoli risultati che mi ha dato la ricerca sopradetta, i quali, a mio avviso, aprono nuovissimi attraenti campi di indagini esistenziali relative alle stabilite condizioni atte a determinare le soluzioni della (1). Si scopre che vi sono classi di equazioni del tipo (1) per le quali le condizioni (3) alla frontiera sono sovrabbondanti! Si consideri, per esempio, l'equazione

$$(4) \quad \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

per  $x$  variabile nell'intervallo  $(x', x'')$  dell'asse  $x$ . Per  $n = 1$ , la determinazione di una soluzione della (4), con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{per} \quad x' < x < x'',$$

e di frontiera

$$(5) \quad u(x', t) = v'(t), \quad u(x'', t) = v''(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

con  $\tau$  costante assegnata, è, com'è noto, conseguita nel dominio rettangolare  $R$  del piano  $(x, t)$  di punti estremi  $(x', 0)$ ,  $(x'', \tau)$ . Per  $n = 2$ , la determinazione di  $u$  è conseguita, com'è noto, nello stesso  $R$ , quando si prescrivano le condizioni iniziali

$$(6) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \text{per} \quad x' < x < x'',$$

e di frontiera (5). Però qui si presenta la notevole e ben nota circostanza che già le sole condizioni iniziali (6) valgono a determinare  $u$  nei punti di  $R$  contenuti nel triangolo limitato dall'asse  $x$  e dalle rette (caratteristiche)  $x - t = x'$ ,  $x + t = x''$ . Ebbene, ecco un risultato, contenuto nei sopradetti, che, nel campo non analitico, io reputo assolutamente nuovo ed inatteso e già, per quanto particolare, meritevole di ricerche esistenziali:

*Non appena è  $n > 2$ , le sole condizioni iniziali (2) valgono a determinare la soluzione  $u$  nella semistriscia  $x' \leq x \leq x''$ ,  $t \geq 0$  e, se  $n$  è pari, nella striscia  $x' \leq x \leq x''$  <sup>(2)</sup>.*

Possente strumento, nella ricerca compiuta, ha fornito la trasformata di Laplace della soluzione a intervallo finito d'integrazione. L'introduzione

(1) Supporremo dunque, in ogni punto  $X$  di  $FA$  in cui sia  $\alpha \neq 0$ , il campo  $A$  cosiffatto che sia possibile spiccare per  $X$  un asse  $l$  in modo che su questo esista un punto  $Y$  tale che il punto  $Y$  stesso ed ogni altro interno al segmento  $XY$  appartenga ad  $A$ .

(2) E, sol che si rifletta un istante, ci si convince anche che, per tali ricerche, i metodi classici non sono utilizzabili!



di tale trasformata mi si è presentata <sup>(1)</sup> nelle ricerche dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo e ciò constato, mi sia consentito il dirlo, col più alto mio compiacimento, potendo così ancora una volta mostrare, nel mondo della Scienza pura, di quali cospicui apporti alla Matematica può esser capace il suo incondizionato cimento nei problemi dell'alta Tecnica, diuturnamente in opera presso l'Istituto che ho l'onore e la fortuna di dirigere.

**1. — Un teorema di crescita sulla trasformata di Laplace a intervallo finito d'integrazione.** — Sia  $f(t)$  una funzione, reale o complessa, della variabile reale  $t$ , per la quale funzione esista una costante reale  $x_0$  tale che il prodotto  $f(t)e^{-x_0 t}$  riesca sommabile nell'intervallo  $(0, \infty)$ ; con la posizione

$$f^*(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt,$$

si definisce la trasformata di Laplace della  $f(t)$ , di parametro  $z$ , la quale, posto  $z = x + iy$ , è funzione olomorfa di  $z$  nel semipiano  $x > x_0$ . Orbene, secondo un bel teorema di Phragmén <sup>(2)</sup> si ha, per ogni  $\tau > 0$ ,

$$\int_0^{\tau} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kx\tau} f^*(kx),$$

e se ne deduce: se, per un certo  $\tau > 0$ , riesce  $\lim (e^{x\tau} f^*(x))$  (per  $x \rightarrow +\infty$ ) = 0,

si ha  $\int_0^{\tau} f(t) dt = 0$ , e quindi, per la trasformata di Laplace della  $f(t)$ :

$$f^*(z) = \int_a^b f(t) e^{-zt} dt,$$

a intervallo finito d'integrazione  $(a, b)$ , la quale è ovviamente funzione intera di  $z$ , il seguente importante teorema di crescita:

**I.** Se, supposta  $f(t)$  sommabile nell'intervallo  $I$  compreso fra i punti  $a$  e  $b$  ( $a \geq b$ ), si ha, per  $x$  reale e del medesimo segno di  $b - a$ , definitivamente al tendere di  $|x|$  all'infinito,

$$|e^{xb} f^*(x)| = \left| \int_a^b e^{x(b-t)} f(t) dt \right| < K |x|^q e^{p|x|},$$

(1) Ne ho fatto cenno anche nella mia Nota: *Sulla trasformata di Laplace*. Questi «Rendiconti», vol. XXI, ser. 6<sup>a</sup>, 1935.

(2) Cfr. G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Springer, Berlin, 1937, p. 133.

con  $K, p, q$  costanti e  $p < |b - a|$ , se ne deduce

$$\int_a^\tau f(t) dt = 0, \quad \text{per } \tau \text{ in } I \text{ e } |\tau - a| \leq |b - a| - p,$$

e pertanto  $f(t) \equiv 0$ , in  $I$ , se vi è analitica, e, quando sia  $p = 0$ ,  $f(t)$  quasi ovunque nulla in  $I$ .

Si ha, invero, se  $b > a$ , posto  $T = b - a$ ,  $t = a + s$ ,  $g(s) = f(a + s)$ ,  $g(s) = 0$  per  $s \geq T$ ,

$$\left| \int_0^\infty e^{x(T-s)} g(s) ds \right| < K x^q e^{px},$$

definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$ , e quindi, per  $0 < \sigma < T - p$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{x\sigma} g^*(x)| \leq K \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q e^{(p+\sigma)x}}{e^{Tx}} = 0,$$

donde  $\int_0^\sigma g(s) ds = o(1)$ .

**2. - Teoremi di determinazione per gl'integrali dell'equazione (1).** — Designeremo con  $E_i$  l'espressione differenziale del secondo ordine, nella derivata  $\partial^i u / \partial t^i$ , che compare al primo membro della (1), con  $\mu'_i(X)$  il minimo e con  $\mu''_i(X)$  il massimo valore della forma quadratica  $\sum_{hk} a_{ihk} \lambda_h \lambda_k$  quando sia  $\sum_h \lambda_h^2 = 1$ . Siano  $T_1(X)$  e  $T_2(X)$  due funzioni definite nel dominio  $A + FA$  e sia sempre  $T_1 \leq T_2$ , e  $T_1 < T_2$  per  $X$  in  $A$ , il dominio dello spazio  $(X, t)$  luogo dei punti per cui  $X$  è in  $A + FA$  e  $T_1(X) \leq t \leq T_2(X)$ , sarà detto *normale, di base  $A$  e relativo alle funzioni  $T_1(X)$  e  $T_2(X)$*  e indicato con la notazione  $D[A, T_1(X), T_2(X)]$ . Una funzione  $\varphi(X, t)$  sarà detta *regolare* nel dominio  $D[A, T_1(X), T_2(X)]$ , rispetto all'equazione (1), se, per  $X$  in  $A$ , è continua con tutte le derivate parziali che compaiono nell'equazione e, per  $X$  in  $A + FA$ , è continua con tutte le derivate parziali

$$\varphi^{(i)} \equiv \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}, \quad \varphi^{(i)h} \equiv \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}, \quad \varphi^{(i)hk} \equiv \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_k}$$

$$(h, k = 1, \dots, r; \quad i = 0, \dots, n-1).$$

(1) Devo al dott. W. GRÖBNER, dell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo, il fruttuoso suggerimento di valermi del teorema di PHRAGMÉN per dimostrare il teorema I del testo.

Ciò posto noi vogliamo considerare il seguente problema generale:

Sono assegnate, in  $A$ , le funzioni  $u_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) e, su  $FA$ , le funzioni  $\alpha, \beta, \tau_1, \tau_2, v$ , essendo  $\tau_1 \leq 0 \leq \tau_2$ , definire in  $A + FA$  due funzioni regolari  $T_1(X)$  e  $T_2(X)$ , coincidenti su  $FA$ , rispettivamente, con  $\tau_1$  e  $\tau_2$  e tali che in  $A$  riesca  $T_1(X) \leq 0, T_2(X) \geq 0, T_2(X) > T_1(X)$ , e nel dominio normale  $D[A, T_1(X), T_2(X)]$  una soluzione della (1), ivi regolare, verificante le condizioni iniziali (2) e la (3) su  $FA$ .

Designando  $T(X)$  una fissata qualsivoglia delle funzioni  $T_1(X)$  e  $T_2(X)$ ,  $\tau(X)$  la corrispondente fra le  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , per ogni punto  $X$  di  $A + FA$  introdurremo la seguente trasformata di Laplace della  $u$ :

$$u^*(X, \lambda) = \int_0^{T(X)} e^{\lambda [T(X) - t]} u(X, t) dt.$$

Se tutte le  $u_i(X)$  sono nulle si ha  $u^{(i)}(X, 0) \equiv u^{(i)b}(X, 0) \equiv \equiv u^{(i)hk}(X, 0) \equiv 0$  in  $A$  e pertanto, per  $X$  in  $A$  e per  $i \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{\lambda(T-t)} u^{(i)} dt &= \lambda^i u^* + \sum_{s=0}^{i-1} \lambda^s u^{(i-1-s)}(X, T), \\ \int_0^T e^{\lambda(T-t)} u^{(i)b} dt &= \lambda^i \int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial u}{\partial x_b} dt + \sum_{s=0}^{i-1} \lambda^s u^{(i-1-s)b}(X, T), \\ \int_0^T e^{\lambda(T-t)} u^{(i)hk} dt &= \lambda^i \int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} dt + \sum_{s=0}^{i-1} \lambda^s u^{(i-1-s)hk}(X, T). \end{aligned}$$

Dalla (1), postovi  $f(X, t) \equiv 0$ , si trae, per ogni punto  $X$  di  $A$ ,

$$\int_0^T e^{\lambda(T-t)} \sum_{i=0}^n E_i \left[ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right] dt = 0,$$

cioè

$$\begin{aligned} (7) \quad & \sum_{i=0}^n \left( \sum_{h,k}^{1,r} a_{ihk} \lambda^i \int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} dt + \sum_{i,r}^{1,r} b_{ib} \lambda^i \int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial u}{\partial x_b} dt + c_i \lambda^i u^* \right) = \\ & - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{h,k}^{1,r} a_{ihk} \sum_{s=0}^{i-1} \lambda^s u^{(i-1-s)hk}(X, T) + \sum_{h,i}^{1,r} b_{ib} \sum_{s=0}^{i-1} \lambda^s u^{(i-1-s)b}(X, T) + \right. \\ & \left. + c_i \sum_{s=0}^{i-1} \lambda^s u^{(i-1-s)}(X, T) \right) = \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s P_s(X), \end{aligned}$$

avendo designato con  $P_s(X)$  certe funzioni continue in  $A + FA$ , indipendenti da  $\lambda$ . D'altra parte un calcolo di derivazione fornisce

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial u}{\partial x_b} dt &= \frac{\partial u^*}{\partial x_b} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_b} u^* - \frac{\partial T}{\partial x_b} u(X, T), \\ \int_0^T e^{\lambda(T-t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_b \partial x_k} dt &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_b \partial x_k} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_b} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_b} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} + \\ &+ \left( \lambda^2 \frac{\partial T}{\partial x_b} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_b \partial x_k} \right) u^* + \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_b} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_b \partial x_k} \right) u(X, T) - \\ &- \frac{\partial T}{\partial x_b} u^{(0)}(X, T) - \frac{\partial T}{\partial x_k} u^{(0)b}(X, T) - \frac{\partial T}{\partial x_b} \frac{\partial T}{\partial x_k} u^{(1)}(X, T), \end{aligned}$$

e si deduce, pertanto, dalla (7), che  $u^*$  verifica in  $A$  la seguente equazione:

$$(8) \quad \sum_{b,k}^{1,r} a_{bk}(X, \lambda) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_b \partial x_k} + \sum_b^{1,r} b_b(X, \lambda) \frac{\partial u^*}{\partial x_b} + c(X, \lambda) u^* = \sum_{i=0}^{n+2} \lambda^i Q_i(X),$$

avendo indicato con  $Q_i(X)$  certe funzioni continue in  $A + FA$ , indipendenti da  $\lambda$ , e posto

$$\begin{aligned} a_{bk}(X, \lambda) &= \sum_{i=0}^n a_{ibk}(X) \lambda^i, \\ b_b(X, \lambda) &= \sum_{i=0}^n \left( b_{ib} - 2\lambda \sum_{k=1}^r a_{ibk} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \lambda^i, \\ c(X, \lambda) &= \sum_{i=0}^n (c_i - \lambda H_i[T] + \lambda^2 K_i[T]) \lambda^i = \sum_{i=0}^{n+2} C_i[T] \lambda^i = \\ &= c_0 + (c_1 - H_0[T]) \lambda + \sum_{i=2}^n (c_i - H_{i-1}[T] + K_{i-2}[T]) \lambda^i + \\ &+ (K_{n-1}[T] - H_n[T]) \lambda^{n+1} + K_n[T] \lambda^{n+2}, \\ H_i[T] &= \sum_{b,k}^{1,r} a_{ibk} \frac{\partial^2 T}{\partial x_b \partial x_k} + \sum_b^{1,r} b_{ib} \frac{\partial T}{\partial x_b}, \quad K_i[T] = \sum_{b,k}^{1,r} a_{ibk} \frac{\partial T}{\partial x_b} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Laddove, dalla condizione (3) su  $FA$ , postovi  $v \equiv 0$ , si deduce la seguente per  $u^*$

$$(9) \quad \alpha(X) \frac{du^*}{d\lambda} + \left( \beta(X) - \lambda \alpha(X) \frac{dT}{d\lambda} \right) u^* = \alpha(X) u(X, T) \frac{dT}{d\lambda}, \quad \text{per } X \text{ su } FA.$$

Designeremo con  $F^\circ A$  quella eventuale parte di  $FA$  in cui è  $\tau = 0$ . Si ha  $u^* = 0$  su  $F^\circ A$ , onde possiamo dire che  $u^*$  verifica su  $FA$  l'equazione:

$$(10) \quad L'[u^*] \equiv \alpha'(X) \frac{du^*}{dt} + \beta'(X, \lambda) u^* = v'(X),$$

con

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = -1, \quad v' = 0, \quad \text{per } X \text{ su } F^\circ A$$

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta - \lambda \alpha \frac{dT}{dt}, \quad v' = \alpha u(X, T) \frac{dT}{dt}, \quad \text{per } X \text{ su } FA - F^\circ A.$$

All'arbitrario parametro  $\lambda$  diamo ora valori reali e del segno di  $T$  e supponiamo che sia sempre  $\alpha \geq 0$  su  $FA$  e possibile la scelta della  $T(X)$  in maniera che, per  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , riesca definitivamente: I) per ogni  $X$  di  $A$  definita o semidefinita *positiva* la forma quadratica

$$\sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(X, \lambda) \lambda_h \lambda_k = \sum_{i=0}^n \lambda^i \sum_{h,k}^{1,r} a_{ihk}(X) \lambda_h \lambda_k,$$

nei parametri reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , II) dette  $p$  e  $q$  due costanti *positive*,

$$c(X, \lambda) \leq -q, \quad \text{in } A, \quad \beta'(X, \lambda) \leq -p, \quad \text{su } FA.$$

Se ne trae<sup>(1)</sup> dal verificarsi delle (8) e (10), supposto  $A$  limitato e detto  $N_s$  il massimo di  $Q_s(X)$  in  $A + FA$ ,  $M$  il massimo di  $|v'|$ ,

$$|u^*(X, \lambda)| \leq \frac{M}{p} + \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{n+2} N_s |\lambda|^s,$$

e pertanto  $u \equiv 0$ , in virtù del teorema I, donde l'unicità della soluzione, per il posto problema, nel dominio  $D(A, 0, T)$ .

L'importanza del risultato a cui siamo pervenuti può forse meglio essere avvertita considerandolo in qualche caso particolare, ed è ciò che andiamo a fare. Per una funzione  $f(X)$  definita in un insieme di punti  $I$  designeremo con

$$e'_1 f(X), \quad e''_1 f(X),$$

gli estremi inferiore e superiore nell'insieme  $I$ .

Sia, in primo luogo,

$$(11) \quad e''_A c_n(X) < 0,$$

(1) Cfr. PICONE, *Nuove formole di maggiorazione per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine ellittico-paraboliche*. Questi « Rendiconti », vol. XXVIII, 1938-XVII, teorema V, formola di maggiorazione (13). Citerò nel testo tale lavoro con la notazione (N).



e  $\tau(X)$  costante di valore  $\tau$ . Se si pone  $T(X) \equiv \tau$ , si ha  $c = c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_n \lambda^n$ ,  $\beta'(X, \lambda) = \beta(X)$ ,  $v' \equiv 0$ , donde, se si fa ricorso alla formola di maggiorazione (14) della mia Nota (N), già citata, il teorema

II. *Il campo A sia limitato e  $e''_A |a_{ihk}|$ ,  $e''_A |b_{ih}|$ ,  $e'_A c_i < +\infty$ , verificandosi la (11) e, con  $\alpha \geq 0$ , essendo  $\beta \leq 0$ ,  $\alpha + |\beta| > 0$ ; allora se  $e'_A \mu'_n(X) > 0$ , oppure  $e'_A \mu'_i(X) \geq 0$  (per  $i \leq n$ ), comunque si dia la costante positiva  $\tau$ , nel dominio  $D(A, 0, \tau)$  sussiste il teorema d'unicità. Nelle stesse ipotesi, sia  $n$  pari e  $e'_A |c_i| < +\infty$  (per  $i$  dispari); allora se  $e'_A \mu'_n > 0$ , oppure  $e'_A \mu'_i \equiv 0$  (per  $i$  dispari)  $e'_A \mu'_i \geq 0$  (per  $i$  pari), comunque si diano le costanti  $\tau_1 \leq 0$  e  $\tau_2 \geq 0$ , con  $\tau_1 < \tau_2$ , nel dominio  $D(A, \tau_1, \tau_2)$  sussiste il teorema d'unicità.*

Sia, in secondo luogo,

$$a_{nhk} \equiv a_{n-1, hk} \equiv b_{nh} \equiv 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, r),$$

con che l'equazione (1) riesce d'ordine  $n$  e si scrive

$$(12) \quad \sum_{i=0}^{n-2} E_i \left[ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right] + \sum_{h=1}^r b_{n-1, h} \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} + c_{n-1} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} + c_n \frac{\partial^n u}{\partial t^n} = f(X, t),$$

e si ha  $C_{n+1}[T] \equiv C_{n+2}[T] \equiv 0$ . Il teorema V di (N) mercè la formola di maggiorazione (13), dà luogo ai seguenti:

III. *Sia A limitato,  $\tau \geq 0$  e sia possibile definire in  $A + FA$  una funzione regolare  $T(X)$ , coincidente con  $\tau$  su  $FA$ , positiva in  $A$  e, designando  $\varepsilon$  una costante positiva, verificante ivi la limitazione:*

$$(13) \quad C_n[T] \equiv c_n - \sum_b^{1, r} b_{n-1, b} \frac{\partial T}{\partial x_b} + \sum_{b, k}^{1, r} a_{n-2, bk} \frac{\partial T}{\partial x_b} \frac{\partial T}{\partial x_k} \leq -\varepsilon.$$

*Se  $e'_{FA-F^0A} \beta(X) < 0$ ,  $dT/dl \leq 0$ , su  $FA - F^0A$ ,  $e'_A C_i[T] < +\infty$  ( $i \leq n$ ),  $e'_A \mu'_{n-2} > 0$ ,  $e'_A \mu'_i > -\infty$  ( $i \leq n-3$ ), oppure  $\mu'_i \geq 0$  ( $i \leq n-2$ ), allora nel dominio  $D(A, 0, T)$  sussiste il teorema d'unicità. Se  $\alpha \equiv 0$  su  $FA - F^0A$  il teorema sussiste anche senza la condizione  $dT/dl \geq 0$  su  $FA - F^0A$ . Se  $e'_{FA-F^0A} \alpha > 0$ ,  $e'_{FA-F^0A} (dT/dl) > 0$ , il teorema sussiste comunque sia data  $\beta$ .*

IV. *Sia A limitato e  $n$  pari,  $\tau_1 \leq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$  e sia possibile definire in  $A + FA$  due funzioni regolari  $T_1(X)$  e  $T_2(X)$ , verificanti la (13), la prima  $\leq 0$  e  $\equiv \tau_1(X)$  su  $FA$ , la seconda  $\geq 0$  e  $\equiv \tau_2(X)$  su  $FA$ , essendo  $T_2 > T_1$  in  $A$ . Detta  $F^0_1 A$  quella parte di  $PA$  in cui  $\tau_1 = 0$ ,  $F^0_2 A$  quella parte in cui  $\tau_2 = 0$ , se  $e'_{FA-F^0_1A-F^0_2A} \beta < 0$ ,  $dT_1/dl \leq 0$ , su  $FA - F^0_1 A$ ,  $dT_2/dl \geq 0$ , su  $FA - F^0_2 A$ ,  $e'_A C_i[T_2] < +\infty$ ,  $e'_A C_i[T_1] < +\infty$  ( $i$  pari),  $e'_A C_i[T_1] > -\infty$  ( $i$  dispari),  $e'_A \mu'_{n-2} > 0$ ,  $e'_A \mu'_i > -\infty$  ( $i \leq n-3$ ),  $e'_A \mu'_i < +\infty$  ( $i$  dispari), oppure  $a_{ihk} \equiv 0$  ( $i$  dispari),  $e'_A \mu'_i \geq 0$  ( $i$  pari), nel dominio  $D(A, T_1, T_2)$  sussiste il teorema d'unicità.*

V. Se, per il campo  $A$ , per la funzione  $T$  e per l'equazione (12), sono verificate tutte le ipotesi del teorema III, prescindendo affatto da quella relativa al segno di  $dT/dl$ , ed è  $\tau \equiv 0$ , una soluzione della (12), regolare nel dominio  $D(A, 0, T)$ , riesce ivi determinata dalle sole condizioni iniziali (2). Se, per  $A, T_1, T_2$  e per la (12), sono verificate tutte le ipotesi del teorema IV, prescindendo affatto da quelle relative ai segni di  $dT_1/dl$  e  $dT_2/dl$ , ed è  $\tau_1 \equiv \tau_2 \equiv 0$ , una soluzione della (12), regolare nel dominio  $D(A, T_1, T_2)$  riesce ivi determinata dalle sole condizioni iniziali (2).

L'equazione a derivate parziali, nella funzione  $T$ ,

$$C_n[T] \equiv c_n - \sum_b^{1,r} b_{n-1,b} \frac{\partial T}{\partial x_b} + \sum_{b,k}^{1,r} a_{n-2,bk} \frac{\partial T}{\partial x_b} \frac{\partial T}{\partial x_k} = 0,$$

è quella delle ipersuperficie caratteristiche, in rappresentazione ordinaria,  $t = T(X)$ , per l'equazione (12), ed ecco dunque che, con la condizione (13), ci appaiono, in modo nuovo, le ipersuperficie caratteristiche dell'equazione, come atte a delimitare, in ipotesi e con modalità che qui rinunziamo a precisare, i domini di determinazione delle soluzioni di questa!

Dal teorema V si deduce poi subito, per esempio, il seguente che concerne il caso che il campo  $A$  sia tutto lo spazio  $S_{(r)}$ .

VI. Tutti i coefficienti della (12) siano limitati in  $S_{(r)}$  e vi sia  $b_{n-1,b} \equiv 0$  e, con  $m$  e  $M$  costanti positive note,

$$c_n \leq -m, \quad \sum_{b,k}^{1,r} a_{n-2,bk} \lambda_b \lambda_k \leq M^2 \sum_n^{1,r} \lambda_b^2,$$

nonchè  $\mu'_{n-2}$  di estremo inferiore positivo in ogni campo limitato, assegnando ad una soluzione regolare della (12) le sole condizioni iniziali (2), in  $S_{(r)}$ , essa riesce determinata per  $t \geq 0$  e, se  $n$  è pari, per  $t$  qualsivoglia.

Siano, inverso,  $X_0(x_1^0, \dots, x_r^0)$  un punto di  $S_{(r)}$ ,  $t_0$  un numero positivo e determiniamo  $R$  positivo, talmente grande, da risultare

$$-m + 1/R^2 < -m/2, \quad t_0 < R/2M.$$

Detta  $A$  l'ipersfera di centro in  $X_0$  e di raggio  $R$ , e posto

$$T(X) = \frac{1}{2RM} \left[ R^2 - \sum_{k=1}^r (x_k - x_k^0)^2 \right],$$

nel dominio  $D(A, 0, T)$ , che contiene il punto  $(X_0, t_0)$ , sono soddisfatte le ipotesi del teorema V, ed è quindi  $u(X_0, t_0) = 0$  se  $u_i(X) = 0$  ( $i \leq n$ ) in  $A$ .

Si abbia, in ultimo luogo,

$$a_{nhk} \equiv a_{n-1,hk} \equiv a_{n-2,hk} \equiv b_{nh} \equiv b_{n-1,h} \equiv 0, \quad (h, k = 1, \dots, r),$$

con che l'equazione (1) si scrive

$$(14) \quad \sum_{i=1}^{n-3} E_i \left[ \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right] + \sum_{h=1}^r b_{n-2,h} \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial^{n-2} u}{\partial t^{n-2}} + c_{n-2} \frac{\partial^{n-2} u}{\partial t^{n-2}} + \\ + c_{n-1} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} + c_n \frac{\partial^n u}{\partial t^n} = f,$$

sussiste, allora, per esempio, il seguente teorema:

VII. Siano  $e''_A c_n(X) < 0$ ,  $e'_A \mu'_{n-3}(X) > 0$  e, in  $A$ , limitati tutti i coefficienti della (14), una soluzione di questa, regolare nel dominio  $D(A, 0, +\infty)$ , vi riesce determinata dalle sole condizioni iniziali (2) e, se  $n$  è pari, una tale soluzione riesce determinata nel dominio  $D(A, -\infty, +\infty)$ .

Rappresenti, invero,  $\Theta(X)$  una funzione, regolare nel campo  $A$ , che possiamo supporre limitato, nulla su  $FA$  e positiva in  $A$ , e si ponga, con  $k$  costante,  $T(X) = k\Theta(X)$ . Comunque si fissi un punto  $(X_0, t_0)$ , con  $X_0$  in  $A$  e  $t_0 > 0$ , si può dare a  $k$  un valore positivo talmente grande che risulti  $T(X_0) > t_0$ , cioè il punto  $(X_0, t_0)$  interno al dominio  $D(A, 0, T)$ , ed in tale dominio sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema V.

**Zoologia.** — *Adattamenti biologici di alcuni Echinodermi nel Canale di Suez.* Nota del Socio A. Russo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Alcune determinazioni di una superficie di Veronese.* Nota di C. P. BOGDAN, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. È conosciuto un risultato dovuto a C. Segre <sup>(2)</sup>, secondo il quale una superficie di Veronese è determinata da due delle sue quartiche. Rosati <sup>(3)</sup> ha poi mostrato che vi sono quattro superficie di Veronese passanti per una sestica ellittica dello  $S_5$ . Fin adesso non si conoscono altri casi di determinazioni di una tale superficie.

In quello che segue io esporrò diverse altre determinazioni di una superficie di Veronese mediante coniche, punti e piani tangenti <sup>(4)</sup>.

2. Tenendo presente i teoremi <sup>(5)</sup> relativi alla omografia fra gli  $S_3$  che proiettano dai piani delle coniche i punti di una superficie di Veronese, e alla omografia determinata da un piano tangente variabile di una tale superficie su gli altri piani tangenti, si perviene a questo teorema:

*C'è una e una sola superficie di Veronese tangente a tre piani dati in tre punti fissati e passante per un altro punto (o tangente a un altro piano).*

I tre piani devono essere incidenti a due a due e stare in un  $S_5$ .

Come conseguenza di questo teorema abbiamo:

*Vi sono  $\infty^3$  superficie di Veronese tangenti a tre piani dati in tre punti fissati.*

3. Utilizzando gli stessi teoremi si può vedere che le condizioni di Segre sono troppe. In generale per due quartiche, anche incidenti in quattro punti, non passa alcuna superficie di Veronese. Infatti, se le due quartiche sono incidenti in quattro punti, i piani determinati dalle tangenti alle due quartiche nei loro punti comuni devono essere incidenti a due a due.

Il teorema di Rosati è più espressivo perchè richiede meno ed afferma l'esistenza di quattro superficie di Veronese per una sestica ellittica (di  $S_5$ ).

Possiamo dimostrare che:

(1) Nella seduta del 3 dicembre 1938.

(2) BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva* ecc., ed. II, p. 422.

(3) ROSATI, *Sulle sestiche*, ecc. « Rend. Istituto lombardo », 1902.

(4) Questi risultati saranno prossimamente pubblicati in esteso in un articolo nelle « Annales scientifiques de l'Université de Jassy », dove darò le dimostrazioni geometriche, che permettano caso per caso la costruzione effettiva delle superficie di Veronese.

(5) BERTINI, op. cit., p. 413.

Per una quartica e una conica incidenti in due punti ed appartenenti ad un  $S_5$ , passano due superficie di Veronese.

Questo caso è più particolare di quello di Rosati, in quanto qui si ha una sestica spezzata, ma non è contenuto in quello.

Do qui una dimostrazione analitica.

Se  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) sono coordinate proiettive omogenee di un punto dello  $S_5$ , le equazioni parametriche di una superficie di Veronese sono della forma:

$$(1) \quad x_i = a_{i1} \lambda^2 + a_{i2} \lambda \mu + a_{i3} \mu^2 + a_{i4} \mu \nu + a_{i5} \nu^2 + a_{i6} \nu \lambda.$$

Possiamo scegliere la piramide di riferimento tale che la quartica sia

$$C^4 (x_1 = \mu^4, \quad x_2 = \mu^3 \nu, \quad x_3 = \mu^2 \nu^2, \quad x_4 = \mu \nu^3, \quad x_5 = \nu^4, \quad x_6 = 0)$$

e che la conica sia  $\Gamma (x_1 x_5 - x_6^2 = 0 \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ .

Ponendo la condizione che la superficie (1) passi per la quartica  $C^4$  per  $\lambda \nu = \mu^2$  e per la conica  $\Gamma$  per  $\mu = 0$  si ottiene:

$$(2) \quad x_1 = \lambda^2, \quad x_2 = \lambda \mu, \quad x_3 = \mu^2, \quad x_4 = \mu \nu, \quad x_5 = \nu^2, \quad x_6 = \pm (\lambda \nu - \mu^2)$$

e abbiamo così le due superficie di Veronese soddisfacenti le condizioni richieste. Si vede subito che l'omologia armonica

$$(3) \quad x_1 = \rho x'_1; \quad x_2 = \rho x'_2; \quad x_3 = \rho x'_3; \quad x_4 = \rho x'_4; \quad x_5 = \rho x'_5; \quad x_6 = -\rho x'_6$$

di asse lo  $S_4$  della quartica ( $x_6 = 0$ ) e di centro il polo  $A_6(000001)$  di questo  $S_4$  rispetto alla conica  $\Gamma$  cambia fra loro queste due superficie.

4. Se i due punti d'incidenza della quartica e della conica coincidono, cioè se la conica è tangente alla quartica, abbiamo il seguente risultato che è verificato subito se nella dimostrazione precedente come conica  $\Gamma$  prendiamo la conica

$$\Gamma (x_1 x_6 - x_2^2 = 0 \quad x_3 = x_4 = x_5 = 0):$$

Per una quartica e una conica tangente in un punto ed appartenenti ad un  $S_5$  passa una sola superficie di Veronese.

Si poteva dire anche prima che c'è una sola superficie, perchè in questo caso l'omologia armonica che cambia fra loro le due superficie di Veronese è degenerare perchè il centro appartiene all'asse.

Si vede subito che:

Vi sono  $\infty^1$  superficie di Veronese passanti per una quartica e tangenti in due punti di essa a due piani incidenti in un punto (passanti per le tangenti alla quartica nei punti rispettivi) e non appartenenti allo  $S_4$  della quartica.



5. Il teorema ora dimostrato è vero anche se la quartica si spezza in due coniche incidenti in un punto.

In questo caso abbiamo il teorema:

*Per tre coniche incidenti a due a due in un punto ed appartenenti ad un  $S_5$  passano due superficie di Veronese.*

Siano, come sopra,  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) coordinate proiettive omogenee di un punto dello  $S_5$ , e

$$x_i = a_{i1} \lambda^2 + a_{i2} \lambda \mu + a_{i3} \mu^2 + a_{i4} \mu \nu + a_{i5} \nu^2 + a_{i6} \nu \lambda \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

le equazioni parametriche di una superficie di Veronese.

Possiamo scegliere la piramide di riferimento tale che le tre coniche date siano:

$$\Gamma_1 (x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \quad x_4 = x_5 = x_6 = 0)$$

$$\Gamma_2 (x_3 x_5 - x_4^2 = 0 \quad x_6 = x_1 = x_2 = 0)$$

$$\Gamma_3 (x_5 x_1 - x_6^2 = 0 \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0).$$

Poniamo le condizioni che la superficie passi per la conica  $\Gamma_1$  per  $\nu = 0$ , per la conica  $\Gamma_2$  per  $\lambda = 0$ , per la conica  $\Gamma_3$  per  $\mu = 0$ , e tenendo conto che le tre coniche stanno in un  $S_5$ , con conveniente cambiamento di parametri si ottengono le due superficie, di equazioni

$$x_1 = \lambda^2 \quad ; \quad x_2 = \lambda \mu \quad ; \quad x_3 = \mu^2 \quad ; \quad x_4 = \pm \mu \nu \quad ; \quad x_5 = \nu^2 \quad ; \quad x_6 = \nu \lambda.$$

Si vede che abbiamo tre omologie armoniche che cambiano fra loro le due superficie. Queste omologie hanno come asse uno dei tre  $S_4$  determinati dalle coniche prese a due a due, e come centro il polo di questo  $S_4$  rispetto alla conica rimanente.

6. Si sa <sup>(1)</sup> che i piani tangenti a una superficie di Veronese nei punti di una conica stanno in un  $S_4$ , detto iperpiano tangente doppio della superficie, e ivi formano una  $V_3^3$ . Questa varietà è l'intersezione della  $V_4^3$  luogo delle corde della superficie con l'iperpiano tangente doppio.

Si può vedere che:

*La varietà  $V_3^3$  dei piani tangenti a una superficie di Veronese nei punti di una conica, si ottiene considerando le rette che congiungono i punti corrispondenti di due piani omografici fra loro. I piani della varietà segano queste rette in punteggiate omografiche.*

Dunque questa varietà può essere determinata se si stabilisce una omografia fra i punti (tangente) della conica e i punti di una retta che non ha nessun punto comune con il piano della conica. Siccome l'ordine della varietà è tre si vede che bastano quattro piani tangenti perchè sia determinata una tale retta, e quindi perchè sia determinata la varietà.

(1) BERTINI, op. cit., p. 412.

Dunque per determinare l'intorno del prim'ordine di un punto qualunque della conica, basta darsi gli intorno del prim'ordine di quattro punti della conica.

7. Supponiamo adesso che due delle tre coniche date divengano infinitamente vicine. Ciò vuol dire che si danno gli intorno del prim'ordine dei punti di una conica, dunque i piani tangenti lungo la conica. Come abbiamo visto occorrono perciò i piani tangenti in quattro punti della conica.

In questo caso abbiamo il seguente teorema:

*C'è una e una sola superficie di Veronese passante per due coniche date, e tangente in tre punti di una di queste coniche a tre piani dati (e inoltre al piano delle tangenti alle due coniche nel loro punto d'incidenza).*

Nel primo caso, quando le tre coniche erano in una posizione qualunque, si poteva dire che le tre coniche sono l'intersezione di due superficie di Veronese.

Ma se due delle coniche divengono infinitamente vicine muovendosi con continuità, la stessa conclusione sarebbe erronea, perchè in questo caso c'è una sola superficie di Veronese passante per le tre coniche.

Dunque dare due coniche in una posizione qualunque, non è equivalente a dare due coniche infinitamente vicine.

Si poteva dire dal principio che non c'è che una sola superficie. Infatti in questo caso le omologie armoniche che cambiano fra loro le superficie sono degeneri, perchè il centro dell'omologia appartiene all'asse.

8. Si sa che l'intorno del second'ordine di un punto di una superficie di uno spazio  $S_r$  ( $r \geq 5$ ) determina il cono di del Pezzo di quel punto, cono che contiene i piani osculatori di tutte le curve della superficie passante per il punto considerato.

Questo cono è il luogo degli  $\infty^1 S_3 = S(1, 2)$  come li indica il Bompiani. Questi  $S(1, 2)$  contengono tutti i piani osculatori alle curve della superficie passante per il punto e ivi tangenti a una retta data. Essi sono dunque determinati dal piano tangente e da un piano osculatore di una curva qualunque passante per il punto e tangente alla suddetta retta.

Per la superficie di Veronese possiamo dunque considerare per ciascuna tangente il piano della conica della superficie tangente nel punto considerato a quella retta, e questo piano insieme con il piano tangente determina lo  $S(1, 2)$  corrispondente alla tangente considerata.

Possiamo dunque concludere:

*Il cono di del Pezzo di un punto qualunque di una superficie di Veronese contiene la superficie. Esso coincide con il cono che proietta la superficie di Veronese dal piano tangente nel punto considerato e, quello che è lo stesso, con l'iperquadrica polare del punto considerato rispetto alla  $V_4^3$  delle corde della superficie.*

Questa proprietà è caratteristica, perchè la superficie di Veronese è la sola superficie dello  $S_5$  che appartiene a  $\infty^2$  iperquadriche. Ella appartiene a  $\infty^5$  iperquadriche.

9. Due coni di del Pezzo hanno comune una  $V_3^4$ , che è la varietà ottenuta se si proietta la superficie dal punto comune dei due piani tangenti vertici dei coni.

Tre coni di del Pezzo hanno comune una superficie, che è la superficie di Veronese. Infatti questi tre coni non possono formare un fascio, perchè le iperquadriche di un fascio passante per la superficie sono le prime polari dei punti di una retta rispetto alla  $V_4^3$ , e una retta non può avere più di due punti comuni con una superficie di Veronese. I coni di del Pezzo sono le prime polari dei punti della superficie.

Se i tre punti appartengono a una medesima conica della superficie, all'infuori della superficie, i tre coni hanno comune anche il piano della conica.

Dunque anche l'intorno del second'ordine di una conica determina la superficie di Veronese, e basta dare gl'intorni del second'ordine di tre punti perchè sia determinato l'intorno del second'ordine di un punto qualunque della conica, e perchè sia determinata la superficie di Veronese.

Se tutte tre le coniche divengono infinitamente vicine, è determinato l'intorno del second'ordine della conica, e quindi una superficie di Veronese.

Abbiamo dunque il teorema:

*Per tre coniche infinitamente vicine passa una e una sola superficie di Veronese.*

Da quanto precede risulta più esattamente che:

*Se due superficie di Veronese hanno in comune una conica e hanno un contatto di second'ordine in tre punti di essa, le due superficie coincidono.*

**Matematica.** — *Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta.*  
Nota di G. CIMMINO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. M. PICONE.

In una Nota di egual titolo precedentemente apparsa in questi « Rendiconti » <sup>(2)</sup>, ho comunicato il seguente risultato:

Se, in un dato intervallo  $a \leq x \leq b$ , le funzioni  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  sono linearmente indipendenti e verificano l'equazione differenziale <sup>(3)</sup>

$$(I) \quad Lu_i = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} (\theta_k u_i^{(k)})^{(k)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove si supponga la continuità in  $(a, b)$  di tutte le derivate che figurano nell'equazione stessa, e cioè quelle di ordine  $\leq k$  per  $\theta_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) e quelle di ordine  $\leq 2n$  per le  $u_i$ , se inoltre, in un dato punto  $\xi$  di  $(a, b)$  risulta

$$(2) \quad u_i^{(k)}(\xi) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots, n),$$

se infine  $y(x)$  è un'altra funzione continua in  $(a, b)$ , insieme con le sue derivate dei primi  $n$  ordini, sussiste l'identità

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n \theta_k y^{(k)2} - \theta_n \left( \frac{W[y, u_1, u_2, \dots, u_n]}{W[u_1, u_2, \dots, u_n]} \right)^2 = \frac{dA}{dx},$$

dove con  $W$  si indica il determinante wronskiano delle funzioni scritte in  $[ ]$ , mentre  $A$  rappresenta una certa espressione differenziale razionale nei coefficienti  $\theta_k$ , nonchè nelle  $u_i, y$ , la quale si annulla in ogni punto in cui  $y$  è zero insieme con le sue derivate dei primi  $n-1$  ordini.

Circa la verifica della suddetta identità, mi si è fatto osservare che non avevo data alcuna indicazione sul modo in cui si sarebbero potuti svolgere i relativi calcoli, mentre ciò sarebbe stato invece opportuno, dato che questi, riuscendo assai complicati, apparivano difficilmente accessibili; pertanto mi sono finalmente deciso a pubblicarne il completo sviluppo in una forma tale da renderne agevole il controllo.

(1) Nella seduta del 3 dicembre 1938.

(2) Vol. IX, ser. 6<sup>a</sup>, 1929, pp. 524-526.

(3) Avvertasi che, nelle equazioni (I) e (II) della Nota citata in (2), va aggiunto il fattore  $(-1)^{n-k}$  sotto al segno di  $\Sigma$ , i coefficienti ivi indicati con  $\bar{\theta}_k$  sono qui  $\theta_k$ .

1. Cominciamo con l'introdurre alcune notazioni abbreviate. Indicheremo con  $\left| \frac{h}{k} \right|$  il determinante che si ottiene sostituendo nel wronskiano  $W = W[u_1, u_2, \dots, u_n]$  alla linea  $u_1^{(h)}, u_2^{(h)}, \dots, u_n^{(h)}$  la  $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)}$ ; analogamente, indicheremo con  $\left| \frac{h, h_1}{k, k_1} \right|$  il determinante che si ottiene sostituendo nel medesimo wronskiano  $W$  alle due linee  $u_1^{(h)}, u_2^{(h)}, \dots, u_n^{(h)}$  e  $u_1^{(h_1)}, u_2^{(h_1)}, \dots, u_n^{(h_1)}$  rispettivamente le  $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)}$  e  $u_1^{(k_1)}, u_2^{(k_1)}, \dots, u_n^{(k_1)}$ .  
È chiaro allora che risulta

$$(4) \quad \left| \frac{h}{k} \right| = \begin{cases} 0 & , \quad \text{per } 0 \leq k \leq n-1, \quad h \neq k, \\ W & , \quad \text{per } h = k, \end{cases}$$

$$\left| \frac{h, h_1}{k, k_1} \right| = \begin{cases} \left| \frac{h}{k} \right| & , \quad \text{per } h_1 = k_1, \\ \left| \frac{h_1}{k_1} \right| & , \quad \text{per } h = k, \\ W & , \quad \text{per } h = k, \quad h_1 = k_1, \\ 0 & , \quad \text{per } 0 \leq k \leq n-1, \quad k \neq h, \quad k \neq h_1, \\ & \text{oppure } 0 \leq k_1 \leq n-1, \quad k_1 \neq h, \quad k_1 \neq h_1, \end{cases}$$

$$\left| \frac{h, h_1}{k, k_1} \right| = - \left| \frac{h_1, h}{k_1, k} \right| = - \left| \frac{h, h_1}{k_1, k} \right|.$$

È pure manifesto che sussistono le seguenti regole di derivazione

$$(5) \quad \left| \frac{h}{k} \right|' = \left| \frac{h}{k+1} \right| - \left| \frac{h-1}{k} \right| + \left| \frac{h, n-1}{k, n} \right|, \quad W' = \left| \frac{n-1}{n} \right|$$

(ove si presentino i simboli  $\left| \frac{h}{k} \right|$ , oppure  $\left| \frac{h, h_1}{k, k_1} \right|$  con  $h = -1$ , o con  $h_1 = -1$ , o con  $h = h_1$ , si conviene, per definizione, che essi valgano zero).

Consideriamo il determinante di ordine  $2n$  seguente:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n & -u_1 & -u_2 & \dots & -u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n & -u'_1 & -u'_2 & \dots & -u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} & -u_1^{(n-2)} & -u_2^{(n-2)} & \dots & -u_n^{(n-2)} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n & u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix},$$



nel quale pensiamo sostituita alla linea  $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}, -u_1^{(i)}, -u_2^{(i)}, \dots, -u_n^{(i)}$  un'altra linea del tipo  $u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_n^{(j)}, u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_n^{(j)}$ , essendo  $i, j$  due fissati indici, con  $0 \leq i \leq n-2, j \geq n+1$ . Il determinante così definito è zero, come immediatamente si riconosce sviluppandolo secondo i minori contenuti nelle prime  $n-1$  linee; si deduce pertanto

$$(6) \quad K_{ij} = \left| \frac{n-1}{n} \right| \cdot \left| \frac{i}{j} \right| - \left| \frac{n-1}{j} \right| \cdot \left| \frac{i}{n} \right| - W \cdot \left| \frac{i, n-1}{j, n} \right| = 0,$$

perchè l'espressione  $K_{ij}$  qui scritta, a meno del segno e del fattore  $2^{n-1}$ , non è altro che quello che si ottiene sviluppando il detto determinante secondo i minori contenuti nelle prime  $n$  colonne.

2. Deduciamo ora alcune relazioni che devono esser verificate dalla  $n$ -pla di funzioni  $u_i(x)$ . È anzitutto

$$(7) \quad \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-v} (-1)^{r-1} \begin{vmatrix} u_i^{(n-v-r)} & u_j^{(n-v-r)} \\ (\theta_{n-v} u_i^{(n-v)})^{(r-1)} & (\theta_{n-v} u_j^{(n-v)})^{(r-1)} \end{vmatrix} = 0, \\ (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

giacchè l'espressione a primo membro è zero nel punto  $\xi$ , in base a (2), ed ha per derivata

$$(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ L u_i & L u_j \end{vmatrix},$$

identicamente zero, in base a (1). La (7) si può anche scrivere, in forma più esplicita,

$$(8) \quad \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-v} (-1)^{r-1} \sum_{t=0}^{r-1} \binom{r-1}{t} \theta_{n-v}^{(r-1-t)} \begin{vmatrix} u_i^{(n-v-r)} & u_j^{(n-v-r)} \\ u_i^{(n-v+t)} & u_j^{(n-v+t)} \end{vmatrix} = 0.$$

Moltiplichiamo ora il primo membro di questa identità per il complemento algebrico del minore  $\begin{vmatrix} u_i^{(h)} & u_j^{(h)} \\ u_i^{(k)} & u_j^{(k)} \end{vmatrix}$  nel determinante  $W$ , indi sommiamo rispetto a  $i$  e  $j$  da 1 a  $n$ ; indicando con  $H_{hk}$  l'espressione che così si ottiene, ricaviamo allora

$$(9) \quad H_{hk} = \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-v} (-1)^{r-1} \sum_{t=0}^{r-1} \binom{r-1}{t} \theta_{n-v}^{(r-1-t)} \left| \frac{h, k}{n-v-r, n-v+t} \right| = 0.$$

Poniamo in particolare  $h = n-1, k = n-s-1$ . Tenendo presente che, per le (4), sarà  $\left| \frac{n-1, n-s-1}{n-v-r, n-v+t} \right| \neq 0$ , soltanto: o quando

$n - v - r = n - 1$  (onde  $r = 1, v = 0, t = 0$ ), oppure quando  $n - v - r = n - s - 1, t \geq v - 1$  (onde  $r = s - v + 1, v - 1 \leq t \leq s - v, v \leq \frac{s+1}{2}$ ), troviamo

$$(10) \quad H_{n-1, n-s-1} = \theta_n \left| \frac{n-s-1}{n} \right| - \sum_{v=1}^{\left[ \frac{s+1}{2} \right]} (-1)^{s-v} \binom{s-v}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-2v+1)} W - \\ - \sum_{v=0}^{\left[ \frac{s}{2} \right]} (-1)^{s-v} \sum_{t=v}^{s-v} \binom{s-v}{t} \theta_{n-v}^{(s-v-t)} \left| \frac{n-1}{n-v+t} \right| = 0.$$

Se invece poniamo, in (9),  $h = n - s - 1, k = n - s - 2$ , troveremo, sempre in base a (4), come termini diversi da zero, soltanto quelli per cui: o  $n - s - 1 = n - v + t, n - s - 2 = n - v - r$  (onde  $r = 1, t = 0, v = s + 1$ ), oppure  $n - s - 1 = n - v - r, t \geq v$  (onde  $r = s - v + 1, v \leq t \leq s - v, v \leq \frac{s}{2}$ ), oppure ancora  $n - s - 2 = n - r - v, t \geq v$  (onde  $r = s - v + 2, v \leq t \leq s - v + 1, v \leq \frac{s+1}{2}$ ); pertanto

$$(11) \quad H_{n-s-1, n-s-2} = \sum_{v=0}^{\left[ \frac{s}{2} \right]} (-1)^{s-v} \sum_{t=v}^{s-v} \binom{s-v}{t} \theta_{n-v}^{(s-v-t)} \left| \frac{n-s-2}{n-v+t} \right| + \\ + \sum_{v=0}^{\left[ \frac{s+1}{2} \right]} (-1)^{s-v} \sum_{t=v}^{s-v+1} \binom{s-v+1}{t} \theta_{n-v}^{(s-v-t+1)} \left| \frac{n-s-1}{n-v+t} \right| - \theta_{n-s-1} W = 0.$$

Osserviamo pure che, moltiplicando  $Lu_i$  per il complemento algebrico dell'elemento  $u_i$  nel determinante  $W$ , indi sommando rispetto ad  $i$ , si ricava

$$(12) \quad M = \sum_{r=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (-1)^{n-v-r} \sum_{t=v}^{n-v} \binom{n-v}{t} \theta_{n-v}^{(n-v-t)} \left| \frac{0}{n-v+t} \right| - \theta_0 W = 0.$$

Si può notare, tenendo presente la convenzione fatta a proposito della (5), che l'espressione  $M$  definita da (12) è quella cui si riduce la (11), per  $s = n - 1$ .

3. Passiamo ora alla effettiva verifica della (3), esplicitando anzitutto l'espressione ivi indicata brevemente con  $A^{(1)}$

(1) Ove si presenti un simbolo di  $\Sigma$  con l'indice superiore minore dell'indice inferiore, s'intende che esso valga zero. Ciò accade, per esempio, per la penultima sommatoria che figura nell'espressione di  $A$  data nel testo, quando  $s = n - v - 1$ .

$$A = \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| + \right. \\ \left. + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| \right\}.$$

Si tratta, come si vede, di una forma quadratica nelle  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ .  
Calcoliamone la derivata, tenendo presenti le (5),

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s)} \sum_{t=s}^{n-v-1} y^{(n-v-t-1)} \sum_{i=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| + \right. \\ \left. + y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| \right\} + \\ + \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \left[ \theta_{n-v}^{(s-t)} \left( \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t+1} \right| - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left| \frac{n-v-s-2}{n-v+t} \right| + \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t}, \frac{n-1}{n} \right| \right) + \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| \right] + \\ \left. + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \left[ \theta_{n-v}^{(s-t)} \left( \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t+1} \right| - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left| \frac{n-v-r-2}{n-v+t} \right| + \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t}, \frac{n-1}{n} \right| \right) + \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| \right] \right\} + \\ - \frac{\left| \frac{n-1}{n} \right|}{W^2} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| + \right. \\ \left. + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| \right\}.$$

Questa espressione si semplifica, osservando che è, in base a facili trasformazioni di sommatorie,

$$\frac{2}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-2} (-1)^s y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} \left\{ y^{(n-v-r)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| - \right. \\ \left. - y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-2}{n-v+t} \right| \right\} = \\ = \frac{2}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-2} (-1)^s y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-s-2}{n-v+t} \right|;$$

e inoltre, tenendo anche presente una nota relazione fra i coefficienti binomiali,

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s)} \sum_{r=s}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| + \right. \\
 & + y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \left[ \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t+1} \right| + \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| \right] \Big\} = \\
 & = \frac{2}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left\{ (-1)^v y^{(n-2v)} \sum_{r=v}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \theta_{n-v} \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| + \right. \\
 & + \sum_{s=v}^{n-v-2} (-1)^{s+1} y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \left[ \sum_{t=v}^{s+1} \binom{s+1}{t} \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| + \right. \\
 & - \sum_{t=v+1}^{s+1} \binom{s}{t-1} \theta_{n-v}^{(s-t-1)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| - \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| \Big] \Big\} = \\
 & = \frac{2}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left\{ (-1)^v y^{(n-2v)} \sum_{r=v}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \theta_{n-v} \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| + \right. \\
 & + \sum_{s=v}^{n-v-2} (-1)^{s+1} y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} \binom{s}{v-1} y^{(n-v-r-1)} \theta_{n-v}^{(s-v+1)} \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| \Big\} = \\
 & = \frac{2}{W} y^{(n)} \sum_{r=0}^{n-1} y^{(n-r-1)} \theta_n \left| \frac{n-r-1}{n} \right| + \\
 & + \frac{2}{W} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \binom{s-1}{v-1} y^{(n-v-s)} \sum_{r=s}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \theta_{n-v}^{(s-v)} \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| ;
 \end{aligned}$$

resta dunque:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{dx} &= \frac{2}{W} y^{(n)} \sum_{r=0}^{n-1} y^{(n-r-1)} \theta_n \left| \frac{n-r-1}{n} \right| + \\
 & + \frac{2}{W} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \binom{s-1}{v-1} y^{(n-v-s)} \sum_{r=s}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \theta_{n-v}^{(s-v)} \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| + \\
 & + \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \left[ \theta_{n-v}^{(s-t)} \left( \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t+1} \right| + \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left| \frac{n-v-s-2}{n-v+t} \right| + \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t}, \frac{n-1}{n} \right| \right) + \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| \Big] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1, n-1}{n-v+t, n} \right| \Bigg\} + \\
 & - \frac{\left| \frac{n-1}{n} \right|}{W^2} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| + \right. \\
 & \left. + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| \right\}.
 \end{aligned}$$

Per mostrare che  $\frac{dA}{dx}$  si identifica col primo membro di (3), aggiungeremo ora all'espressione trovata per codesta derivata delle quantità che risultano identicamente nulle, per quanto si è osservato nei nn. 1 e 2.

4. Aggiungiamo anzitutto la seguente espressione, nulla in virtù di (6),

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{W^2} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} K_{n-v-s-1, n-v+t} + \right. \\
 & \left. + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} K_{n-v-r-1, n-v+t} \right\} = \\
 & = \frac{1}{W^2} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left( \left| \frac{n-1}{n} \right| \cdot \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left| \frac{n-1}{n-v+t} \right| \cdot \left| \frac{n-v-s-1}{n} \right| - W \cdot \left| \frac{n-v-s-1, n-1}{n-v+t, n} \right| \right) + \right. \\
 & \left. + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left( \left| \frac{n-1}{n} \right| \cdot \left| \frac{n-v-r-1}{n-v+t} \right| - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left| \frac{n-1}{n-v+t} \right| \cdot \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| - W \cdot \left| \frac{n-v-r-1, n-1}{n-v+t, n} \right| \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Otteniamo così, dopo aver cancellati i termini che si elidono,

$$\begin{aligned}
 \frac{dA}{dx} &= \frac{2}{W} y^{(n)} \sum_{r=0}^{n-1} y^{(n-r-1)} \theta_n \left| \frac{n-r-1}{n} \right| + \\
 & + \frac{2}{W} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \binom{s-1}{v-1} y^{(n-v-s)} \sum_{r=s}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \theta_{n-v}^{(s-v)} \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| + \\
 & + \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \left[ \theta_{n-v}^{(s-t)} \left( \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t+1} \right| + \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \left| \frac{n-v-s-2}{n-v+t} \right| \Bigg) + \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| \Bigg\} + \\
 & - \frac{1}{W^2} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-1}{n-v+t} \right| \cdot \left| \frac{n-v-s-1}{n} \right| + \right. \\
 & \left. + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} y^{(n-v-r-1)} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-1}{n-v+t} \right| \cdot \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| \right\}.
 \end{aligned}$$

Sottraggiamo adesso dal secondo membro l'espressione, nulla in virtù di (9),

$$\frac{1}{W^2} \sum_{s=1}^{n-1} \left\{ \left| \frac{n-s-1}{n} \right| y^{(n-s-1)^2} + 2 y^{(n-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-1} \left| \frac{n-r-1}{n} \right| y^{(n-r-1)} \right\} H_{n-1, n-s-1},$$

la quale, in base alla (10) ed eseguendo una trasformazione nelle somme, si può scrivere

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{W^2} \sum_{s=1}^{n-1} \left\{ \left| \frac{n-s-1}{n} \right| y^{(n-s-1)^2} + 2 y^{(n-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-1} \left| \frac{n-r-1}{n} \right| y^{(n-r-1)} \right\} \left\{ \theta_n \left| \frac{n-s-1}{n} \right| - \right. \\
 & - \sum_{v=0}^{\left[ \frac{s}{2} \right]} (-1)^{s-v} \sum_{t=v}^{s-v} \binom{s-v}{t} \theta_{n-v}^{(s-v-t)} \left| \frac{n-1}{n-v+t} \right| \Bigg\} - \frac{1}{W} \sum_{s=1}^{n-1} \left\{ \left| \frac{n-s-1}{n} \right| y^{(n-s-1)^2} + \right. \\
 & + 2 y^{(n-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-1} \left| \frac{n-r-1}{n} \right| y^{(n-r-1)} \Bigg\} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{s+1}{2} \right]} (-1)^{s-v} \binom{s-v}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-2v+1)} = \\
 & = \frac{\theta_n}{W^2} \sum_{s=1}^{n-1} \left\{ \left| \frac{n-s-1}{n} \right|^2 y^{(n-s-1)^2} + 2 \left| \frac{n-s-1}{n} \right| y^{(n-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-1} \left| \frac{n-r-1}{n} \right| y^{(n-r-1)} \right\} - \\
 & - \frac{1}{W^2} \sum_{s=1}^{n-1} \left\{ \left| \frac{n-s-1}{n} \right| y^{(n-s-1)^2} + 2 y^{(n-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-1} \left| \frac{n-r-1}{n} \right| y^{(n-r-1)} \right\} (-1)^s \sum_{t=0}^s \binom{s}{t} \theta_n^{(s-t)} \left| \frac{n-1}{n+t} \right| + \\
 & - \frac{1}{W^2} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} \left\{ \left| \frac{n-v-s-1}{n} \right| y^{(n-v-s-1)^2} + \right. \\
 & + 2 y^{(n-v-s-1)} \sum_{r=s+1}^{n-v-1} \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| y^{(n-v-r-1)} \Bigg\} (-1)^s \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-1}{n-v+t} \right| + \\
 & - \frac{1}{W} \left| \frac{0}{n} \right| y^2 \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (-1)^{n-v-1} \binom{n-v-1}{v-1} \theta_{n-v}^{(n-2v)} - \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} \left\{ \left| \frac{n-v-s}{n} \right| y^{(n-v-s)^2} + \right. \\
 & + 2 y^{(n-v-s)} \sum_{r=s}^{n-v-1} \left| \frac{n-v-r-1}{n} \right| y^{(n-v-r-1)} \Bigg\} (-1)^{s-1} \binom{s-1}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-v)}.
 \end{aligned}$$

Ricaviamo, in tal modo,

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} = & \frac{2}{W} y^{(n)} \sum_{r=0}^{n-1} y^{(n-r-1)} \theta_n \left| \frac{n-r-1}{n} \right| - \frac{\theta_n}{W^2} \sum_{s=1}^{n-1} \left\{ \left| \frac{n-s-1}{n} \right|^2 y^{(n-s-1)^2} + \right. \\ & + 2 y^{(n-s-1)} \left| \frac{n-s-1}{n} \right| \sum_{r=s+1}^{n-1} \left| \frac{n-r-1}{n} \right| y^{(n-r-1)} \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \left\{ y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \left[ \theta_{n-v}^{(s-t)} \left( \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t+1} \right| + \right. \right. \right. \\ & + \left. \left| \frac{n-v-s-2}{n-v+t} \right| \right) + \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{W} \left| \frac{0}{n} \right| y^2 \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} (-1)^{n-v-1} \binom{n-v-1}{v-1} \theta_{n-v}^{(n-2v)} + \\ & + \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} \left| \frac{n-v-s}{n} \right| y^{(n-v-s)^2} (-1)^{s-1} \binom{s-1}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-v)} - \\ & - \frac{1}{W^2} y^{(n-1)^2} \theta_n \left| \frac{n-1}{n} \right|^2 - 2 y^{(n-1)} \theta_n \sum_{r=1}^{n-1} y^{(n-r-1)} \left| \frac{n-1}{n} \right| \cdot \left| \frac{n-r-1}{n} \right|. \end{aligned}$$

Sottraggiamo ancora dal secondo membro l'espressione, nulla in virtù di (9) e (12),

$$\frac{1}{W} \left( \sum_{s=0}^{n-2} H_{n-s-1, n-s-2} y^{(n-s-1)^2} + M y^2 \right),$$

la quale, in base alla (11), si può anche scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{W} \sum_{s=0}^{n-1} \left\{ \sum_{v=0}^{\left[ \frac{s}{2} \right]} (-1)^{s-v} \sum_{t=v}^{s-v} \binom{s-v}{t} \theta_{n-v}^{(s-v-t)} \left| \frac{n-s-2}{n-v+t} \right| + \sum_{v=0}^{\left[ \frac{s+1}{2} \right]} (-1)^{s-v} \theta_{n-v} \left| \frac{n-s-1}{n-2v+s+1} \right| + \right. \\ & + \sum_{v=0}^{\left[ \frac{s}{2} \right]} (-1)^{s-v} \sum_{t=v}^{s-v} \binom{s-v+1}{t} \theta_{n-v}^{(s-v-t+1)} \left| \frac{n-s-1}{n-v+t} \right| \left. \left\{ y^{(n-s-1)^2} - \sum_{s=0}^{n-1} \theta_{n-s-1} y^{(n-s-1)^2} \right\} \right. \\ & = \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \sum_{t=v}^s \binom{s}{t} \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-s-2}{n-v+t} \right| y^{(n-v-s-1)^2} + \\ & + \frac{1}{W} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \theta_n \left| \frac{n-s-1}{n+s+1} \right| y^{(n-s-1)^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v} (-1)^{s-1} \theta_{n-v} \left| \frac{n-v-s}{n-v+s} \right| y^{(n-v-s)^2} +$$

$$+ \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s \sum_{t=v}^s \binom{s+1}{t} \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| y^{(n-v-s-1)^2} - \sum_{s=0}^{n-1} \theta_{n-v-1} y^{(n-s-1)^2}.$$

Osservando inoltre che è

$$\theta_n y^{(n)^2} - \theta_n \left( \frac{W[u_1, u_2, \dots, u_n, y]}{W} \right)^2 =$$

$$= \theta_n y^{(n)^2} - \frac{\theta_n}{W^2} \left[ y^{(n)} W - \sum_{r=0}^{n-1} \left| \frac{n-r-1}{n} \right| y^{(n-r-1)^2} \right]^2,$$

perveniamo dunque alla eguaglianza

$$\frac{dA}{dx} = \sum_{s=0}^n \theta_{n-s} y^{(n-s)^2} - \frac{\theta_n}{W^2} (W[u_1, u_2, \dots, u_n, y])^2 +$$

$$+ \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \left[ \binom{s}{t} \left( \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t+1} \right| + \right. \right.$$

$$\left. + \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| \right) - \binom{s+1}{t} \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| \Big] +$$

$$+ \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v} (-1)^{s-1} \binom{s-1}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-v)} \left| \frac{n-v-s}{n} \right| y^{(n-v-s)^2} -$$

$$- \frac{1}{W} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \theta_n \left| \frac{n-s-1}{n+s+1} \right| y^{(n-s-1)^2} -$$

$$- \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v} (-1)^{s-1} \theta_{n-v} \left| \frac{n-v-s}{n-v+s} \right| y^{(n-v-s)^2},$$

la quale si riduce all'identità (3) da dimostrare, ove noi proviamo che si distruggono tutti i termini col fattore  $\frac{1}{W}$ . Ora infatti è

$$\frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s y^{(n-v-s-1)^2} \sum_{t=v}^s \left[ \binom{s}{t} \left( \theta_{n-v}^{(s-t)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t+1} \right| + \right. \right.$$

$$\left. + \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| \right) - \binom{s+1}{t} \theta_{n-v}^{(s-t+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+t} \right| \Big] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v-1} (-1)^s y^{(n-v-s-1)^2} \left[ \theta_{n-v} \left| \frac{n-v-s-1}{n-v+s+1} \right| - \right. \\
 &\quad \left. - \binom{s}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-v+1)} \left| \frac{n-v-s-1}{n} \right| \right] = \\
 &= \frac{1}{W} \sum_{v=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v+1}^{n-v} (-1)^{s-1} y^{(n-v-s)^2} \left[ \theta_{n-v} \left| \frac{n-v-s}{n-v+s} \right| - \right. \\
 &\quad \left. - \binom{s-1}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-v)} \left| \frac{n-v-s}{n} \right| \right]; \\
 &\quad \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v} (-1)^{s-1} \binom{s-1}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-v)} \left| \frac{n-v-s}{n} \right| y^{(n-v-s)^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{W} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \theta_n \left| \frac{n-s-1}{n+s+1} \right| y^{(n-s-1)^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{s=v}^{n-v} (-1)^{s-1} \theta_{n-v} \left| \frac{n-v-s}{n-v+s} \right| y^{(n-v-s)^2} = \\
 &= \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{v-1} \theta_{n-v} \left| \frac{n-2v}{n} \right| y^{(n-2v)^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v+1}^{n-v} (-1)^{s-1} \binom{s-1}{v-1} \theta_{n-v}^{(s-v)} \left| \frac{n-v-s}{n} \right| y^{(n-v-s)^2} + \\
 &\quad + \frac{1}{W} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \theta_n \left| \frac{n-s-1}{n+s+1} \right| y^{(n-s-1)^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{v-1} \theta_{n-v} \left| \frac{n-2v}{n} \right| y^{(n-2v)^2} - \\
 &\quad - \frac{1}{W} \sum_{v=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{s=v+1}^{n-v} (-1)^{s-1} \theta_{n-v} \left| \frac{n-v-s}{n-v+s} \right| y^{(n-v-s)^2};
 \end{aligned}$$

da cui, sommando membro a membro, si deduce appunto l'annullarsi del gruppo di termini onde l'ultima espressione che abbiamo trovata per  $\frac{dA}{dx}$  differisce da quella che figura in (3).

**Matematica.** — *Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$ .* Nota I di M. VILLA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. In una Nota recente, pubblicata in questi stessi « Rendiconti »<sup>(2)</sup>, ho dimostrato come l'unica  $V_k$  che possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}(2k-1 \leq \delta \leq 3k-3)$ , e per cui lo spazio ambiente ha la massima dimensione compatibile con tale ipotesi, sia il cono dell' $S_{\frac{(3k-\delta-1)(3k-\delta+2)}{2} + \delta - 2k + 1}$  che proietta da un  $S_{\delta-2k}$  la  $V_{\frac{2k-\delta-1}{3k-\delta-1}}$  rappresentante le quadriche di  $S_{\frac{3k-\delta-1}{2}}$ <sup>(3)</sup>.

E questa proprietà caratteristica dei coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta le quadriche di  $S_r$  ( $r > 1$ ) appare tanto più notevole quando si pensi che, per i coni proiettanti le varietà che rappresentano le forme d'ordine  $n$  ( $n > 2$ ) d'uno spazio lineare, una caratterizzazione che estenda la precedente non è certo immediata e, comunque, per  $n > 2$ , non avrebbe la spontaneità che ha invece per  $n = 2$ <sup>(4)</sup>.

(1) Nella seduta del 3 dicembre 1938.

(2) VILLA, *Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare*. Questi « Rendiconti », vol. XXVIII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 3. Questo lavoro si richiamerà con N.

(3) Per  $\delta = 2k - 1$ , la  $V_k$  non è più un cono ma la stessa  $V_k^{2k}$  che rappresenta le quadriche di  $S_k$  e il teorema rientra, per  $n = 2$ , in un teorema di Bompiani sulla  $V_h^{n_k}$  che rappresenta le forme d'ordine  $n$  di un  $S_k$  (si veda: BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*. « Memorie dell'Accademia dei Lincei », vol. XIII, ser. 5<sup>a</sup>, 1922, p. 474. Si veda pure: VILLA, *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche*. Nota I, questi « Rendiconti », vol. XXVIII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, n. 5).

(4) Dal precedente teorema sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  segue: Una  $V_{r+i}$  le cui sezioni con gli  $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$  dello spazio ambiente siano  $V_r^{2r}$ , rappresentabili su un  $S_r$  mediante il sistema di tutte le quadriche di questo spazio, è necessariamente il cono proiettante da un  $S_{i-1}$  una tale  $V_r^{2r}$ . (Si veda VILLA, N, p. 11).

Per i coni proiettanti le varietà  $V_r^{n_r}$  che rappresentano le forme d'ordine  $n$  di un  $S_r$ , limitatamente al campo algebrico, lo Scorza ha dimostrato, più in generale, che: Se le sezioni di una  $V_{r+i}$  con gli  $S_{\binom{n+r}{r}-1}$  dello spazio ambiente sono delle  $V_r^{n_r}$  che rappresentano le forme d'ordine  $n$  di un  $S_r$ , necessariamente quella  $V_{r+i}$  è un cono proiettante



La Nota presente è dedicata invece alle varietà  $V_k$  situate sopra i detti coni  $C_{r,v}$ , proiettanti da un  $S_v$  la  $V_r^{2r}$  che rappresenta le quadriche di  $S_r$  ( $S_v$  e l' $S_{r(r+3)/2}$  ambiente di  $V_r^{2r}$  essendo sghembi:  $r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v$ ,  $r > 1$ ,  $v > 0$ ), le quali godono pure di una notevole proprietà, esposta nel n. 2.

Da questo teorema del n. 2 segue che le  $V_k$  ( $k \geq r + \frac{v+1}{2}$ ) situate sui coni  $C_{r,v}$  (incontrate dagli  $S_{v+1}$  del cono in  $V_{k-r}$ ) posseggono totalità di  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  <sup>(1)</sup> di dimensione maggiore di quella che comporterebbe la dimensione dello spazio a cui appartengono, come appunto avviene per gli stessi coni  $C_{r,v}$ .

E basterebbe ciò per conferire a dette varietà un interesse particolare nella teoria delle curve quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$ .

Si noti poi che fatti analoghi a questo si presentano, più in generale, rispetto a quasi-asintotiche  $\gamma_{r,s}$  di indici qualunque ( $r < s-1$ ), per i coni proiettanti le varietà che rappresentano le forme d'ordine  $n$  ( $n > 2$ ) di uno spazio lineare e per le varietà situate su di essi, come si vedrà in un mio prossimo lavoro.

Le  $V_k$  situate sui coni  $C_{r,v}$  porgono esempi di  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , per tutti i possibili valori di  $k$  e di  $\delta$  ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-4$ ) <sup>(2)</sup>; anzi, per uno stesso valore di  $\delta$ , di queste  $V_k$  (dove  $k$  è pure assegnato) ve ne sono di tipo diverso (a seconda dei coni  $C_{r,v}$  su cui giacciono).

Esse portano quindi un contributo notevole alla ricerca delle  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-4$ ), alla quale sono dedicati alcuni miei lavori (e che, nell'ipotesi in cui  $V_k$  appartenga allo spazio di dimensione massima, è esaurita dal teorema enunciato nelle prime righe di questa Nota) <sup>(3)</sup>.

da un  $S_{i-1}$  una tale  $V_r^{n^r}$ . (Si veda: G. SCORZA, *Sopra una certa classe di varietà razionali*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », vol. 28, 1909, p. 400).

Dal teorema di Bompiani già citato e da questo di Scorza, si sarebbe indotti, contrariamente a quanto dissi sopra, a ritenere immediata un'estensione del teorema del testo.

(1) Per le nozioni di curva  $\gamma_{1,3}$  e di  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di una  $V_k$ , rimando ai miei lavori già citati.

(2) Escluso quindi:  $\delta = 3k-3$  e  $\delta = 3k-2$ . Ma le  $V_k$  che posseggono  $\infty^{3k-3}$  o  $\infty^{3k-2} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  sono tutte note.

Dimostrai infatti (nel n. 9 di N) che: le  $V_k$  che posseggono  $\infty^{3k-3} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  sono il cono di Veronese dell' $S_{k+3}$  e le  $V_k$  dell' $S_{k+2}$  (non sviluppabili ordinarie). Le  $V_k$  con  $\infty^{3k-2} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  sono poi le  $V_k$  dell' $S_{k+1}$  (ed esse soltanto).

(3) Le  $V_k$  situate sui coni  $C_{r,v}$  si devono quindi aggiungere alle  $V_k$  del n. 4 di N, dove raccolti tutti i risultati noti, sino allora, sulle  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ .

Il teorema del n. 2 è completato da quelli del n. 3 che assegnano proprietà caratteristiche per i coni  $C_{r,v}$  e per le  $V_k$  poste su di essi  $\left(r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v\right)$ . Gli  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di queste  $V_k$  sono organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$  dipendenti, se  $\delta > 2k-1$ , da  $\delta - 2k + 1$  funzioni arbitrarie (n. 2).

Anche qui si verifica dunque quanto avviene in *tutti* i casi finora esaminati di  $V_k$  con  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , e cioè le  $\gamma_{1,3}$  della  $V_k$  dipendono, se  $\delta > 2k-1$ , da  $\delta - 2k + 1$  funzioni arbitrarie (quant'è la dimensione del sistema degli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  aventi in comune uno stesso  $E_1$ ). Cosa questa che dapprima non si prevedeva<sup>(1)</sup>.

Fra le varietà in discorso le più importanti sono quelle per  $v$  dispari e relative al valore minimo  $r + \frac{v+1}{2}$  di  $k$  (n. 4).

Se  $r = 2$ ,  $C_{2,v}$  è un cono di Veronese e fra le  $V_k$  che considereremo sopra di esso ci sono, in particolare, per  $k = v + 2$ , le varietà  $\Phi_k$  che già studiai in una Nota recente<sup>(2)</sup>.

Il predetto teorema di Bompiani e i risultati ottenuti nei miei lavori già citati e nella Nota presente assicurano alla  $V_r^{2r}$ , che rappresenta le quadriche di  $S_r$ , ai coni che la proiettano e alle varietà situate su questi coni un posto notevole nella teoria delle curve quasi-asintotiche.

2. Il cono  $C_{r,v}$  ha dimensione  $r + v + 1$ . Consideriamo il cono  $W_{2r+v+1}$ , di vertice  $S_v$  e di dimensione  $2r + v + 1$ , luogo degli  $S_{r+v+1}$  tangenti a  $C_{r,v}$ . Il cono  $W_{2r+v+1}$  proietta manifestamente dall' $S_v$  la varietà luogo degli  $S_r$  tangenti a  $V_r^{2r}$ , la quale ha dimensione  $2r$  (perchè  $V_r^{2r}$  non soddisfa ad equazioni di Laplace)<sup>(3)</sup>.

(1) Nelle mie prime due Note su queste ricerche io fui appunto così indotto in errore. Si veda: VILLA, N, nn. 1, 4.

(2) VILLA, *Sopra una classe di  $V_k$  situate sui coni di Veronese*. Questi « Rendiconti », vol. XXVII, ser. 6<sup>a</sup>, 1938, p. 217. Per una proprietà delle  $V_k$  che ho considerate in quella Nota e che ho indicate con  $\Phi_k$ , si veda pure: VILLA, *Ricerche sulle varietà  $V_k$  che posseggono  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , con particolare riguardo al caso  $k=4$ ,  $\delta=8$* , « Memoria dell'Accademia dei Lincei » (in corso di stampa), n. 36. Questa Memoria (che si richiama con M) pone in luce il notevolissimo interesse delle  $\Phi_4$ . Come ebbi già occasione d'osservare altrove, è curioso il fatto che particolari  $\Phi_4$  si presentino anche in importanti ricerche di natura assolutamente diversa. Si veda: G. SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*. « Annali di Matematica », vol. 15, ser. III, 1908, p. 218, Caso C<sup>V</sup> (dove, per di più, la particolare  $\Phi_4$  si presenta accoppiata alla  $V_4^6$  di Segre come in M).

(3) La varietà degli  $S_m$  tangenti a una  $V_m$  ha dimensione  $\leq 2m$ . Si veda: BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*. « Atti dell'Accademia di Torino », vol. 69, 1913, p. 98.

Ciò posto, indichiamo con  $\Phi_k^{r,v}$  una  $V_k$  situata sopra il cono  $C_{r,v}$ , incontrata dagli  $S_{v+1}$  del cono in  $V_{k-r}$  e i cui  $S_k$  tangenti riempiano il cono  $W_{2r+v+1} \left( r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v, r > 1, v > 0 \right)$ .

Si noterà che per una  $V_k$  generica situata sopra il cono  $C_{r,v}$ , dove  $k \geq r + \frac{v+1}{2}$ , gli  $S_k$  tangenti riempiono appunto il cono  $W_{2r+v+1}$  perchè la varietà luogo degli  $S_k$  tangenti a  $V_k$  ha dimensione  $\leq 2k$  ed è  $2k \geq 2r + v + 1$ , essendo  $k \geq r + \frac{v+1}{2}$ .

$\Phi_k^{r,v}$  appartiene all' $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1}$ . S'avvertirà che dalle precedenti disuguaglianze segue  $k > 2$ .

Sussiste il teorema:

La varietà  $\Phi_k^{r,v}$  possiede  $\infty^{2(2k-r-1)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  esattamente  $\left( r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v, r > 1, v > 0 \right)$ , organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$  dipendenti da  $2k - 2r - v - 1$  funzioni arbitrarie; le  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r,v}$  sono tutte e sole le  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_{k-r+1}$  (dell' $S_{v+3}$ ) intersezioni di  $\Phi_k^{r,v}$  con i coni quadrici (di vertice  $S_v$ ) contenuti nel cono  $C_{r,v}$ .

Infatti: la  $V_{k-r+1}$  intersezione di  $\Phi_k^{r,v}$  con un cono quadrico (di vertice  $S_v$ ) contenuto in  $C_{r,v}$  appartiene all' $S_{v+3}$ .

Questo  $S_{v+3}$  giace sul cono  $W_{2r+v+1}$ , luogo degli  $S_{k-v+1}$  tangenti a  $C_{r,v}$  e luogo degli  $S_k$  tangenti a  $\Phi_k^{r,v}$ .

Siccome  $\Phi_k^{r,v}$  sega  $S_{v+3}$  nella  $V_{k-r+1}$ , il luogo degli  $S_{k-r+1}$  tangenti a  $V_{k-r+1}$  sarà l'intersezione di  $W_{2r+v+1}$  con l' $S_{v+3}$ , cioè sarà lo stesso  $S_{v+3}$ .

Concludendo: la  $V_{k-r+1}$  appartiene all' $S_{v+3}$  e i suoi  $S_{k-r+1}$  tangenti riempiono questo  $S_{v+3}$ .

Segue che  $V_{k-r+1}$  possiede  $\infty^{4(k-r)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$  dipendenti da  $2k - 2r - v - 1$  funzioni arbitrarie<sup>(1)</sup>.

Siccome ogni  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $V_{k-r+1}$  è pure  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r,v}$  e siccome le  $V_{k-r+1}$  di  $\Phi_k^{r,v}$  sono  $\infty^{2r-2}$  (tante quante le coniche di  $V_r^{2r}$ ), si con-

(1) Vale infatti il teorema seguente (si veda: VILLA, M, n. 32): Le  $V_m$  dell' $S_d$ , i cui  $S_m$  tangenti riempiono l' $S_d$  ambiente, posseggono esattamente  $\infty^{4m-d-1} \left( \frac{d}{2} \leq m < d \right) E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ordinabili in curve  $\gamma_{1,3}$  dipendenti da  $2m - d$  funzioni arbitrarie.

Posto  $m = k - r + 1$ ,  $d = v + 3$  si ha appunto che una  $V_{k-r+1}$  dell' $S_{v+3}$ , i cui  $S_{k-r+1}$  tangenti riempiono l' $S_{v+3}$  (come avviene per la nostra  $V_{k-r+1}$ ), possiede  $\infty^{4(k-r)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$  dipendenti da  $2k - 2r - v - 1$  funzioni arbitrarie. S'avverta poi che essendo  $r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v$  le  $\frac{d}{2} \leq k < d$  sono verificate.

clude appunto che  $\Phi_k^{r,v}$  possiede  $\infty^4(k-r)-v+2r-2 = \infty^{2(2k-r-1)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$  dipendenti da  $2k-2r-v-1$  funzioni arbitrarie.

Inoltre:  $\Phi_k^{r,v}$  non possiede più di  $\infty^{2(2k-r-1)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  perchè, per definizione, la varietà luogo degli  $S_k$  ad essa tangenti ha esattamente dimensione  $2r+v+1$  (1).

Rimane da dimostrare che ogni  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r,v}$  appartiene ad una  $V_{k-r+1}$ , intersezione di  $\Phi_k^{r,v}$  con un cono quadrico (di vertice  $S_v$ ) contenuto nel cono  $C_{r,v}$ , e che è  $\gamma_{1,3}$  pure su di essa.

Supponiamo, dapprima,  $\gamma_{1,3}$  non appartenente ad un  $S_{v+1}$  di  $C_{r,v}$ .

$\gamma_{1,3}$  sta necessariamente sopra una delle  $V_{k-r+1}$ : infatti se proiettiamo dall' $S_v$  sopra un  $S_{r(r+3)/2}$  (sghebbato con  $S_v$ ),  $\Phi_k^{r,v}$  si proietta nella  $V_r^{2r}$  e la

$\gamma_{1,3}$  in una  $\gamma'_{1,3}$  di  $V_r^{2r}$ , cioè in una sua conica. La  $\gamma_{1,3}$  appartiene dunque al cono quadrico che proietta la conica da  $S_v$  e quindi alla  $V_{k-r+1}$  intersezione di questo cono con  $\Phi_k^{r,v}$ .

Proviamo ora che la  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r,v}$  è pure  $\gamma_{1,3}$  su  $V_{k-r+1}$ .

Intanto se la curva  $\gamma_{1,3}$  è piana essa è senz'altro  $\gamma_{1,3}$  anche su  $V_{k-r+1}$ . Se  $\gamma_{1,3}$  non è piana, per definizione, in un punto P di  $\gamma_{1,3}$ , l' $S_k$  tangente a  $\Phi_k^{r,v}$  e l' $S_3$  osculatore a  $\gamma_{1,3}$  hanno un  $S_2$  in comune.

L' $S_{k-r+1}$  tangente in P a  $V_{k-r+1}$ , essendo lo spazio intersezione dell' $S_k$  con l' $S_{v+3}$  ambiente di  $V_{k-r+1}$ , contiene l' $S_2$  perchè  $S_{v+3}$  contiene l' $S_3$ . L' $S_{k-r+1}$  e l' $S_3$  hanno dunque un  $S_2$  in comune: ciò prova appunto che la curva è  $\gamma_{1,3}$  su  $V_{k-r+1}$ .

Se poi la curva  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r,v}$  sta in un  $S_{v+1}$  di  $C_{r,v}$ , essa è pure  $\gamma_{1,3}$  sulla  $V_{k-r}$  in cui  $\Phi_k^{r,v}$  sega l' $S_{v+1}$ . Infatti, ragionando come precedentemente, se  $\gamma_{1,3}$  è piana essa è senz'altro  $\gamma_{1,3}$  anche su  $V_{k-r}$ . Se  $\gamma_{1,3}$  non è piana, in un punto P di  $\gamma_{1,3}$ , l' $S_k$  tangente a  $\Phi_k^{r,v}$  e l' $S_3$  osculatore a  $\gamma_{1,3}$  si tagliano in un  $S_2$ .

L' $S_{k-r}$  tangente in P a  $V_{k-r}$ , essendo l'intersezione dell' $S_k$  con l' $S_{v+1}$  ambiente di  $V_{k-r}$ , contiene l' $S_2$  perchè  $S_{v+1}$  contiene l' $S_3$ . L' $S_{k-r}$  e l' $S_3$  hanno quindi un  $S_2$  intersezione, cioè la curva è  $\gamma_{1,3}$  su  $V_{k-r}$ . Ma una  $V_{k-r}$  appartiene ad  $\infty^{r-1}$  delle precedenti  $V_{k-r+1}$  (corrispondentemente alle  $\infty^{r-1}$  coniche di  $V_r^{2r}$  passanti per un punto); e quindi, anche nell'ipotesi che la  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r,v}$  appartenga ad un  $S_{v+1}$  di  $C_{r,v}$ ,  $\gamma_{1,3}$  appartiene a una (anzi a  $\infty^{r-1}$ )  $V_{k-r+1}$  ed è  $\gamma_{1,3}$  su di essa perchè lo è su  $V_{k-r}$ .

L'asserto è così dimostrato.

(1) Infatti: se una  $V_k$  possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-2$ ) la varietà luogo degli  $S_k$  tangenti ad essa ha esattamente dimensione  $2k-(\delta-2k+1)$ . (Si veda: VILLA, N, p. 9).

Si noti che per  $\delta = 2(2k-r-1)-v$  si ha appunto per la dimensione della varietà degli  $S_k$  tangenti  $2r+v+1$ .

OSSERVAZIONE. — Per un mio teorema già ricordato le  $V_k$  dell' $S_d$ , i cui  $S_k$  tangenti riempiono l' $S_d$  ambiente, posseggono esattamente  $\infty^{4k-d-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3} \left( \frac{d}{2} \leq k < d \right)$ .

Sono queste le varietà  $V_k$  per le quali l'esistenza di  $\infty^{4k-d-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  dipende solo dalla dimensione dello spazio ambiente.

Come già dissi nel n. 1, le  $\Phi_k^{r,v} \left( r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v, r > 1, v > 0 \right)$  sono invece varietà *eccezionali*, e in ciò risiede appunto il loro interesse.

Esse infatti appartengono all' $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1}$ .

Ora, una  $V_k$  dell' $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1} \left( \frac{r(r+3)}{4} + \frac{v+1}{2} \leq k < \frac{r(r+3)}{2} + v + 1, r > 1, v > 0 \right)$  generica, per il teorema suddetto (posto  $d = \frac{r(r+3)}{2} + v + 1$ ) possiede  $\infty^{4k-v-2-\frac{r(r+3)}{2}} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ .

Se  $k$  soddisfa contemporaneamente alle disequaglianze

$$r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v,$$

$$\frac{r(r+3)}{4} + \frac{v+1}{2} \leq k < \frac{r(r+3)}{2} + v + 1,$$

cioè se  $r, v$  soddisfano alla disequaglianza

$$(I) \quad 2(v-1) \geq r(r-1),$$

si ha dunque che le  $\Phi_k^{r,v}$ , invece di possedere  $\infty^{4k-v-2-\frac{r(r+3)}{2}} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  come avviene per una  $V_k$  generica dell' $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1}$ , ne posseggono  $\infty^{4k-v-2-2r}$ , cioè una totalità di dimensione superiore (essendo  $r > 1$ ).

Se poi  $k$  non soddisfa alla (I) (s'intende restando ferma l'ipotesi:  $r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v$ ) il comportamento eccezionale delle  $\Phi_k^{r,v}$  è evidente.

In ogni caso, esso viene precisato da un teorema del numero seguente dove si assegna una proprietà caratteristica delle  $\Phi_k^{r,v}$ .

**Matematica.** — Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_2^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$ . Nota II di M. VILLA, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.



**Matematica.** — *Curve di massima lunghezza, rappresentatrici di funzioni  $y = f(x)$  a derivate uniformemente lipschitziane* <sup>(1)</sup>.  
Nota di T. VIOLA, presentata <sup>(2)</sup> dal corrisp. M. PICONE.

1. In una Nota precedente ho esposto un procedimento generale per la costruzione delle estremanti di un integrale in forma ordinaria

$$(1) \quad \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

in un insieme  $A$  chiuso e compatto di funzioni  $y = f(x)$ , a derivate  $f'(x)$  equiuniformemente lipschitziane in  $\overline{ab}$ , cioè in un insieme  $A$  contenuto nell'insieme  $E_L$  di tutte le funzioni  $f(x)$  che, per ogni coppia di punti  $x_1, x_2$  appartenenti ad  $\overline{ab}$ , soddisfano alla disuguaglianza

$$|f'(x_1) - f'(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

essendo  $L$  un numero positivo fisso (cioè indipendente dalla funzione  $f(x)$  di  $E_L$ ).

Ho dato una prima semplice applicazione del procedimento, alla costruzione del minimo dell'integrale

$$(2) \quad J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

che esprime la lunghezza di un arco di curva  $y = f(x)$  in  $\overline{ab}$ , sotto determinate condizioni ai limiti. In questa Nota mostrerò come il procedimento possa applicarsi, sebbene in modo meno semplice, alla costruzione del massimo dell'integrale (2). Per l'enunciato delle condizioni ai limiti, rimando al n. 4 della Nota citata.

Utilizzerò questa volta l'insieme  $\Phi A$ , dimostrando che, in quest'insieme, l'integrale (2) possiede effettivamente massimo. Dimostrerò dunque il

**TEOREMA.** — *Il problema di massimo è sempre risolto da una funzione  $\varphi(x)$  dell'insieme  $\Phi$ .*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 3 dicembre 1938.

2. Siano  $f(x)$  una qualunque funzione di  $E_L$ ,  $\overline{cd}$  un qualunque intervallo contenuto in  $\overline{ab}$  ( $a \leq c < d \leq b$ ). Al n. 2 della Nota citata, abbiamo definita una funzione  $\varphi(x)$  di  $\Phi$ , come segue:

$h, k$  sono due punti tali che  $c \leq h \leq k \leq d$ , e  $\varphi(x)$  soddisfa alle equazioni:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -L, \quad \text{per } c \leq x < h, \quad \text{e per } k < x \leq d,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = +L, \quad \text{per } h < x < k,$$

con le quattro condizioni:

$$\varphi(c) = f(c), \quad \varphi'(c) = f'(c), \quad \varphi(d) = f(d), \quad \varphi'(d) = f'(d).$$

Analogamente definiamo ora una nuova funzione  $\varphi_1(x)$  di  $\Phi$  come segue:  $h_1, k_1$  tali che  $c \leq h_1 \leq k_1 \leq d$ , e  $\varphi_1(x)$  soddisfacente alle equazioni:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = +L, \quad \text{per } c \leq x < h_1, \quad \text{e per } k_1 < x \leq d,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -L, \quad \text{per } h_1 < x < k_1,$$

con le stesse quattro condizioni:

$$\varphi_1(c) = f(c), \quad \varphi_1'(c) = f'(c), \quad \varphi_1(d) = f(d), \quad \varphi_1'(d) = f'(d).$$

Si dimostra molto facilmente che è, in tutto  $\overline{cd}$ ,

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \varphi_1(x).$$

Di queste due funzioni  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  diamo una particolare rappresentazione grafica, per  $x$  in  $\overline{cd}$ , sulla parabola  $Y = \frac{1}{2} L X^2$ . Avvertiamo, una volta per tutte, che, su tale parabola, gli archi saranno considerati orientati nel senso delle  $X$  crescenti, e che, quando si parlerà delle loro proiezioni sull'asse  $X$  o sull'asse  $Y$ , s'intenderanno i valori numerici delle differenze delle proiezioni dei loro estremi.

Per fissar le idee, supponiamo  $f'(c) \geq f'(d)$ . Mediante le equazioni parametriche

$$X = \frac{1}{L} \varphi_1'(x), \quad Y = \frac{1}{2L} \varphi_1'(x)^2,$$

la funzione  $y = \varphi_1(x)$  viene rappresentata (per  $x$  in  $\overline{cd}$ ) in tre archi  $\widehat{CH_1}$ ,  $\widehat{H_1K_1}$ ,  $\widehat{K_1D}$  della detta parabola. L'ordine con cui si susseguono

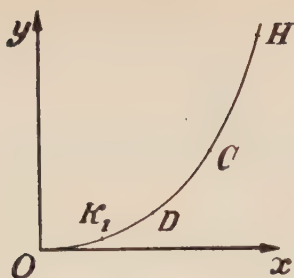


Fig. 1.

gli estremi  $C, H, K_1, D$  sulla parabola, è necessariamente quello indicato nella fig. 1. Se  $f'(c) = f'(d)$ , è  $C \equiv D$ , ma questa non è una sostanziale eccezione, potendosi considerare come caso limite <sup>(1)</sup>. Per  $c \leq x \leq h_1$ , è

$$X = \frac{1}{L} f'(c) + (x - c), \quad Y = \frac{1}{2L} f'(c)^2 + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2} L(x - c)^2;$$

per  $h_1 \leq x \leq k_1$  è

$$X = \frac{1}{L} \varphi'_1(h_1) - (x - h_1), \quad Y = \frac{1}{2L} \varphi'_1(h_1)^2 - \varphi'_1(h_1)(x - h_1) + \frac{1}{2} L(x - h_1)^2;$$

infine per  $k_1 \leq x \leq d$  è

$$X = \frac{1}{L} \varphi'_1(k_1) + (x - k_1), \quad Y = \frac{1}{2L} \varphi'_1(k_1)^2 + \varphi'_1(k_1)(x - k_1) + \frac{1}{2} L(x - k_1)^2,$$

da cui si ricava che le proiezioni di  $\widehat{CH_1}$ , sugli assi  $X, Y$ , sono rispettivamente uguali ad  $h_1 - c$ ,  $\varphi_1(h_1) - \varphi_1(c)$ , quelle di  $\widehat{H_1K_1}$  sono uguali a  $k_1 - h_1$ ,  $\varphi_1(k_1) - \varphi_1(h_1)$ , quelle di  $\widehat{K_1D}$  sono uguali a  $d - k_1$ ,  $\varphi_1(d) - \varphi_1(k_1)$ .

Analoga rappresentazione, sulla stessa parabola  $Y = \frac{1}{2} LX^2$ , si può fare della funzione  $\varphi(x)$ , mediante le equazioni parametriche

$$X = \frac{1}{L} \varphi'(x), \quad Y = \frac{1}{2L} \varphi'(x)^2,$$

ciò che porta a segnare, sulla parabola, tre nuovi archi  $\widehat{CH}$ ,  $\widehat{HK}$ ,  $\widehat{KD}$ , evidentemente dotati di proprietà analoghe a quelle dei primi tre.

3. Quanto all'ordine in cui, sulla parabola, vengono a disporsi i punti  $H, K$ , rispetto a quelli già segnati  $C, H_1, K_1, D$ , è anzitutto immediato

(1) Analoghe osservazioni saranno sottintese nei numeri seguenti.

che  $H$  cade alla sinistra di  $C$ ,  $K$  alla destra di  $D$  e di  $H$ . Ma possiamo precisare che  $H$  cade in  $\widehat{CK}_1$ ,  $K$  in  $\widehat{DH}_1$ . Onde seguirà il

LEMMA I. — *Nell'ipotesi fatta che sia  $f'(c) \cong f'(d)$ , il massimo e il minimo valore raggiunti dalla derivata  $\varphi'(x)$  in  $\widehat{cd}$ , sono compresi fra il massimo e il minimo raggiunti da  $\varphi'_1(x)$ . Questi ultimi sono rispettivamente  $\varphi'_1(h_1)$ ,  $\varphi'_1(k_1)$ .*

Dimostreremo questo lemma insieme al seguente

LEMMA II. — *È  $J[\varphi_1] \cong J[\varphi]$ .*

Infatti la somma delle proiezioni dei tre archi

$$(3) \quad \widehat{CH}_1, \quad \widehat{H}_1K_1, \quad \widehat{K}_1D,$$

su ciascuno dei due assi, cioè la somma della proiezione di  $\widehat{CD}$ , più 2 volte quella di  $\widehat{CH}_1$ , più 2 volte quella di  $\widehat{DK}_1$ , dev'essere uguale alla somma delle proiezioni, rispettivamente sullo stesso asse, dei tre archi

$$(4) \quad \widehat{CH}, \quad \widehat{HK}, \quad \widehat{KD},$$

cioè 3 volte la proiezione della parte di  $\widehat{HK}$  contenuta in  $\widehat{CD}$ , più 2 volte quelle delle parti di  $\widehat{HK}$  esterne a  $\widehat{CD}$ , più una volta quelle delle parti di  $\widehat{CD}$

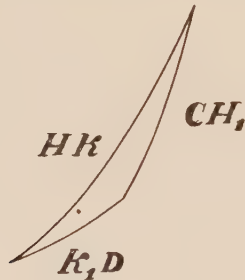


Fig. 2.

esterne ad  $\widehat{HK}$ . Si deduce, per differenza, che la proiezione di  $\widehat{HK}$  deve uguagliare la somma delle proiezioni di  $\widehat{CH}_1$ ,  $\widehat{K}_1D$ . Se dunque si pensa, per un momento, di distaccare i tre archi  $\widehat{HK}$ ,  $\widehat{CH}_1$ ,  $\widehat{K}_1D$ , dalla parabola  $Y = \frac{1}{2}LX^2$  e di spostarli liberamente per traslazione nel proprio piano, dev'essere possibile disporli a triangolo come nella fig. 2. Ora l'osservazione immediata mostra che una tale disposizione non è certo possibile se, sulla parabola  $Y = \frac{1}{2}LX^2$ , l'arco  $\widehat{HK}$  contiene, nel suo interno, l'uno o l'altro dei due archi  $\widehat{CH}_1$ ,  $\widehat{K}_1D$ . Dunque l'arco  $\widehat{HK}$  è interamente contenuto entro l'arco  $\widehat{H}_1K_1$ .

Le somme delle proiezioni dei tre archi (3), sui due assi, sono rispettivamente uguali alle somme delle proiezioni dei tre archi (4), cioè uguali a  $d - c$  sull'asse X, a  $f(d) - f(c)$  sull'asse Y. La somma delle lunghezze dei tre archi (3) è uguale a  $J[\varphi_1]$ , perchè ciascuno di questi archi è geometricamente uguale a un corrispondente arco parabolico tratto dalla curva  $y = \varphi_1(x)$  in  $\overline{cd}$ . Parimenti la somma delle lunghezze dei tre archi (4) è uguale a  $J[\varphi]$ . Per confrontare le due somme, basterà dunque confrontare la lunghezza di  $\widehat{HK}$ , con la somma delle lunghezze di  $\widehat{CH_1}$  e di  $\widehat{K_1D}$ . Ora la possibilità di costruire il triangolo a lati parabolici di cui sopra, dimostra essere  $\widehat{HK} \leq \widehat{CH_1} + \widehat{K_1D}$  <sup>(1)</sup>.

In modo del tutto analogo, si dimostra, nell'ipotesi che sia  $f'(c) \leq f'(d)$ , che il massimo e il minimo valore raggiunti dalla derivata  $\varphi'_1(x)$  in  $\overline{cd}$ , sono compresi fra il massimo e il minimo raggiunti da  $\varphi'(x)$  (Lemma I) e che è  $J[\varphi] \geq J[\varphi_1]$  in  $\overline{cd}$  (Lemma II).

4. Ricordiamo la definizione del n. 2 della Nota citata: una generica funzione di  $\Phi$ , sia  $\overline{\varphi}(x)$ , si definisce in  $\overline{cd}$ , suddividendo comunque  $\overline{cd}$  in un certo numero  $n$  d'intervalli parziali ed assegnando a  $\overline{\varphi}(x)$ , in ciascuno di tali intervalli, andamento parabolico, in modo che sia alternativamente  $\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial x^2} = \pm L$ . Dimostriamo il

LEMMA III. - Se  $n > 3$ , comunque sia definita la funzione  $\overline{\varphi}(x)$ , di  $\Phi$  in  $\overline{cd}$ , è possibile costruire una nuova funzione di  $\Phi$ , sia  $\overline{\varphi}_1(x)$ , corrispondente a una suddivisione di  $\overline{cd}$  in un numero d'intervalli parziali  $< n$ , tale che  $J[\overline{\varphi}_1] \geq J[\overline{\varphi}]$ .

Indichiamo infatti con

$$c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n; c_0 = c, c_n = d; c_i < c_{i+1})$$

i punti di suddivisione degl'intervalli parziali corrispondenti a  $\overline{\varphi}(x)$ . Il ragionamento è perfettamente simile nelle due ipotesi  $\overline{\varphi}'(c) \geq \overline{\varphi}'(c_3)$ ,  $\overline{\varphi}'(c) \leq \overline{\varphi}'(c_3)$ . Supponiamo per es.  $\overline{\varphi}'(c) \geq \overline{\varphi}'(c_3)$ . Due casi possono presentarsi:

1°)  $\overline{\varphi}''(x) = -L$ , per  $c < x < c_1$  e per  $c_2 < x < c_3$ . Assimilando l'intervallo  $\overline{cc_3}$  all'intervallo  $\overline{cd}$ , ragioniamo su di esso come al numero precedente. Si osserva che  $\overline{\varphi}(x)$  è definita in  $\overline{cc_3}$ , così come  $\varphi(x)$  era definita in  $\overline{cd}$ . Sia  $\overline{\varphi}_1(x)$  la funzione coincidente con  $\varphi(x)$  in  $\overline{c_3d}$  e definita in  $\overline{cc_3}$  così come  $\varphi_1(x)$  era definita in  $\overline{cd}$ . Per il lemma II è  $J[\overline{\varphi}_1] \geq J[\overline{\varphi}]$

(1) Il segno inferiore vale per il caso limite  $f'(c) = f'(d)$ , in cui in realtà il triangolo svanisce, le due curve  $y = \varphi(x)$ ,  $y = \varphi_1(x)$  sono geometricamente uguali e quindi è  $J[\varphi] = J[\varphi_1]$ .



in  $\overline{cc_3}$ , quindi anche in  $\overline{cd}^{(1)}$ . La funzione  $\overline{\varphi}_1(x)$  corrisponde a una suddivisione di  $\overline{cd}$  in  $n - 1$  intervalli parziali, perchè, in confronto con la  $\overline{\varphi}(x)$ , fermi restando tutti i punti di suddivisione  $c_i$  con  $i \geq 4$ , viene a scom-

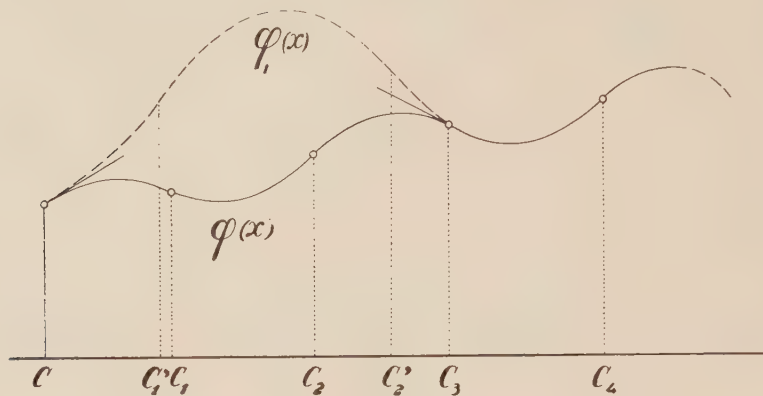


Fig. 3.

parire il punto di suddivisione  $c_3$  (mentre i punti  $c_1, c_2$  vengono ad essere sostituiti da altri due punti, indicati nella fig. 3 con  $c'_1, c'_2$ , in generale distinti dai precedenti).

2°)  $\overline{\varphi}''(x) = +L$ , per  $c < x < c_1$  e per  $c_2 < x < c_3$ . Allora è  $\overline{\varphi}''(x) = -L$ , per  $c_1 < x < c_2$  e per  $c_3 < x < c_4$ . Inoltre  $\overline{\varphi}'(c_1) > \varphi'(c)$ ,  $\overline{\varphi}'(c_4) < \varphi'(c_3)$ , quindi  $\overline{\varphi}'(c_1) > \overline{\varphi}'(c_4)$ . La funzione  $\overline{\varphi}_1(x)$ , coincidente

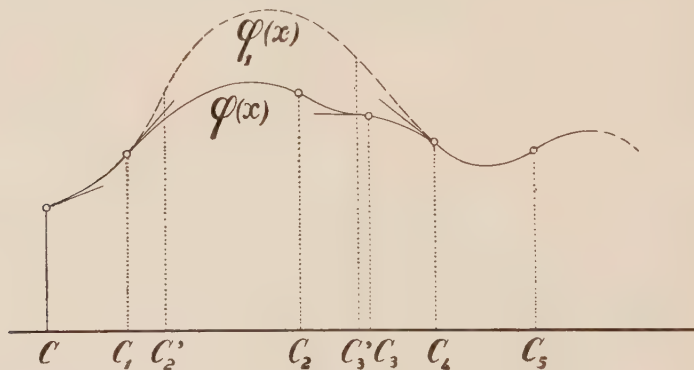


Fig. 4.

con  $\overline{\varphi}(x)$  in  $\overline{cc_1}$  e in  $\overline{c_4d}$ , definita in  $\overline{c_1c_4}$  così come  $\varphi_1(x)$  era definita in  $\overline{cd}$ , è tale che  $J[\overline{\varphi}_1] \cong J[\overline{\varphi}]$  in  $\overline{c_1c_4}$ , quindi anche in  $\overline{cd}$ . Essa corrisponde a una suddivisione di  $\overline{cd}$  in  $n - 2$  intervalli parziali, perchè, in confronto con la  $\overline{\varphi}(x)$ , fermi restando tutti gli eventuali punti di sud-

(1) È  $J[\overline{\varphi}_1] = J[\overline{\varphi}]$  se  $\overline{\varphi}'(c) = \overline{\varphi}'(c_3)$  e in questo caso soltanto.

visione  $c_i$  con  $i \geq 5^{(1)}$ , vengono a scomparire  $c_1$  e  $c_4$  (mentre i punti  $c_2, c_3$  vengono ad essere sostituiti da altri due punti, indicati nella fig. 4 con  $c'_2, c'_3$ , in generale distinti dai precedenti).

5. Abbiamo ormai gli elementi per dimostrare facilmente il teorema enunciato al n. 1. Dal lemma III deduciamo che, fermi restando i valori  $f'(c)$ ,  $f'(d)$  della derivata, l'integrale  $J$  possiede *massimo nell'insieme  $\Phi$*  e corrispondentemente all'intervallo  $\overline{cd}$ . Tale massimo è infatti raggiunto per una delle funzioni di  $\Phi$  che si definiscono suddividendo  $\overline{cd}$  in tre intervalli parziali. Poichè di tali funzioni ne esistono due sole, cioè le  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  considerate al n. 2, e, per il lemma II, è  $J[\varphi_1] \geq J[\varphi]$  se  $f'(c) \geq f'(d)$ , mentre è  $J[\varphi] \geq J[\varphi_1]$  se  $f'(d) \geq f'(c)$ , risulta che una delle due funzioni  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  rende massimo  $J[f]$  al variare di  $f$  in  $E_L$  e corrispondentemente all'intervallo  $\overline{cd}$ .

Ne segue che l'integrale  $J$  possiede massimo in  $\Phi$ , anche corrispondentemente all'intero intervallo  $\overline{ab}$ , e questo qualunque siano le condizioni ai limiti. Infatti basta suddividere  $\overline{ab}$  in un numero finito di parti, prendendo fra i punti di divisione, le ascisse degli eventuali punti del piano per i quali è imposto il passaggio della curva  $y = f(x)$ . Per ognuna  $\overline{cd}$  di queste parti, il teorema è stato dimostrato: dunque esso è dimostrato anche corrispondentemente ad  $\overline{ab}$ .

In un lavoro più esteso, darò alcuni esempi di curve di massima lunghezza, sotto varie condizioni ai limiti.

(1) Nel caso eccezionale che sia  $n = 4$ , è  $c_4 = d$  e la funzione  $\overline{\varphi}_1(x)$  corrisponde a una suddivisione di  $\overline{cd}$  in  $3 = n - 1$  intervalli parziali.

**Meccanica.** — *Sollecitazioni elastiche di un sistema piano con foro rinforzato.* Nota di L. SOBRERO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

I. OGGETTO DELLA RICERCA. — È classico, nella teoria dell'elasticità, il problema di determinare la perturbazione prodotta, nello stato di sollecitazione di un sistema elastico piano, dalla presenza di un foro circolare. Il problema, proposto e risolto in un caso particolare da Kirsch <sup>(2)</sup>, è stato successivamente studiato da K. Wolf <sup>(3)</sup>, da T. Pöschl, e dall'Autore di questa Nota <sup>(4)</sup>. Ora mi propongo di determinare la perturbazione prodotta, in un sistema elastico piano soggetto a trazione, dalla presenza di un foro il cui bordo sia rinforzato mediante un anello in materiale elastico, aderente al bordo del foro.

Il giapponese Katsutada Sezawa <sup>(5)</sup> ha già affrontato questo problema considerando il rinforzo come una corona circolare, di spessore ed eventualmente materiale differente da quello del sistema piano, aderente internamente al bordo del foro. Io, invece, considererò il rinforzo come una sbarretta sottile, aderente al bordo del foro e verificante le ipotesi classiche sull'elasticità delle sbarre ricurve (che le variazioni di lunghezza e curvatura degli elementi della sbarra siano funzioni lineari dei momenti flettenti e degli sforzi longitudinali). Questo nuovo punto di vista dà possibilità di considerare tipi di rinforzi con sezione differente da quella considerata dal Katsutada Sezawa, e di fornire quindi formule risolutive più adatte alle eventuali applicazioni tecniche.

2. INTRODUZIONE DELLA FUNZIONE DI AIRY. — In un sistema elastico piano siano:  $P_0$  un punto fisso,  $P(x, y)$  un punto generico,  $C$  una curva tracciata sul sistema da  $P_0$  a  $P$ ,  $F$  il momento, preso rispetto a  $P$ , e valutato positivo se di verso antiorario, degli sforzi che la parte di sistema alla destra di  $C$  (rispetto ad un osservatore che percorra la curva da  $P_0$  a  $P$ ) esercita sulla parte di sistema alla sinistra della curva. È noto che questo momento  $F$  rimane inalterato se alla curva  $C$  si sostituisce un'altra curva

(1) Nella seduta del 3 dicembre 1938.

(2) KIRSCH, *Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre*. «Zeit. des Vereins Deutsch. Ing.», 1892.

(3) WOLF, *Beiträge zur ebenen Elastizitätstheorie*. «Zeit. für techn. Physik», 1921.

(4) SOBRERO, *La riflessione analitica delle funzioni biarmoniche attorno a un cerchio ed alcuni problemi di elasticità piana*. «Annali di Matem. pura ed applicata», 1935.

(5) KATSUTADA SEZAWA, *Stresses in a Plate with a Flanged Circular Hole*. «Report of the Aeronautical Research Institute», Tokyo University, 1932.

qualunque  $C'$ , purchè nella parte di sistema piano compresa fra  $C$  e  $C'$  non cadano punti di applicazione di forze esterne. Sicchè il momento  $F$  si può, sotto certe ovvie condizioni, riguardare come funzione delle coordinate dei punti  $P_0$  e  $P$ , o, anche, come funzione delle coordinate  $x, y$  del solo punto  $P$  se si suppone invariabile la posizione del punto  $P_0$ . Questa funzione  $F(x, y)$  è classicamente nota col nome di funzione di Airy<sup>(1)</sup>.

Le componenti  $X$  ed  $Y$  della risultante degli sforzi che si trasmettono attraverso la curva  $C$  (dalla parte di sistema alla destra sulla parte di sistema alla sinistra di tale curva), e le componenti  $t_{xx}, t_{yy}, t_{xy}$  dello sforzo elastico esistente in  $P$  si esprimono in funzione delle derivate di  $F$ , calcolate in  $P$ , per il tramite delle relazioni

$$(1) \quad \begin{cases} X = F_y \\ Y = -F_x \end{cases}, \quad (2) \quad \begin{cases} t_{xx} = \frac{1}{a} F_{yy} \\ t_{yy} = \frac{1}{a} F_{xx} \\ t_{xy} = -\frac{1}{a} F_{xy} \end{cases}$$

dove  $a$  è lo spessore del sistema piano.

Lo stato di sollecitazione del sistema piano è dunque perfettamente conosciuto quando si conosca la funzione  $F(x, y)$ . Ora noi vedremo a quali condizioni debba, nel caso nostro, verificare questa funzione.

3. CONDIZIONI PER LA FUNZIONE DI AIRY SUL BORDO DEL FORO. — Supporremo che il sistema piano indefinito in cui è praticato il foro sia soggetto ad una trazione di entità  $t$  in una assegnata direzione. Riferiremo il sistema ad una coppia di assi  $x, y$  con l'origine nel centro del foro e l'asse  $x$  parallelo alla direzione della trazione  $t$ . Come lunghezza unitaria assumeremo il raggio della superficie cilindrica lungo la quale il rinforzo aderisce al sistema piano. Nel seguito questa superficie cilindrica verrà semplicemente chiamata: bordo del foro.

Con  $M$  e  $T$  indicheremo il momento flettente e lo sforzo longitudinale che sollecitano una generica sezione  $S$  dell'anello di rinforzo. Coll'intesa di calcolare il momento  $M$  rispetto alla retta dove la sezione  $S$  interseca il bordo del foro; e di riguardare come positivi: il momento  $M$  se esso è di tal verso da produrre compressione nelle fibre interne dell'anello, e lo sforzo longitudinale  $T$  se esso è di trazione. Indicheremo finalmente con  $\Delta c$  la variazione che subisce, a seguito della deformazione elastica, la cur-

(1) Per meglio dire, differisce dalla funzione di Airy, definita al modo classico, per un fattore di proporzionalità (lo spessore del sistema piano).

vatura  $c$  di un elemento di bordo del foro nell'intorno della sezione  $S$ , e con  $e$  l'allungamento (relativo) di quell'elemento.

Conformemente alla teoria delle sbarre sottili ricurve, la variazione di curvatura  $\Delta c$  e l'allungamento  $e$  si potranno riguardare come funzioni lineari degli sforzi  $M$  e  $T$ :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta c = pM + qT \\ e = rM + sT \end{array} \right.$$

dove  $p, q, r, s$  sono coefficienti, noti, che dipendono dalla sezione dell'anello di rinforzo.

Ora noi dimostreremo che le quantità  $M, T, \Delta c$  ed  $e$  si possono esprimere per mezzo dell'incognita funzione  $F$  e delle sue derivate, sicchè le (3) forniranno altrettante condizioni al contorno per la funzione  $F$ .

Supponiamo, infatti, che il punto fisso  $P_0$  di cui si parla nella definizione della funzione  $F$ , coincida coll'origine del riferimento; il punto  $P$  sia situato sulla linea di separazione fra sistema piano e rinforzo; e la curva  $C$  sia il raggio vettore  $P_0P$ . Allora la funzione  $F$ , calcolata in  $P$ , rappresenta il momento, rispetto a  $P$ , degli sforzi che si trasmettono attraverso la sezione  $P_0P$  dell'anello di rinforzo. La funzione  $F$  sarà dunque, in valore assoluto, proprio eguale al momento  $M$ . Tenute presenti le convenzioni sui segni si vede facilmente che è

$$M = -F.$$

Quanto alla forza longitudinale  $T$ , essa è la proiezione, nella direzione della tangente per  $P$  al bordo del foro, della forza totale che si trasmette attraverso la sezione  $P_0P$  del sistema piano. Questa forza ha le componenti indicate dalla (1), per cui, designando con  $l$  ed  $m$  i coseni direttori della tangente in  $P$  al bordo del foro (orientato in verso antiorario) si ha, in valore assoluto e segno,

$$T = -lF_y + mF_x.$$

Se, in particolare, ci si limita a considerare il punto  $Q$  dove il bordo del foro interseca il semiasse delle  $x$  positive, si ha  $l = 0$ ,  $m = 1$  e quindi

$$T = F_x.$$

Veniamo ora a considerare la variazione di curvatura  $\Delta c$ , ed esprimiamola, anzitutto, in funzione delle componenti  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  dello spostamento che subisce un generico punto  $P(x, y)$  del bordo del foro nella deformazione elastica. Allo scopo indichiamo con

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(s) \\ y = y(s) \end{array} \right.$$



le equazioni parametriche del bordo del foro prima che abbia luogo la deformazione elastica;  $s$  stando a indicare l'ascissa curvilinea dei punti del bordo, misurata a partire da un punto (arbitrario) di quest'ultimo. A deformazione avvenuta, il punto  $P(x, y)$  si porta in una nuova posizione  $P'(\xi, \eta)$ , le cui coordinate son fornite dalle formule

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = x + u(x, y) \\ \eta = y + v(x, y) \end{cases}$$

Se  $x$  ed  $y$  si considerano come funzioni di  $s$ , per il tramite delle (4), le (5) costituiscono le equazioni parametriche del bordo del foro a deformazione avvenuta. Rispettivamente prima e dopo la deformazione, le curvature  $c$  e  $c'$  del bordo del foro avranno i valori

$$c = (x' y'' - x'' y') (x'^2 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad c' = (\xi' \eta'' - \xi'' \eta') (\xi'^2 + \eta'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

dove l'apice indica l'operazione di derivazione rispetto ad  $s$ . Se si tien conto delle (5) si ha

$$\xi' = x' + u_x x' + u_y y',$$

$$\xi'' = x'' + u_{xx} x'^2 + 2 u_{xy} x' y' + u_{yy} y'^2 + u_x x'' + u_y y''.$$

Introducendo queste espressioni di  $\xi'$  e  $\xi''$ , e le altre analoghe di  $\eta'$  ed  $\eta''$ , nella formula che dà la curvatura  $c'$ , otterremo questa grandezza espressa in funzione delle derivate (prime e seconde) di  $x$  ed  $y$  rispetto ad  $s$ , e delle derivate (prime e seconde) di  $u$  e  $v$  rispetto ad  $x$  ed  $y$ . Queste ultime derivate possono (com'è consueto nella teoria matematica dell'elasticità) considerarsi come grandezze infinitesime. Ed allora si vede che la curvatura  $c'$  può, a meno d'infinitesimi superiori, esprimersi con la formula

$$\begin{aligned} c' = c + c(u_x + v_y) - 3c(u_x x'^2 + [u_y + v_x] x' y' + v_y y'^2) + \\ + (v_{xx} x'^3 + [2v_{xy} - u_{xx}] x'^2 y' + [v_{yy} - 2u_{xy}] x' y'^2 - u_{yy} y'^3). \end{aligned}$$

Se ci si limita a considerare il punto  $Q$  d'intersezione del bordo del foro col semiasse delle  $x$  positive (per il quale risulta  $x' = 0$  ed  $y' = 1$ ), e si assume il raggio del foro non deformato come lunghezza unitaria, la variazione di curvatura  $\Delta c = c' - c$  risulta espressa dalla formula semplicissima

$$\Delta c = u_x - 2v_y - u_{yy}.$$

Le derivate a secondo membro si possono esprimere per mezzo delle componenti della deformazione  $e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}$ , e queste per mezzo delle componenti degli sforzi  $t_{xx}, t_{yy}, t_{xy}$ . Tali componenti, infine, si esprimono come

derivate seconde della funzione di Airy per il tramite delle (2). In ultima analisi la stessa variazione di curvatura  $\Delta c$  risulterà espressa per il tramite della funzione di Airy. Avremo, per il punto Q,

$$\Delta c = \frac{1}{aE} (-[2 + \sigma] F_{xx} + [1 + 2\sigma] F_{yy} + [2 + \sigma] F_{xyy} + F_{xxx}),$$

dove E è il modulo di Young, e  $\sigma$  il modulo di Poisson, relativi al materiale elastico di cui è formato il sistema piano.

Anche l'allungamento  $e$  che interviene nelle formule (3) può calcolarsi per mezzo della funzione F di Airy. E infatti, l'allungamento di un elemento, del bordo del foro, di coseni direttori  $l$  ed  $m$  si esprime notoriamente attraverso la formula

$$e = e_{xx} l^2 + e_{yy} m^2 + e_{xy} lm.$$

Calcolando le componenti  $e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}$  in funzione di  $t_{xx}, t_{yy}, t_{xy}$  per il tramite delle formule di Hooke; e le componenti  $t_{xx}, t_{yy}, t_{xy}$  per il tramite delle (2), si ha, nel solito punto Q,

$$e = \frac{1}{aE} (F_{xx} - \sigma F_{yy}).$$

Così abbiamo espresse, per il tramite della funzione F e delle sue derivate, le grandezze M, T,  $\Delta c$  ed  $e$ . Sostituendo queste espressioni nelle (3), e introducendo coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$  (con il polo nell'origine e l'asse polare coincidente con l'asse  $x$ ) le condizioni (3) divengono

$$(6) \quad \begin{cases} \rho' F + [-1 + \sigma - q'] F_\rho - 3 F_{\theta\theta} + [2 + \sigma] F_{\rho\theta\theta} + F_{\rho\rho\rho} = 0 \\ \rho' F - [\sigma + s'] F_\rho + F_{\rho\rho} - \sigma F_{\theta\theta} = 0 \end{cases}$$

dove si è posto

$$\rho' = aE\rho, \quad q' = aE q, \quad \rho' = aE\rho, \quad s' = aE s.$$

Poichè, per una rotazione di assi, queste condizioni si portano in se stesse, esse valgono non solo per il punto Q, ma per tutti i punti del bordo del foro.

Le (6) costituiscono le condizioni al contorno cui deve, sul bordo del foro, verificare la funzione F di Airy.

4. ULTERIORI CONDIZIONI PER LA FUNZIONE DI AIRY. — Il problema proposto impone anche una condizione per il comportamento all'infinito della funzione F. E infatti, avendo supposto il sistema piano soggetto a trazione nel senso dell'asse  $x$ , le componenti dello sforzo, nei punti lontanissimi dall'origine, dovranno assumere i valori

$$t_{xx} = t, \quad t_{yy} = 0, \quad t_{xy} = 0.$$

Di qui discende che, all'infinito, le derivate seconde della funzione  $F$  devono avere i valori sottoindicati:

$$F_{yy} = at \quad , \quad F_{xx} = 0 \quad , \quad F_{xy} = 0.$$

Essendo il sistema piano in esame policonnesso sappiamo che la funzione  $F$  deve anche verificare ad alcune relazioni derivanti dalla condizione di monodromia per le componenti di spostamento: detta  $L$  una (qualunque) delle curve chiuse, tracciate sul sistema piano e comprendenti nel loro interno il foro circolare, deve risultare

$$\left| \begin{aligned} \int_L (-\Delta F_y dx + \Delta F_x dy) &= 0 \\ \int_L (F_{yy} dx - F_{xy} dy) + \int_L y (-\Delta F_y dx + \Delta F_x dy) &= 0 \\ \int_L (-F_{xy} dx + F_{xx} dy) - \int_L x (-\Delta F_y dx + \Delta F_x dy) &= 0 \end{aligned} \right.$$

nelle quali  $\Delta$  designa l'operatore di Laplace:  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . È appena necessario ricordare che se queste condizioni sono verificate per una delle curve  $L$ , esse risultano anche verificate per tutte le altre possibili.

La funzione  $F$  dovrà, infine, verificare, in tutti i punti del sistema piano, l'equazione

$$\Delta \Delta F = 0.$$

5. ESPRESSIONE DELLA FUNZIONE  $F$  E DELLE COMPONENTI DEGLI SFORZI. - Le condizioni indicate più sopra definiscono in modo univoco e completo la funzione  $F$ . La quale risulta espressa dalla formula

$$F = aA + \frac{at}{4} \rho^2 + aB \log \rho + a \left( \frac{C}{\rho^2} + D - \frac{t}{4} \rho^2 \right) \cos 2\theta$$

dove

$$A = -\frac{t}{4} + \frac{q' + s'}{(p' s' - q' r') + (1 + \sigma)(p' + r')} t$$

$$B = -\frac{t}{2} + \frac{p' + r'}{(p' s' - q' r') + (1 + \sigma)(p' + r')} t$$

$$C = -\frac{t}{4} + \frac{p' + 3r' + 12(1 + \sigma)}{(p' s' - q' r') + (3 + \sigma)p' - 4\sigma q' + 3(1 - \sigma)r' + 12s' + 12(1 + \sigma)(3 - \sigma)} t$$

$$D = \frac{t}{2} - \frac{p' + 2q' + 3r' + 6s' + 24(1 + \sigma)}{(p' s' - q' r') + (3 + \sigma)p' - 4\sigma q' + 3(1 - \sigma)r' + 12s' + 12(1 + \sigma)(3 - \sigma)} t.$$

Dall'espressione di F seguono immediatamente le espressioni degli sforzi. In coordinate polari

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{\varrho\varrho} = \frac{t}{2} + \frac{B}{\varrho^2} + \left( \frac{t}{2} - \frac{4D}{\varrho^2} - \frac{6C}{\varrho^4} \right) \cos 2\theta \\ t_{\theta\theta} = \frac{t}{2} - \frac{B}{\varrho^2} + \left( -\frac{t}{2} + \frac{6C}{\varrho^4} \right) \cos 2\theta \\ t_{\varrho\theta} = \left( -\frac{t}{2} - \frac{2D}{\varrho^2} - \frac{6C}{\varrho^4} \right) \sin 2\theta. \end{array} \right.$$

Nel caso di un foro privo di rinforzo si ha  $p = q = r = s = \infty$ , e quindi

$$A = -\frac{t}{4}, \quad B = -\frac{t}{2}, \quad C = -\frac{t}{4}, \quad D = \frac{t}{2}.$$

Le (7) coincidono allora con le formule del Kirsch.

Nel caso di un foro rigido si ha  $p = q = r = s = 0$  e le costanti A, B, C, D son date dalle formule:

$$\begin{aligned} A &= \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{q' + s'}{p' + r'} \right) t, & B &= \frac{1-\sigma}{2(1+\sigma)} t, \\ C &= \frac{1+\sigma}{4(3-\sigma)} t, & D &= -\frac{1+\sigma}{2(3-\sigma)} t. \end{aligned}$$

La discussione completa delle formule (7) e la loro verifica sperimentale si troverà in una mia Memoria in corso di stampa presso la Reale Accademia d'Italia.

**Chimica** (Radioattività). — *Il radiocobalto impiegato come indicatore per la determinazione della solubilità del  $\text{Co}(\text{OH})_3$* <sup>(1)</sup>.  
Nota I di B. N. CACCIAPUOTI e F. FERLA, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio F. MILLOSEVICH.

La determinazione del Cobalto viene spesso eseguita come metallo previa precipitazione allo stato di idrato, perossidato con qualche agente ossidante, oppure allo stato di complesso organico insolubile e successiva calcinazione e riduzione con idrogeno.

Nel caso della precipitazione come idrato perossidato i risultati che si ottengono sono generalmente buoni dato che la sua solubilità nelle condizioni analitiche normali sembra essere effettivamente abbastanza piccola. Tuttavia per quanto si riferisce a questa proprietà non esistono in letteratura dati diretti se si eccettua una determinazione di solubilità fatta da Almkvist<sup>(3)</sup>. Il metodo seguito da questo autore non è, per altro, scevro di critica, in quanto che la misura è stata fatta cercando di saturare dell'acqua pura mediante il prodotto ottenuto nelle condizioni normali di precipitazione e separando in seguito il cobalto disciolto mediante  $\text{H}_2\text{S}$ . È noto che in queste condizioni molti idrati con carattere più o meno colloidale hanno tendenza a dare delle pseudo soluzioni, di guisa che quanto si determina può essere dovuto alla somma di quello che sta in soluzione vera e quello che sta in pseudo-soluzione. Ed effettivamente il valore di 3.18 mgr. per litro di  $\text{Co}(\text{OH})_3$  in soluzione dato da Almkvist è già abbastanza grande e sembra superiore alla solubilità che il composto presenta, invece, nelle condizioni analitiche.

In vista di queste discrepanze ci è sembrato utile tentare una nuova determinazione di solubilità nelle condizioni analitiche e con un metodo che presentando un alto grado di sensibilità fosse anche esente da errori dovuti a cause accidentali (piccola quantità di sostanza disciolta, occlusione ecc.).

Poichè si disponeva di una certa quantità di Co radioattivo, generato artificialmente nel cyclotron dell'Università di Ann Arbor (Michigan) e gentilmente mandato all'Istituto Fisico di Palermo dal prof. Cork, abbiamo pensato di impiegarlo come indicatore per la presente ricerca.

È noto che l'isotopo radioattivo conserva tutte le proprietà chimiche dell'elemento e quindi lo accompagna in tutte le reazioni chimiche normali;

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisica e Mineralogia della R. Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 3 dicembre 1938.

(3) G. ALMKVIST, «Z. anorg. Ch.», 103, 240.



la sua presenza può essere rivelata con mezzi fisici e determinata quantitativamente con misure di attività. Quando il preparato di cui si dispone ha una sufficiente attività specifica le determinazioni quantitative in base alle misure di attività permettono di raggiungere una sensibilità di molto superiore a quella che si ottiene coi metodi ponderali.

Nelle determinazioni quantitative in base all'attività bisogna tener conto del fatto che l'attività dell'isotopo radioattivo decade col tempo e inoltre viene ridotta per effetto dell'assorbimento della radiazione nel suo passaggio attraverso la materia. Poichè avevamo seguito in precedenza l'attività del

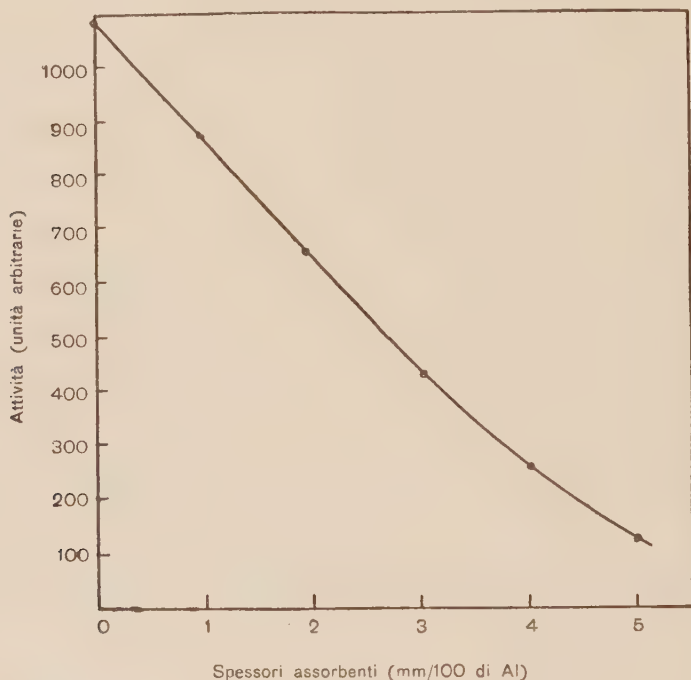


Fig. 1.

nostro Cobalto attivo per un periodo di circa sette mesi ed avevamo trovato un periodo di dimezzamento di 230 giorni, per la nostra ricerca, la cui durata è stata relativamente breve, non ci siamo preoccupati del decadimento. Per avere un'idea di quanto si riduceva l'attività nell'attraversare determinati strati assorbenti abbiamo tracciato una curva di assorbimento in fogli di alluminio che riportiamo nella fig. 1 (1/100 mm. di Al equivale a mgr. 2.8 per  $\text{cm}^2$ ). Dalla curva di assorbimento risulta che nelle nostre condizioni sperimentali le misure di attività non erano influenzate dagli strati.

L'attività veniva misurata con una camera di ionizzazione riempita d'aria a pressione normale e chiusa da due fogli di alluminio da 1  $\mu$ , accoppiata ad un elettrometro a filo, del tipo Edelmann. La sensibilità del dispositivo era controllata volta per volta con un preparato campione di Uranio.

Il Co che noi avevamo a disposizione è risultato essere di mgr. 2.084: con esso si sono preparati 50 cc. di una soluzione di solfato. Prelevando parti aliquote sempre costanti di soluzione si portava a secco il  $\text{CoSO}_4$  su un coperchio piano di porcellana del diametro di 3 cm. e se ne misuravano le attività per risalire a quella totale. Si è trovato così un'attività specifica di 353 U. R. per mgr. di Co<sup>(1)</sup>.

La precipitazione dell'idrossido di Co è stata fatta come è indicato nei trattati analitici per quanto si riferisce alla concentrazione dei reattivi e precisamente 50 cc. di soluzione, 2 cc. di KOH all'1 % e 0.5 cc. di acqua di Bromo contenente gr. 3.5 di Br e gr. 12 di KBr in 100 cc. di soluzione. Affinchè nella soluzione dopo la precipitazione rimanesse una quantità maggiore di sostanza disciolta e quindi più facilmente misurabile in base all'attività abbiamo operato con 2 litri di soluzione anzichè con 52.5 cc. normalmente impiegati aumentando, si intende, anche la quantità assoluta dei reagenti per conservare costante la loro concentrazione nel liquido di precipitazione. In tal modo la quantità di Co che rimane in soluzione è 38 volte maggiore.

La precipitazione è stata fatta a circa 80° C; il precipitato nero formato si è lasciato depositare dapprima su bagnomaria quindi si è lasciato raffreddare fino a temperatura ambiente, per poi filtrare il liquido limpido. Nelle acque madri si è determinato potenziometricamente il  $P_H$  il quale a 20° C è risultato di 7.49.

Allo scopo di determinare con la massima esattezza possibile la quantità rimasta in soluzione — e quindi la solubilità del composto nelle condizioni analitiche — le acque madri sono state leggermente acidificate con HCl, addizionate di 1 mgr. di Co inattivo, come trascinatore, e concentrate a 50 cc.; poi si è effettuata nel modo solito la precipitazione del Co.

Del precipitato si è misurata l'attività che era di 3.8 U. R. solamente, il che corrisponde a mgr. 0.0056 di Co in soluzione per litro, oppure a mgr. 0.01046 calcolato come  $\text{Co}(\text{OH})_3$ .

Se ammettiamo che il supposto  $\text{Co}(\text{OH})_3$  sia completamente dissociato il prodotto di solubilità sarebbe:

$$[\text{Co}^{+++}] [\overline{\text{OH}}']^3 = S = 2.8 \cdot 10^{-26}.$$

Risulta dalla nostra ricerca che la solubilità del composto che si ottiene è circa 300 volte minore di quella indicata da Almkvist (gr. 0.01046 di  $\text{Co}(\text{OH})_3$  contro 3.18 dato da A.).

La differenza è certo ragguardevole e meriterebbe una indagine accurata, che sarebbe molto utile sotto parecchi punti di vista. Intanto il pro-

(1) Grammi 0.1 di Ur danno un'attività di circa 300 U. R. (Unità radioattive).

dotto di solubilità sopra indicato ha valore solo se si ammette la effettiva esistenza del  $\text{Co}(\text{OH})_3$ , e che la sua dissociazione elettrolitica sia completa.

Ora sulla vera esistenza del composto  $\text{Co}(\text{OH})_3$ , ci è noto assai poco. Vero è che esistono dei minerali di Co come la Winklerite, la Heterogenite, la Heubachite che sono considerati come degli idrati con 2 o con 3 molecole di  $\text{H}_2\text{O}$ , del  $\text{Co}_2\text{O}_3$ , ma è vero anche che la loro conoscenza non è molto approfondita e sulla loro vera natura si sa assai poco.

Natta e Strada<sup>(1)</sup> hanno studiato roentgenograficamente i prodotti di perossidazione del Co ed hanno trovato che tanto il  $\text{Co}_2\text{O}_3$ , praticamente anidro quanto quello con  $\text{H}_2\text{O}$  danno gli stessi spettri. Dal loro lavoro risulterebbe più probabile che, almeno allo stato solido, cristallino, tale composto non fosse in grado di esistere.

In netto contrasto con questi risultati starebbero, invece, le ricerche di Hüttig e Kassler<sup>(2)</sup>: essi ammettono l'esistenza di due idrati, uno con 3 e l'altro con 1 molecola di  $\text{H}_2\text{O}$ ; tuttavia, come questi stessi autori riconoscono, i loro risultati non possono essere considerati assolutamente decisivi.

Comunque sia se esso esistesse solo come  $\text{Co}_2\text{O}_3$ , la sua solubilità non sarebbe influenzata dagli ioni  $\text{OH}'$ ; essa verrebbe invece influenzata se il composto esistesse allo stato di idrato ed anche in misura diversa a secondo dello stato di idratazione. Come si vede queste questioni interessano non solo la chimica ma anche la mineralogia e ci riserviamo di riprendere in esame l'argomento non appena potremo disporre di una quantità maggiore di Co radioattivo. Per ora ci accontentiamo di osservare che la differenza che si riscontra fra i valori nostri e quelli di Almkvist va attribuita a condizioni sperimentali assai diverse e quindi essa non ci sorprende. Ed infatti siccome Almkvist operava in acqua pura, allora, data la mancanza degli elettroliti, una parte del composto poteva andare anche in soluzione colloidale, mentre, data la mancanza degli ioni  $\text{OH}'$ , la solubilità non poteva essere diminuita da questi, nel caso che essi potessero esercitare la loro influenza.

In definitiva possiamo concludere che nelle condizioni analitiche normali la quantità di Co che può restare in soluzione è al massimo di mgr.  $5.6 \cdot 10^{-4}$  per 100 cc. di soluzione, quantità assolutamente trascurabile in analisi.

È nostro gradito dovere ringraziare il prof. C. Perrier per i suoi preziosi consigli ed il prof. Cork per averci fornito il Co radioattivo.

**Chimica.** — *Sulla formazione di precipitati periodici in seno ad altri precipitati.* Nota di Nath. Sen. BINAYENDRA, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) NATTA, STRADA, « Gazz. Chimica it. », 58, 419.

(2) HÜTTIG, KASSLER, « Z. anorg. Ch. », 184, 279.

## PERSONALE ACCADEMICO

Essendo presenti alla seduta, i Soci BENEDICENTI e PENTIMALLI prestano il giuramento accademico.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio MARCOLONGO presenta il primo fascicolo del « Carteggio Linceo » pubblicato recentemente nelle « Memorie Morali » dell'Accademia e tributa vive lodi al prof. Gabrieli per la sua opera indefessa di studioso della prima storia dei Lincei, e al Consiglio di Presidenza per aver incoraggiato e aiutato tale importante pubblicazione. Prendendo occasione dal contenuto di detto fascicolo parla anche dell'invenzione del canocchiale e dei contributi che portarono ad essa Leonardo e Giovan Battista della Porta.

Il PRESIDENTE ringrazia il Socio MARCOLONGO per l'interessante comunicazione e annunzia che a far parte della Commissione che deve rivedere i singoli fascicoli del « Carteggio Linceo » è stato chiamato, a sostituire il prof. ENRIQUES, già Socio di questa Accademia, il Socio prof. BAGLIONI.

Il Socio SEVERI chiede che il fascicolo del « Carteggio Linceo » già pubblicato, benchè appartenente alle « Memorie Morali », sia inviato anche ai Soci della Classe di scienze fisiche.

Il PRESIDENTE assicura il Socio SEVERI che studierà la questione e cercherà per quanto è possibile di venire incontro al desiderio espresso.

L'accademico Segretario DE BLASI presenta i libri giunti in dono segnalando: i due volumi di Lavori e di Rendiconti delle Sedute della Commission Internationale de l'Eclairage; l'ultimo volume delle « Opera Omnia » di Eulero; il tomo XIV, seconda serie delle « Opere complete di Agostino Cauchy »; gli « Atti della Celebrazione del secondo Centenario della nascita di L. Galvani » ed altre opere.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci BARGELLINI, BOMPIANI, MILLOSEVICH, PICONE e RUSSO.

## PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta cinque plichi suggellati del sig. Sotgia e un plico del sig. Cremonese inviati perchè vengano custoditi negli Archivi dell'Accademia.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il PRESIDENTE dà comunicazione ai Soci di alcune modificazioni portate al Calendario delle sedute accademiche.

U. A.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Fascicolo del 18 dicembre 1938 - Anno XVII*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Zoologia.** — *Adattamenti biologici di alcuni Echinodermi nel Canale di Suez.* Nota I <sup>(1)</sup> del Socio A. Russo.

Nella Campagna idrografica, fatta nel 1923-24, con la R. N. « Ammiraglio Magnaghi » <sup>(2)</sup>, furono raccolti nel Canale di Suez varie specie di Asteroidi, alcune emigrate dal Mediterraneo, altre dal Mar Rosso.

In questa Nota riferisco su di un *Astropecten* (*Astropecten bispinosus* Otto), pescato con draga a Porto Said, di cui si sono avuti diversi esemplari, notevoli per le loro dimensioni corporee molto ridotte, non ostante avessero raggiunto la maturità sessuale <sup>(3)</sup>.

Nelle due fotografie originali della Tavola annessa, delle quali una rappresenta la specie tipica del Mediterraneo (fig. 1), l'altra la specie del Canale (fig. 2), la differenza di grandezza è tale da far considerare quest'ultima come la forma nana della specie mediterranea.

La differenza fra le due forme non riguarda soltanto le dimensioni generali del corpo, ma anche alcuni caratteri somatici fra i più salienti, che, nella specie del Canale, sono talmente diversi, in confronto della specie tipo del Mediterraneo, da far nascere il sospetto potersi trattare di una forma

(1) Presentata nella seduta del 3 dicembre 1938.

(2) Campagna idrografica nel Mar Rosso della R. Nave « Ammiraglio Magnaghi », 1923-24, Memoria 1<sup>a</sup>: *Itinerario e Stazioni biologiche della Crociera*. Istituto idrografico della R. Marina. Genova, 1928.

(3) Gli esemplari furono raccolti all'imboccatura del canale, dove, per il deflusso delle acque del Nilo, la salinità è più bassa di quella del Mediterraneo; per cui essa potrebbe agire su le forme migrate, determinando una differente pressione osmotica nei tessuti.

mutante. Tale è il carattere delle grosse spine aculeiformi (fig. 1), che, nella specie mediterranea, decorrono in doppia fila ai margini dorsali e laterali delle braccia, impiantate su protuberanze del derma<sup>(1)</sup>, mentre, nella forma ridotta (fig. 2), le stesse appendici sono rappresentate da sottili spine, poco sporgenti<sup>(2)</sup>.

Sebbene altri caratteri, assunti dai sistematici come specifici dell'*Astropecten bispinosus*, siano poco modificati nella specie del Canale, come le sculture dei denti buccali e le relative appendici, pure è da domandarsi quali siano state le possibili cause, determinanti le variazioni sopra cennate, nella forma migrata<sup>(3)</sup>.

Ritengo potere escludere che l'ambiente del Canale, con la particolare salinità e temperatura delle sue acque, abbia esercitato un'influenza su la specie adulta, emigrata dal Mediterraneo, perchè gli Echinodermi, in genere, e gli Asteroidi in ispecie, hanno tardi movimenti di progressione e, per lo più, vivono stazionari o quasi in zone determinate, per cui non potrebbero compiere lunghi percorsi per raggiungere zone lontane.

Da quanto ci è noto sul potere migratorio diverso nei vari gruppi d'animali marini, confermato dalle deduzioni, che il Fox<sup>(4)</sup> ha tratto dai risultati della *Spedizione Inglese di Cambridge al Canale di Suez*<sup>(5)</sup>, si può ammettere che molte specie di Echinodermi e fra essi gli Asteroidi, in massima parte, passino nel Canale allo stato embrionale, sotto forma di larve, insieme al *Plancton*, che vi è trasportato dalle correnti marine.

Che la migrazione si possa avverare per mezzo delle forme embrionali planctoniche, trasportate passivamente dalle correnti, viene documentato da un altro Asteroide, l'*Astropecten Bonnieri* Koehler, che vive in Mar Rosso<sup>(6)</sup>, e che, dalla « Magnaghi », fu anche raccolto a Porto Said, a distanza assai

(1) H. LUDWIG, *Seesterne. Fauna und Flora des Golfes von Neapel*. Berlin, 1897.

(2) Il Mortensen, sistematico di vecchia data, esaminati gli esemplari del G. di Catania e di P. Said, ritenne entrambi identici *Astropecten bispinosus* O., su che mi sono permesso di dissentire.

(3) Tale ricerca implica la trattazione di uno dei problemi più discussi della Zoologia scientifica, le cause dell'origine delle forme mutanti e delle specie elementari.

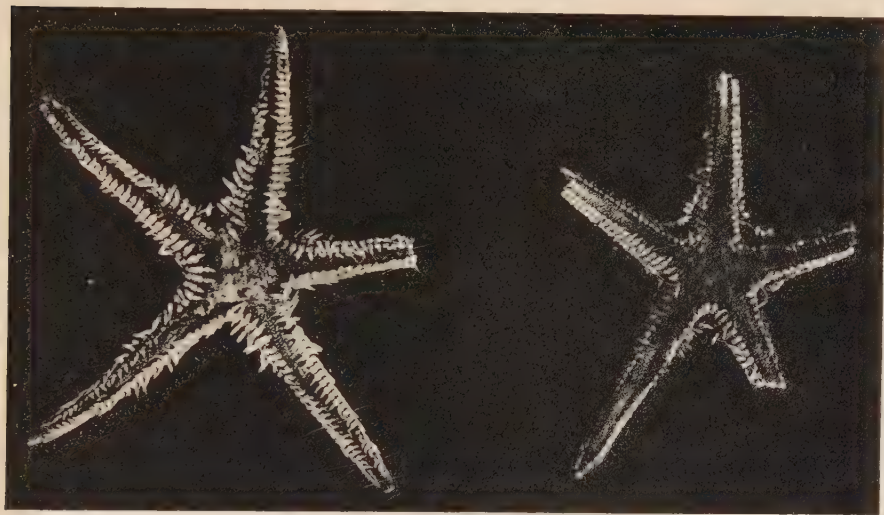
(4) M. FOX, *General Part in: Zoological results of the Cambridge Expedition to the Suez Canal*. « Transactions of the Zoological Society of London », 1926, 29.

(5) Il FOX (loc. cit.), oltre la salinità nei vari settori del Canale, prese in considerazione le correnti, specialmente quelle di marea, seguendo i dati raccolti dalla *Compagnia del Canale di Suez*. Distinse quindi tre categorie di animali marini, che possono essere favorite o impedita alla migrazione. Gli Echinodermi sono fra quelli, che, nella loro maggioranza, penetrano nel Canale, con il *Plancton*, allo stato embrionale, sotto forma di larve. Il maggior numero di specie, penetrate dal Mar Rosso, in confronto a quelle penetrate dal Mediterraneo, dal FOX è spiegato dal fatto che le correnti di marea, dal Golfo di Suez, si riversano nel Canale per 10 mesi dell'anno, da ottobre a luglio, mentre per due mesi, agosto, settembre, l'acqua dal Mediterraneo scorre verso Sud.

(6) R. KOEHLER, *Echinides, Stellerides, Ophiurides recueillis par M. M. Bonnier et Perez dans le mer Rouge*. « Bull. du Mus. d'Histoire Natur. », Paris, 1905.

rilevante, tale che la forma adulta non avrebbe potuto raggiungere con i propri mezzi. Anche *Astropecten polyacanthus* M. Tr., che vive in Mar Rosso, fu dalla « Magnaghi » raccolto tra Porto Said ed Ismailia. Di tale specie, acclimatata nel Canale, ho ricevuto molti esemplari dal Direttore della Stazione di Biologia marina di Ghardaqa, Dott. Crossland.

Si ritiene, d'altra parte, che la specie adulta, anche migrando a così grande distanza dal luogo d'origine, non potrebbe subire, nel nuovo ambiente, le modificazioni sopra cennate, per effetto della nuova pressione osmotica, della temperatura o dei sali minerali, le quali cause invece potrebbero agire su i prodotti sessuali, deposti in ambiente diverso e su le larve, come è dimostrato dai risultati sperimentali di vari ricercatori (Herbst).



**A**

**B**

**A** — Forma giovanile di *Astropecten bispinosus* Otto, raccolta nella zona fangosa dello zoccolo continentale del Golfo di Catania. (Grandezza naturale).

**B** — Forma adulta, raccolta dalla « Magnaghi » a Porto Said. (Grandezza naturale).

La differenza di pressione osmotica, di temperatura e gli altri fattori del nuovo ambiente, potrebbero, difatti, aver determinato negli embrioni variazioni di natura blastogena, modificandone la costituzione genetica, per cui i nuovi caratteri, che distinguono la forma migrata da quella tipo od originaria, non sarebbero cancellabili come in un *fenotipo*, ma stabilizzati e trasmissibili, essendosi costituita una forma *genotipicamente* diversa.

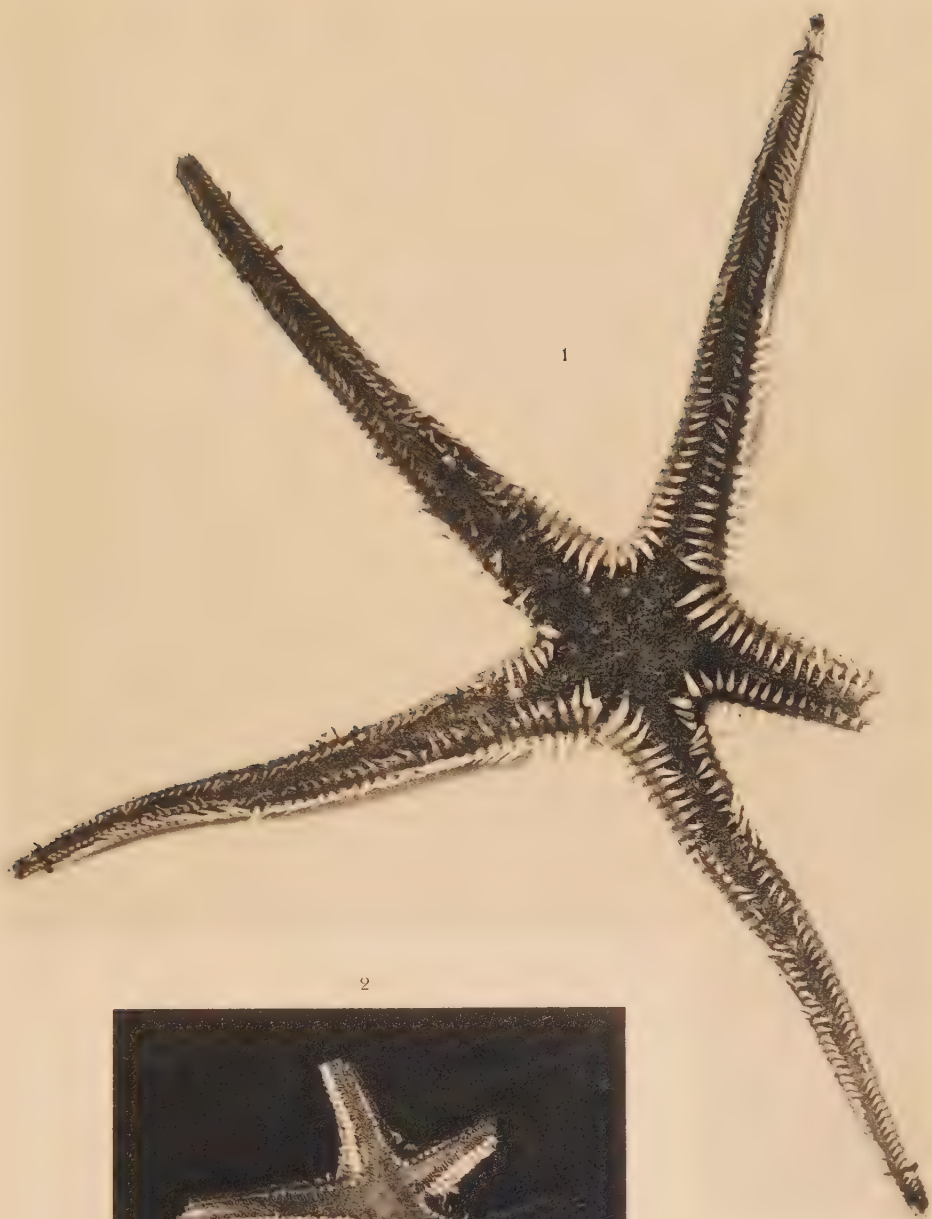
Le considerazioni sopra cennate, essendo fondate su documentazioni indirette, mancano della necessaria sperimentazione, onde la interpretazione

data alla nuova forma, ha valore d'ipotesi. Ipotesi di lavoro per i Zoologi, che vorranno utilizzare le acque del Canale di Suez, grande vasca naturale di acclimatazione, per lo studio dei problemi relativi alle cause dell'insorgere delle mutazioni.

Limitandoci ai fatti osservati, due obiezioni potrebbero farsi: 1° che la specie di Porto Said sia forma giovanile di *Astr. bisp.* del Mediterraneo; 2° che la specie stessa sia sessualmente immatura e che perciò potrebbe raggiungere dimensioni maggiori. Alla prima rispondono le due figure qui inserite, dalle quali si rileva che il carattere delle spine aculeiformi è già sviluppato negli individui giovani della specie mediterranea; alla seconda si risponde che nella specie di Porto Said alla base e ai due lati delle braccia sono visibili le gonadi con elementi sessuali maturi, come fu rilevato da preparati microscopici, mentre, nelle forme giovanili, di identiche dimensioni, della specie mediterranea, esse sono ancora invisibili con gli ordinari ingrandimenti.

Si deduce, per tanto, che *Astropecten*, raccolto a Porto Said dalla « Magnaghi », per la modificazione di alcuni caratteri essenziali, non possa essere identificato con il *bispinosus* del Mediterraneo.





Fotogr. 1 - *ASTROPECTEN BISPINOSUS* Otto - Specie mediterranea, adulta, catturata con rete di fondo nel Golfo di Catania. Prof. m. 40.

Fotogr. 2 - *ASTROPECTEN BISPINOSUS* Otto (?) - Specie del Canale di Suez, adulta, catturata con draga a Porto Said.





# MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^2$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$ . Nota II di M. VILLA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.*

3. La proprietà espressa dal teorema del n. 2 è caratteristica per le  $\Phi_k^{r,v}$  perchè, se indichiamo con  $D_{r,v}$  un cono proiettante da un  $S_v$  una  $V_r$  ( $r > 1$ ), che non soddisfa ad equazioni di Laplace, si ha:

*Una  $V_k$  situata sopra un cono  $D_{r,v}$  — incontrata dagli  $S_{v+1}$  del cono in  $V_{k-r}$  — se possiede  $\infty^{2(2k-r-1)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  è necessariamente la  $\Phi_k^{r,v}$  ( $r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v, r > 1, v > 0$ ).*

Dimostriamo dapprima che  $D_{r,v}$  è necessariamente il cono  $C_{r,v}$ .

Sia infatti P un punto di  $V_k$  e  $t$  una tangente in esso a  $V_k$ . Siccome, per ipotesi,  $V_k$  possiede  $\infty^{2(2k-r-1)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , ne possiede  $\infty^{2k-2r-v-1}$  che hanno in comune il punto P e la tangente  $t$ . Sia L una curva di  $V_k$  che passa per P, che è ivi tangente alla  $t$  e tale che il suo  $S_3$  osculatore in P e l' $S_k$  tangente in P a  $V_k$  stiano in un  $S_{k+1}$ : l' $E_2$  in P di L è quindi uno degli  $\infty^{2k-2r-v-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  precedenti.

Se  $S_n$  è lo spazio ambiente di  $D_{r,v}$ , proiettiamo dall' $S_v$  singolare di  $D_{r,v}$  sopra un  $S_{n-v-1}$  (sghembo con  $S_v$ ): la  $V_k$  si proietta in una  $V_r$  perchè possiede in ogni  $S_{v+1}$  di  $D_{r,v}$  una  $V_{k-r}$  (e basterebbe perchè questa proiezione fosse una  $V_r$  che  $V_k$  possedesse in ogni  $S_{v+1}$  di  $D_{r,v}$  almeno un punto).

Questa  $V_r$  è la sezione di  $D_{r,v}$  con  $S_{n-v-1}$ .

Siano poi P' ed L' le proiezioni di P e della curva L.

L' $S_{r+v+1}$  tangente in P a  $D_{r,v}$  (che contiene l' $S_k$  tangente in P a  $V_k$ ) e l' $S_3$  osculatore in P a L stanno in un  $S_{r+v+2}$  perchè l' $S_k$  e l' $S_3$  stanno in  $S_{k+1}$ .

L' $S_3$  osculatore in P' a L' e l' $S_r$  tangente in P' alla  $V_r$  stanno quindi nell' $S_{r+1}$  in cui l' $S_{r+v+2}$  precedente (che contiene l' $S_v$  singolare di  $D_{r,v}$ ) sega l' $S_{r-v-1}$  ambiente di  $V_r$ : l' $E_2$  in P' a L' è quindi un  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  per  $V_r$ .

$V_r$  possiede dunque per ogni punto P e direzione  $t$  un  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ ; e non può possederne infiniti perchè, per ipotesi, non soddisfa ad equazioni di

(1) Nella seduta del 3 dicembre 1938.

Laplace (1). In conclusione:  $V_r$  possiede  $\infty^{2r-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  e siccome non soddisfa ad equazioni di Laplace, per il citato teorema di Bompiani, essa è la  $V_r$  dell'  $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$  rappresentante le quadriche dell'  $S_r$ . E  $D_{r,v}$  è quindi il cono  $C_{r,v}$ .

Rimane da vedere che  $V_k$  è necessariamente la  $\Phi_k^{r,v}$ .

Siccome  $V_k$ , come si è ora dimostrato, appartiene a  $C_{r,v} \left( r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v \right)$  e siccome, per ipotesi,  $V_k$  è segata dagli  $S_{v+1}$  di  $C_{r,v}$  in

$V_{k-r}$ , per dimostrare che  $V_k$  è la  $\Phi_k^{r,v}$  basterà provare (cfr. n. 2) che gli  $S_k$  tangenti a  $V_k$  riempiono la  $W_{2r+v+1}$  luogo degli  $S_{r+v+1}$  tangenti a  $C_{r,v}$ .

Ma ciò è evidente:  $V_k$ , per ipotesi, possiede  $\infty^{2(2k-r-1)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ ; la varietà luogo degli  $S_k$  tangenti ad essa ha quindi esattamente dimensione  $2r+v+1$  (2) e coinciderà necessariamente con la  $W_{2r+v+1}$ .

Per i coni  $C_{r,v}$  sussiste poi la seguente proprietà caratteristica:

*Un cono  $D_{r,v}$  sul quale giaccia una  $V_k$  — incontrata da tutti gli  $S_{v+1}$  del cono — che possiede  $\infty^{2(2k-r-1)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  è necessariamente il cono  $C_{r,v} \left( r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v, r > 1, v > 0 \right)$  (3).*

La prima parte della dimostrazione del teorema precedente dimostra pure questo teorema perchè, come si è già osservato, in essa non si fa uso dell'ipotesi che  $V_k$  sia incontrata dagli  $S_{v+1}$  di  $D_{r,v}$  in  $V_{k-r}$ , ma solo dell'ipotesi che  $V_k$  sia incontrata dagli  $S_{v+1}$  di  $D_{r,v}$  almeno in un punto, come nel caso attuale.

4. Fra le  $\Phi_k^{r,v}$  le più importanti sono quelle per  $v$  dispari e relative al valore minimo  $r + \frac{v+1}{2}$  di  $k$ .

Le  $\gamma_{1,3}$  delle  $\Phi_{r+\frac{v+1}{2}}^{r,v} (r > 1; v \text{ dispari e } > 0)$  non dipendono infatti da funzioni arbitrarie ma formano un sistema  $\infty^{2r+v-1}$ .

Inoltre: per gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di una  $\Phi_k^{r,v'}$  qualunque ci si riduce sempre a quelli di una  $\Phi_{r+\frac{v+1}{2}}^{r,v}$ , come verrà precisato nel n. 5.

(1) Infatti, se una  $V_r (r > 1)$  possiede  $\infty^\delta E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  esattamente ( $2r-1 \leq \delta \leq 3r-2$ ), essa soddisfa almeno a  $\frac{(4r-\delta)(\delta-2r+1)}{2}$  equazioni di Laplace (lin. indep.) (VILLA, N, p. 10).

(2) VILLA, N, p. 9.

(3) Questo teorema in un caso molto particolare, e cioè per  $r=2$  e  $v=k-2$ , trovasi già a p. 218 della terza delle mie Note citate (la condizione là introdotta che gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  siano ordinabili in curve  $\gamma_1$  è superflua).

Ponendo nel teorema del n. 2  $k = r + \frac{v+1}{2}$  ( $v$  dispari) si ha, appunto come si è detto sopra:

La varietà  $\Phi_{r+\frac{v+1}{2}}^{r,v}$  possiede  $\infty^{2r+v-1}$  curve  $\gamma_{1,3}$ ; queste  $\gamma_{1,3}$  sono tutte e sole le  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_{\frac{v+3}{2}}$  (dell'  $S_{v+3}$ ) intersezioni di  $\Phi_{r+\frac{v+1}{2}}^{r,v}$  con i coni quadratici (di vertice  $S_v$ ) contenuti nel cono  $C_{r,v}$  ( $r > 1$ ,  $v$  dispari e  $> 0$ ).

OSSERVAZIONE I. — Da un mio teorema, già ricordato nel n. 2, segue che le  $V_d$  dell'  $S_{2d}$ , i cui  $S_d$  tangenti riempiono l'  $S_{2d}$  ambiente, posseggono  $\infty^{2d-2}$  curve  $\gamma_{1,3}$  esattamente.

Le suddette  $V_{\frac{v+3}{2}}$  dell'  $S_{v+3}$  sono proprio di questo tipo (gli  $S_{\frac{v+3}{2}}$  ad esse tangenti riempiono l'  $S_{v+3}$  ambiente: cfr. n. 2 per  $k = r + \frac{v+1}{2}$ ) e perciò posseggono  $\infty^{v+1}$   $\gamma_{1,3}$ . Le curve  $\gamma_{1,3}$  delle  $\Phi_{r+\frac{v+1}{2}}^{r,v}$  provengono da queste varietà e quindi provengono, in definitiva, da varietà di tale tipo anche gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di una  $\Phi_k^{r,v'}$  qualunque, come seguirà dal n. 5.

OSSERVAZIONE II. — La  $\Phi_d^{r,2(d-r)-1}$  ( $r > 1$ ,  $d > r$ ) appartiene all'  $S_{\frac{r(r-1)}{2}+2d}$  e possiede  $\infty^{2d-2}$   $\gamma_{1,3}$  (s'è posto  $d = r + \frac{v+1}{2}$  nel teorema precedente).

Ora: le varietà  $V_d$  dotate di  $\infty^{2d-2}$  curve  $\gamma_{1,3}$  che finora si conoscono sono (oltre alla  $\Phi_d^{r,2(d-r)-1}$ ) le seguenti:

La  $V_d^{2d}$  dell'  $S_{\frac{d(d+3)}{2}}$  rappresentante le quadriche dell'  $S_d$  (la quale è la sola  $V_d$  per cui ogni  $E_1$  è  $E_1$  di  $\gamma_{1,3}$  e lo spazio ambiente ha dimensione massima: *teorema di Bompiani esteso* <sup>(1)</sup>); le  $V_d$  dell'  $S_{2d}$ , i cui  $S_d$  tangenti riempiono l'  $S_{2d}$  ambiente (le quali sono le uniche  $V_d$  che posseggono  $\infty^{2d-2}$   $\gamma_{1,3}$  e per cui lo spazio ambiente ha dimensione minima <sup>(2)</sup>);

(1) VILLA, la seconda delle Note citate, n. 5.

(2) Il teorema a cui sono pervenuto nel n. 32 di M (e che ho enunciato anche nel n. 4 di N) si può enunciare anche nella forma seguente, che è preferibile dal punto di vista geometrico: Se  $V_k$  possiede  $\infty^\delta$  ( $2k-1 \leq \delta \leq 3k-2$ )  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  e se lo spazio a cui  $V_k$  appartiene ha la minima dimensione compatibile con tale ipotesi, essa è necessariamente una  $V_k$  dell'  $S_{4k-\delta-1}$ , i cui  $S_k$  tangenti riempiono l'  $S_{4k-\delta-1}$  ambiente. In particolare, se  $\delta = 2k-1$ , gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  sono organizzabili in  $\infty^{2k-2}$  curve  $\gamma_{1,3}$  e si ha il risultato del testo.

le  $V_d$  sezioni iperpiane delle  $V_{d+1}$  di Segre il cui interesse (superiore, per noi, a quello delle stesse varietà di Segre) è posto in luce in  $M^{(1)}$ .

Appare quindi notevole l'importanza delle  $\Phi_d^{r, 2(d-r)-1}$ , che, per un valore qualunque di  $d (> 2)$ , offrono esempi di  $V_d$  con  $\infty^{2d-2} \gamma_{1,3}$ , anzi, per uno stesso valore di  $d$ , di queste  $V_d$  ve ne sono di tipo diverso (a seconda dei coni  $C_{r, 2(d-r)-1}$  su cui giacciono).

5. Sussiste il teorema:

*Gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r, v}$  sono tutti e soli gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  delle  $\Phi_{k-p}^{r, v-p}$  situate su di essa  $\left(r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v, r > 1, v > 0, p = 2k - 2r - v - 1\right)$ .*

S'avvertirà subito che  $p$  è il numero delle funzioni arbitrarie da cui dipendono le  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r, v}$ .

Si noterà pure che queste  $\Phi_{k-p}^{r, v-p}$  sono del tipo  $\Phi_d^{r, 2(d-r)-1}$  considerato nel numero precedente avendosi  $v-p = 2(k-p-r) - 1$ .

Esse appartengono all' $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1 - p}$  e posseggono  $\infty^{2(k-p)-2} \gamma_{1,3}$  esattamente (la disuguaglianza  $d > r$  è verificata avendosi  $k-p > r$  essendo  $k \leq r+v$ ).

Per dimostrare il teorema, ricordiamo che gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r, v}$ , per il teorema del n. 2, sono tutti e soli gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_{k-r+1}$  (dell' $S_{v+3}$ ) intersezioni di  $\Phi_k^{r, v}$  con i coni quadrici (di vertice  $S_v$ ) contenuti nel cono  $C_{r, v}$ .

Ma, per un teorema che ho dimostrato altrove<sup>(1)</sup>, gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di una  $V_{k-r+1}$  sono tutti e soli gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_{v+3-p}$  in cui  $V_{k-r+1}$  è segata dagli  $S_{v+3-p}$  (dell' $S_{v+3}$ ).

Queste varietà  $V_{\frac{v+3-p}{2}}$  dell' $S_{v+3-p}$ , in definitiva, sono l'intersezione di  $\Phi_k^{r, v}$ , di un  $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1 - p}$ <sup>(2)</sup> e di uno dei suddetti coni quadrici; e quindi appartengono alle  $\Phi_{k-p}^{r, v-p}$  sezioni di  $\Phi_k^{r, v}$  con gli  $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1 - p}$ <sup>(3)</sup>.

(1) VILLA, M, §§ 11, 12.

(2) Sussiste il teorema (VILLA, M, n. 34): *Gli  $\infty^{3d-m-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di una  $V_d$  dell' $S_{d+m}$  ( $0 < m < d$ ), i cui  $S_d$  tangenti riempiono l' $S_{d+m}$  ambiente, sono tutti e soli gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_m$  dell' $S_{2m}$  situate su di essa.* Nel nostro caso si ha  $d = k - r + 1, m = \frac{v+3-p}{2}$  (e gli  $S_{k-r+1}$  tangenti alle  $V_{k-r+1}$  riempiono l' $S_{v+3}$  ambiente: cfr. n. 2).

(3) Questo spazio è, nell' $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1}$  ambiente di  $\Phi_k^{r, v}$ , quello che sega sull' $S_{v+3}$  di  $V_{k-r+1}$  un  $S_{v+3-p}$ .

(4) Voglio osservare esplicitamente che le sezioni iperpiane delle  $\Phi_k^{r, v}$  sono  $\Phi_{k-1}^{r, v-1}$  (e così le proiezioni delle  $\Phi$  sono ancora  $\Phi$ ).



Siccome gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_{k-p}^{r,v-p}$  (per il teorema del n. 2) sono tutti e soli gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_{v+\frac{3-p}{2}}$ , intersezioni di  $\Phi_{k-p}^{r,v-p}$  con i coni quadrici (di vertice  $S_{v-p}$ ) situati sul cono  $C_{r,v-p}$  in cui  $C_{r,v}$  è segato dall'  $S_{\frac{r(r+3)}{2}+v+1-p}$ , l'asserto è così dimostrato.

OSSERVAZIONE. — La proprietà espressa da questo teorema rientra in quest'altra, assai più generale:

Se una  $V_k$  dell'  $S_d$  possiede  $\infty^{2k+p-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $0 < p \leq k-1$ ) organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$  dipendenti da  $p$  funzioni arbitrarie, le  $V_{k-p}$  sezioni di  $V_k$  con gli  $S_{d-p}$  posseggono  $\infty^{2(k-p)-2} \gamma_{1,3}$  esattamente e gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $V_k$  sono tutti e soli quelli delle  $V_{k-p}$ .

Così avviene appunto, oltre che per le  $\Phi_k^{r,v}$ , per le  $V_k$  dell'  $S_{k+m}$ , i cui  $S_k$  tangenti riempiono lo spazio ambiente (si veda il teorema di M ora ricordato, che rientra anch'esso nella proprietà generale precedente); per le  $V_k$  di Segre (le cui  $\gamma_{1,3}$  dipendono da una funzione arbitraria)<sup>(1)</sup>; per gli stessi coni  $C_{r,v}$  e negli altri casi finora esaminati<sup>(2)</sup>.

Ho dimostrato in M (n. 42) che, per  $k < 5$ , se una  $V_k$  possiede  $\infty^{2k+p-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $0 < p \leq k-1$ ) questi sono sempre organizzabili in curve  $\gamma_{1,3}$  dipendenti da  $p$  funzioni arbitrarie (e quindi per essa si presenta il fatto precedente). Segue che, per  $k < 5$ , fra le  $V_k$  che posseggono  $\infty^{2k+p-1}$  ( $0 \leq p \leq k-1$ )  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  le più importanti sono quelle relative a  $p$  minimo,  $p=0$ .

Per  $k \geq 5$  invece non si sa ancora se per le  $\gamma_{1,3}$  di una  $V_k$  che possieda  $\infty^{2k+p-1}$  ( $0 < p \leq k-1$ )  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  si presentino necessariamente funzioni arbitrarie e tanto meno quindi se sono sempre in numero  $p$ . È questa una questione importante che merita di essere studiata.

Se per  $k \geq 5$  non si avesse un comportamento diverso che per  $k < 5$ , si potrebbe utilizzare la proprietà suddetta per ricercare le  $V_k$  che posseggono  $\infty^{2k-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  e cioè  $\infty^{2k-2} \gamma_{1,3}$  ( $p=0$ ), le quali acquisterebbero particolare interesse.

Basterebbe infatti segare con spazi lineari di dimensione opportuna le  $V_k$  che posseggono  $\infty^{2k+p-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $0 < p \leq k-1$ ), per ricercare le quali ho indicato un metodo in M.

6. La  $\Phi_k^{r,v}$  possiede  $\infty^{2k+p-1} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ( $p=2k-2r-v-1$ ); su di essa esistono quindi sistemi regolari<sup>(3)</sup> di  $\gamma_{1,3}$  di dimensione  $2k+p-2$

(1) VILLA, N, p. 7; M, § 11.

(2) VILLA, M, n. 42.

(3) Ho chiamato, in lavori precedenti, regolare un sistema  $\Sigma$   $\infty^d$  di curve di una  $V_k$  quando i piani osculatori in un punto generico P di  $V_k$  alle curve di  $\Sigma$  passanti per P e aventi ivi la tangente  $t$  sono  $\infty^{d-2k+2}$  (quante sono cioè le curve di  $\Sigma$  per P e tangenti ivi alla  $t$ ).

(e non di dimensione superiore). Questi sistemi assorbono tutti gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di  $\Phi_k^{r,v}$ .

Se  $k = r + \frac{v+1}{2}$ , esiste sopra  $\Phi_k^{r,v}$  un unico sistema regolare di  $\gamma_{1,3}$  di dimensione *massima* ed è quello formato da tutte le  $\gamma_{1,3}$  della varietà.

Se invece  $k > r + \frac{v+1}{2}$ , si perviene ad un sistema regolare di  $\gamma_{1,3}$  di dimensione *massima* ( $2k + p - 2$ ) di  $\Phi_k^{r,v}$ , seguendo un procedimento generale che ho indicato in M (n. 45), in questo modo: nell'  $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1}$  ambiente di  $\Phi_k^{r,v}$  si consideri un sistema generico  $\sigma \infty^{3p}$  di  $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1 - p}$ : allora un sistema regolare di  $\gamma_{1,3}$  di dimensione *massima* è quello formato dalle  $\gamma_{1,3}$  delle  $\Phi_{k-p}^{r,v-p}$  in cui  $\Phi_k^{r,v}$  è segata dagli  $S_{\frac{r(r+3)}{2} + v + 1 - p}$  di  $\sigma$ .

7. Se  $k$  ha il valore *massimo*,  $k = r + v$ , si può osservare che una  $V_{r+v}$  situata sopra il cono  $C_{r,v}$ , incontrata dagli  $S_{v+1}$  del cono in  $V_v$ , è sempre una  $\Phi_{r+v}^{r,v}$  (n. 2) purchè appartenga allo spazio ambiente di  $C_{r,v}$  (e non ad uno spazio di dimensione inferiore).

8. Se  $r = 2$ ,  $C_{2,v}$  è un cono di Veronese.

Le  $\Phi_k^{2,v} \left( \frac{v+5}{2} \leq k \leq v+2; v > 0 \right)$ , poste su questi coni, appartengono all'  $S_{v+6}$  e posseggono esattamente  $\infty^{2(2k-3)-v} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  (n. 2).

Quindi anche le sole  $\Phi_k^{2,v}$  danno esempi di  $V_k$  con  $\infty^\delta (2k-1 \leq \delta \leq 3k-4) E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  per tutti i possibili valori di  $k$  e di  $\delta$ .

I teoremi del n. 3 porgono (per  $r = 2$ ) proprietà caratteristiche delle  $\Phi_k^{2,v}$  e dei coni di Veronese. Fra le  $\Phi_k^{2,v}$  le più importanti sono quelle per  $v$  dispari e relative al valore *minimo* di  $k$ ,  $k = \frac{v+5}{2}$ . Per esse si ha (n. 4):

Una varietà  $\Phi_{\frac{v+5}{2}}^{2,v}$  ( $v$  dispari e  $> 0$ ) possiede  $\infty^{v+3}$  curve  $\gamma_{1,3}$  esattamente; queste  $\gamma_{1,3}$  sono tutte e sole le  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_{\frac{v+3}{2}}$  (dell'  $S_{v+3}$ ) intersezioni di  $\Phi_{\frac{v+5}{2}}^{2,v}$  con i coni quadrici (di vertice  $S_v$ ) contenuti nel cono di Veronese  $C_{2,v}$ .

Per  $v = 1$  è  $k = 3$  e per la  $\Phi_3^{2,1}$  vale quindi l'osservazione del n. 7.

Si ha perciò il seguente risultato, a cui pervenni già nella terza delle mie Note citate:

Una  $V_3$  dell'  $S_7$  situata sopra il cono di Veronese  $C_{2,1}$  — incontrata dai piani del cono in curve — possiede  $\infty^4 \gamma_{1,3}$  esattamente; queste  $\gamma_{1,3}$  sono tutte

e sole le  $\gamma_{1,3}$  delle superficie (dell'  $S_4$ ) intersezioni di  $V_3$  con i coni quadrici (di vertice  $S_1$ ) contenuti in  $C_{2,1}$ .

Per gli  $E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  di una  $\Phi_k^{2,v'}$  qualunque ci si riduce sempre a quelli di una  $\Phi_{\frac{v+5}{2}}^{2,v}$  (n. 5).

Per  $k$  massimo,  $k = v + 2$ , si hanno le  $\Phi_k^{2,k-2}$ , per le quali vale l'osservazione del n. 7.

Le  $\Phi_k^{2,k-2}$ , appartengono all'  $S_{k+4}$  e posseggono  $\infty^{3k-4} E_2$  di  $\gamma_{1,3}$ , e sono le varietà (che indicai con  $\Phi_k$ ) a cui è dedicata la terza delle mie Note citate e che si ritrovano dunque qui come caso molto particolare.

9. Cerchiamo tutte le varietà a tre e a quattro dimensioni che sono  $\Phi_k^{r,v} \left( r + \frac{v+1}{2} \leq k \leq r+v; r > 1, v > 0 \right)$ .

Per  $k = 3$  è necessariamente  $r = 2, v = 1$  e si ha la  $V_3$  dell'  $S_7$ , situata sopra il cono di Veronese  $C_{2,1}$  (incontrata dai piani del cono in curve), di cui si è già detto nel numero precedente.

Questa  $V_3$  possiede  $\infty^4 \gamma_{1,3}$ . Altre  $V_3$  che posseggono  $\infty^4 \gamma_{1,3}$  sono (n. 4): la  $V_3$  dell'  $S_9$  che rappresenta le quadriche dell'  $S_3$  (la quale è l'unica  $V_3$  che possiede  $\infty^4 \gamma_{1,3}$  e per cui lo spazio ambiente ha la dimensione massima 9); le  $V_3$  dell'  $S_6$ , i cui  $S_3$  tangenti riempiono l'  $S_6$  ambiente (le quali sono le uniche  $V_3$  che posseggono  $\infty^4 \gamma_{1,3}$  e per cui lo spazio ambiente ha la dimensione minima 6); la  $V_3$  dell'  $S_7$  sezione iper-piana generica della  $V_4$  di Segre rappresentante le coppie di punti di due piani.

*Non si conoscono invece  $V_3$  con  $\infty^4 \gamma_{1,3}$  ed appartenenti all'  $S_8$ .*

Per  $k = 4$  è  $r = 2, v = 3$ ; oppure  $r = 3, v = 1$ ; o infine  $r = 2, v = 2$ .

In entrambi i casi  $r = 2, v = 3$  e  $r = 3, v = 1$  la varietà possiede  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  esattamente (n. 4).

Nei casi  $r = 3, v = 1$  e  $r = 2, v = 2$  vale l'osservazione del n. 7.

Le  $V_4$  in discorso con  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  sono (n. 2):

1° ( $k = 4, r = 2, v = 3$ ) Ogni  $V_4$  (dell'  $S_9$ ) situata sopra il cono di Veronese  $C_{2,3}$  — incontrata dagli  $S_4$  del cono in superficie — i cui  $S_4$  tangenti riempiono il cono  $W_8$ ; le  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  sono tutte e sole le  $\gamma_{1,3}$  delle  $V_3$  (dell'  $S_6$ ) in cui la  $V_4$  incontra i coni quadrici (di vertice  $S_3$ ) contenuti in  $C_{2,3}$ .

2° ( $k = 4, r = 3, v = 1$ ) Ogni  $V_4$  dell'  $S_{11}$  situata sopra il cono  $C_{3,1}$ , incontrata dai piani del cono in curve; le  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  sono tutte e sole le  $\gamma_{1,3}$  delle superficie (dell'  $S_4$ ) in cui la  $V_4$  incontra i coni quadrici (di vertice  $S_1$ ) contenuti in  $C_{3,1}$ .

Altre  $V_4$  che posseggono  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  sono (n. 4): la  $V_4$  dell'  $S_{14}$  rappresentante le quadriche dell'  $S_4$  (la quale è l'unica  $V_4$  che possiede  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  e per cui lo spazio ambiente ha la dimensione massima 14); le  $V_4$  del-

l'  $S_8$ , i cui  $S_4$  tangenti riempiono l'  $S_8$  ambiente (le quali sono le uniche  $V_4$  che posseggono  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  e per cui lo spazio ambiente ha la dimensione minima 8); la  $V_4$  dell'  $S_{10}$  sezione iperpiana generica della  $V_5$  di Segre rappresentante le coppie di punti di un  $S_2$  e di un  $S_3$ .

Si hanno così esempi di  $V_4$  con  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  appartenenti all'  $S_8$ , all'  $S_9$ , all'  $S_{10}$ , all'  $S_{11}$  e all'  $S_{14}$ .

Non sono invece note  $V_4$  con  $\infty^6 \gamma_{1,3}$  appartenenti all'  $S_{12}$  o all'  $S_{13}$ .

Infine nel terzo caso,  $r=2$ ,  $v=2$ , la  $V_4$  possiede  $\infty^8 E_2$  di  $\gamma_{1,3}$  ed è quella a cui pervenni nella mia Memoria più volte citata (e che ivi indicai con  $\Phi_4$ ): si tratta cioè della  $V_4$  dell'  $S_8$  situata sopra il cono di Veronese  $C_{2,2}$ , incontrata dagli  $S_3$  del cono in superficie.

**Fisiologia.** — Ancora sul rapporto tra peso del fegato e peso corporeo in un mammifero: « *Mus decumanus* » Pall.<sup>(1)</sup>. Nota di A. BALLI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Dato l'interesse che suscita il problema dei rapporti tra fegato, metabolismo dei lipidi e gestazione negli animali, ho pensato di esporre alcuni dati da me raccolti in un roditore, il *Mus decumanus*<sup>(3)</sup>, anche se queste osservazioni vertono su di un numero piuttosto piccolo di esemplari.

Questa Nota ha carattere preventivo, ed i dati esposti, nonostante il fatto che il numero degli esemplari da me esaminati è stato esiguo, non mancano di particolare interesse, soprattutto perchè in contrapposizione coi risultati ottenuti da altri AA. su altri mammiferi. Spero, tuttavia, di confermare questi miei primi dati in un secondo tempo, quando, nella primavera ventura, potrò raccogliere un più abbondante materiale, a complemento delle ricerche ora iniziate.

Studiando la stessa questione di recente<sup>(4)</sup> in un altro mammifero insettivoro, la *Talpa europaea* L., ho avuto campo di constatare qualcosa di diverso da quello che fu descritto da altri AA. pure su mammiferi. I dati che ora espongo si riferiscono ad un mammifero roditore onnivoro, come roditore

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e di Anatomia comparata della R. Università di Modena.

(2) Nella seduta del 18 dicembre 1938.

(3) Questi topi sono stati catturati in un deposito di immondizie presso una ditta della periferia della città di Modena, ove tali immondizie vengono con opportuni procedimenti trasformati in concimi.

(4) A. BALLI, *Rapporto tra peso del fegato e peso corporeo in « Talpa europaea »* L. (In corso di stampa su « Arch. Ist. Biochim. Ital. »).

ed onnivoro e dello stesso genere è il ratto bianco studiato da Herring<sup>(1)</sup>, i cui dati, in proposito, sono del tutto diversi da quelli da me trovati.

Mentre per ciò che può riguardare in generale i mammiferi rimando alla mia Nota già citata, prendendo in particolare considerazione i risultati di Herring, ricorderò che questi trovò nel ratto bianco un aumento considerevole in peso (in media del 27.5 %) del fegato durante la gravidanza, aumento che l'A. interpreta come conseguente all'aumentato metabolismo generale che lo stato gravidico implica nei mammiferi e nel quale il fegato è il viscere, come dice lo stesso Herring, principalmente interessato.

Nelle tabelle che seguono ho esposto, oltre alla data di cattura dei 42 maschi e delle 28 femmine, la lunghezza del corpo degli animali senza la coda, la lunghezza della coda, il peso dell'utero gravido o no delle femmine, il peso del corpo, il peso del fegato ed infine il valore del rapporto:  $\frac{\text{peso fegato} \cdot 100}{\text{peso corporeo}}$ . Nel calcolare il peso del corpo, ho fatto, come anche nel caso delle talpe, astrazione sia del contenuto intestinale in ambo i sessi e nel caso delle femmine anche del peso dell'utero gravido o no, per le ragioni accennate nel mio precedente lavoro. I maschi sono stati numerati secondo un ordine crescente di peso del corpo; le femmine secondo un ordine crescente di peso dell'utero e questo prima per le femmine non gravide ed in seguito per quelle che lo erano. Nella colonna che dà la lunghezza della coda, e questo per i soli maschi, come si vede, i dati sono stati spesso sostituiti da una lineetta: si tratta di individui con coda mozzata.

Osservando ora i risultati da me ottenuti col *Mus decumanus*, dirò che il rapporto  $\frac{\text{peso fegato} \cdot 100}{\text{peso corporeo}}$  è in aumento, come si vede nella tabella I, nelle femmine in gestazione (dal n. 9 al n. 18), rispetto a quelle che non lo erano (dal n. 1 al n. 8), ma lo è di ben poco (5.84 per le femmine in gestazione e 5.33 per le altre). Ricordo che un risultato, si può dire identico, fu da me trovato con le talpe. Come controllo ho esaminato anche parecchi maschi (tab. 2) tutti più o meno adulti (dal n. 1 al n. 36), come nel caso delle femmine (dal n. 1 al n. 18), ed è risultato, come pure ebbi campo di constatare nelle talpe, che in essi il rapporto (4.61) in causa è minore rispetto alle femmine. Le differenze tra i risultati ottenuti da me con *Mus decumanus* e da Herring<sup>(1)</sup> coi ratti bianchi, sono, come si vede, evidentissimi.

Veniamo ora ai risultati ottenuti da Bennet Bean<sup>(2)</sup>. Secondo questi, « nei mammiferi, il rapporto  $\frac{\text{peso fegato}}{\text{peso animale}}$  diminuisce in peso con l'età per

(1) P. T. HERRING, *The effect pregnancy upon the size and weight of some of the organs of the body*. «Brit. Med. Journ.», 1920. (Citato da CANELLA nel suo lavoro: *Metabolismo dei grassi e gestazione nei Vertebrati*. «Arch. Zool. Ital.», 1936).

(2) R. BENNET BEAN, *Notes on the postnatal growth of the heart, kidney, liver and spleen in Man*. «Carn. Inst.», Washington, n. 272 (citato da Ranzi).



cui al momento della maturità sessuale, come riporta Ranzi <sup>(1)</sup>, è minore che alla nascita ».

Nella tabella 1, dove sono riportati dal n. 21 al n. 28 gli individui femmine di una stessa covata e nella tabella 2, dal n. 40 al n. 42, gli individui maschi della stessa covata delle femmine, tutti non ancora slattati, si vede che il rapporto medio in causa è di 4.68 per le femmine e di 4.16 per i maschi. Come si vede, pur presentandosi il rapporto un po' più elevato nelle femmine, come nel caso degli animali adulti, rispetto ai maschi della stessa età, i suddetti valori sono quasi identici a quello medio dei maschi adulti (4.61) e di poco inferiori a quello medio delle femmine adulte in gestazione (5.84) e no (5.33). Altri risultati ottenuti con alcuni individui (nn. 19-20 per le femmine e nn. 37-38-39 per i maschi) slattati già da tempo, ma ben lungi dall'essere adulti, come d'altronde i loro pesi lo dimostrano, quasi si equivalgono ai precedenti. Non mi sembra pertanto, almeno in base ai miei dati, che si possa parlare in questo caso di diminuzione del rapporto  $\frac{\text{peso fegato}}{\text{peso animale}}$  dalla nascita alla maturità sessuale.

Il problema, indubbiamente interessante, presenta delle difficoltà di interpretazione non lievi. Non è certo sufficiente studiare una data specie di mammifero e da questo trarne conclusioni valide, anche in massima, per tutti i mammiferi. L'ambiente stesso in cui una data specie vive, come pure lo stato di vita libero o in cattività, l'alimentazione e altri fattori ancora, hanno di sicuro un'influenza sui risultati ottenibili.

Ad ogni modo, la ricerca estesa ad un numero maggiore di individui di ambo i sessi, sia giovani che adulti, sia femmine gravide o no, porterà sicuramente a conclusioni di notevole importanza.

(1) S. RANZI, *Fegato, metabolismo dei lipidi e funzioni sessuali nei Vertebrati*. « Arch. Zool. Ital. », 1937.



## TABELLA II.

*Maschi.*

N. d'ordine	Data di cattura	Lun- ghezza del corpo (senza coda) mm.	Lun- ghezza della coda mm.	A Peso del corpo gr.	F Peso del fegato gr.	$\frac{F. 100}{A}$
1	6 aprile 1938	195	180	196.2	9.750	4.96
2	8 » »	240	180	288.9	14.850	5.14
3	6 » »	230	190	309.6	12.570	4.06
4	6 » »	220	180	322 —	11.400	3.54
5	2 » »	250	—	327.7	23.095	7.04
6	8 » »	230	200	336.2	13.355	3.97
7	22 » »	230	190	338.8	15.075	4.44
8	5 » »	225	190	342.2	17.095	4.99
9	22 » »	220	—	346.6	18.280	5.27
10	8 » »	250	200	353.5	15.275	4.32
11	6 » »	240	200	353.9	13.150	3.71
12	8 » »	230	200	365.5	15.320	4.19
13	5 » »	230	—	385.3	16.575	4.30
14	8 » »	250	210	388.4	15.940	4.10
15	6 » »	240	220	402.5	20.205	5.01
16	6 » »	260	—	408.3	22.630	5.54
17	6 » »	240	—	411.1	20.280	4.93
18	22 » »	260	—	412.8	20.800	5.03
19	8 » »	240	—	415.8	19.905	4.78
20	5 » »	220	—	417.4	21.180	5.07
21	22 » »	220	210	418 —	15.050	3.60
22	5 » »	240	200	422.7	17.450	4.12
23	5 » »	230	—	424.2	18.525	4.36
24	8 » »	260	210	426.4	21.880	5.13
25	8 » »	230	190	426.5	19.600	4.59
26	5 » »	250	220	427.2	15.620	3.65
27	8 » »	250	210	427.8	19.520	4.56
28	6 » »	250	210	431.9	17.220	3.98
29	6 » »	240	210	435.1	16.990	3.90
30	8 » »	250	—	443.1	15.890	3.58
31	2 » »	245	—	456.9	30.260	6.62
32	5 » »	255	220	459.9	22.825	4.96
33	8 » »	240	210	461.2	20.140	4.36
34	6 » »	240	220	475 —	21.370	4.49

Segue: TABELLA II.

N. d'ordine	Data di cattura	Lun- ghezza del corpo (senza coda) mm.	Lun- ghezza della coda mm.	A Peso del corpo gr.	F Peso del fegato gr.	$\frac{F. 100}{A}$
35	5 aprile 1938	250	—	477.5	24.655	5.16
36	6 » »	220	180	488.4	22.100	4.52
Media . . .						4.61
37	22 » »	130	120	50.16	3.360	6.69
38	22 » »	130	120	52.91	2.935	5.54
39	22 » »	130	120	60.70	3.280	5.40
Media . . .						5.84
40	23 » »	55	20	6.30	0.275	4.36
41	23 » »	60	21	8.02	0.300	3.74
42	23 » »	60	21	8.27	0.365	4.41
Media . . .						4.16

**Biologia.** — *Azione delle microonde sul ciclo vegetativo di alcuni vegetali.* Nota di G. MEZZADROLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio B. LONGO.

Le esperienze già da molti anni iniziate e compiute dal prof. G. Mezzadrolì e Collaboratori <sup>(2)</sup> sull'influenza che le onde corte esercitano sui vegetali e sugli animali furono proseguite con ulteriori ricerche impieganti microonde di lunghezza inferiore al metro.

Prove preliminari di laboratorio, fatte in questi ultimi anni con lunghezze d'onda di 65 cm. sopra sementi di vario tipo, diedero risultati non sempre favorevoli; soprattutto per alcune specie di vegetali e per determinate modalità d'irradiazione. Tuttavia i cereali e particolarmente il frumento si dimostrarono suscettibili di essere favorevolmente influenzati nella loro germinazione.

Riportiamo per esemplificazione una serie di risultati ottenuti con lunghezze d'onda di 65 cm. i quali si possono ritenere come una media di numerose esperienze simili.

TABELLA I.

FRUMENTO MENTANA.

*Irradimento con onde di cm. 65 seguito da bagnatura e semina su cotone.*

Età in giorni	Controllo		Irrad. 5 minuti		Irrad. 15 minuti		Irrad. 30 minuti	
	Nati	Lungh. cm.	Nati	Lungh. cm.	Nati	Lungh. cm.	Nati	Lungh. cm.
1	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	—	—	—	—
3	20	9	35	40	64	92	50	58
4	23	10	39	42	69	98	53	60
5	27	21	43	46	74	120	55	73
6	31	34	45	48	79	152	60	91
7	35	42	51	55	89	200	62	110

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1938.

(2) Per l'imponente bibliografia si rimanda agli « Atti del I Congresso internazionale di elettro-radio-biologia in Venezia 10-15 settembre 1934-XII », Cappelli editore, Bologna.



È evidente quindi l'influenza dell'irradiazione sul potere germinativo, come ancor meglio dimostra il diagramma comparativo delle lunghezze totali dei germogli, ed ancora una volta è dimostrata l'importanza della durata d'irradiazione agli effetti dell'optimum di stimolamento.

Di fronte a risultati tanto probativi restava pertanto molto interessante accertare quale avrebbe potuto essere l'effetto delle stesse irradiazioni sull'ulteriore sviluppo dei vegetali trasportati in pieno campo, nonchè sulla loro produttività.

Frattanto nella riunione della Confederazione Fascista degli Agricoltori tenutasi in Roma nel marzo 1937 sotto la presidenza del marchese Solari, veniva decisa l'esecuzione su larga scala di trattamenti di semi col metodo del prof. Riccioni<sup>(1)</sup> che impiega correnti intense ad alta frequenza, e con quello del prof. Mezzadrolì che adotta onde ultra corte (microonde) di poche decine di centimetri di lunghezza.

Furono perciò sottoposte ad irradiazione importanti quantità di semi di Frumento Mentana, di Granoturco, di Fave e di Fagioli per durate variabili dai 5 ai 60 minuti.

La Compagnia Marconi di Genova gentilmente permise l'uso dei suoi apparecchi emittenti per queste esperienze per le quali fu scelto un emettitore di  $\lambda = 59$  cm. con riflettore parabolico; nella zona focale di esso venivano poste le sementi da irradiare, semplicemente contenute in barattoli di vetro, senz'alcun'altra operazione supplementare.

I campioni così trattati, unitamente a quelli di controllo, furono dati in esperimento culturale alla Società Produttori Sementi di Bologna, la quale ne curò diligentemente la coltura nei suoi campi sperimentali fino al raccolto.

I risultati che ci sono stati gentilmente comunicati, ricavati da queste prime prove in pieno campo sono pienamente incoraggianti e portano ad incrementi del raccolto perfino del 10-20 %.

Diamo senz'altro le tabelle riassuntive di queste prime prove.

(1) Vedi loc. cit., p. 153. Cfr. anche i Rapporti n. 1-7 del *Nucleo italiano di Hertzbiologia* (Firenze, Via della Mattonaia 13).

TABELLA II.

I. — FRUMENTO MENTANA.

*Irradimento con onde di  $\lambda = 59$  cm. — Semina eseguita su 30 m<sup>2</sup>.*

Durata del trattamento	Semina	Raccolto	Quantità del raccolto kg.	Peso di 1000 grani
Controllo	8 marzo	3 luglio	2.800	24.25
5 minuti	»	»	5.300	28.50
15 »	»	»	4.300	27 —
30 »	»	»	4.400	29 —
60 »	»	»	4.000	26.50

II. — FAGIOLI.

*Irradimento con onde di  $\lambda = 59$  cm. — Semina eseguita su 30 m<sup>2</sup>.*

Durata del trattamento	Semina	Raccolto	Quantità del raccolto kg.
Controllo	8 marzo	16 luglio	5.900
5 minuti	»	»	6.200
15 »	»	»	5 —
30 »	»	»	4.100
60 »	»	»	4.800

III. — FAVE.

*Irradimento con onde di  $\lambda = 59$  cm. — Semina eseguita su 19,60 m<sup>2</sup>.*

Durata del trattamento	Semina	Raccolto	Quantità di raccolto kg.	Peso di 1000 grani	N. di piante in 19.6 m <sup>2</sup> .
Controllo	8 marzo	16 luglio	1.000	6,76	148
5 minuti	»	»	1.700	9,51	178
30 »	»	»	1.000	7.14	140
60 »	»	»	1.400	7.77	180

Segue: TABELLA II.

IV. - MAIS.

*Irradiazione con onde di  $\lambda = 59$  cm. - Semina eseguita su 150 m<sup>2</sup>.*

Durata del trattamento	Semina	Raccolto	Steli		Pannocchie N.	Tutoli kg.	Mais kg.
			N.	kg.			
Controllo	8 marzo	13 sett.	390	50	487	8.700	40
5 minuti	»	»	456	37	545	9—	43
15 »	»	»	418	38	524	9—	43
30 »	»	»	468	43	568	10.200	47
60 »	»	»	477	54	514	9.900	44

Da ultimo è da segnalare un particolare non trascurabile di queste esperienze di trattamento con microonde, che dà ad esse una speciale importanza. Alcune delle sementi da trattare erano infestate da un parassita animale, il « *Toncus vulgaris* », che è un piccolo coleottero di colore nero: orbene, dopo una irradiazione di 60 minuti i parassiti venivano completamente uccisi.

*Conclusioni.* — Dall'esame delle tabelle soprariportate risulta evidente l'influenza positiva esercitata dalle microonde (in determinate modalità di applicazione) sul potere germinativo, sull'accrescimento e sulla produttività di molti vegetali e in particolare dei cereali. Le prove di laboratorio che davano incrementi notevoli al potere germinativo hanno avuto piena conferma dalle prove eseguite in pieno campo, per le quali si sono avuti incrementi notevoli del raccolto in ragione anche del 10-20 % unitamente ad un miglioramento qualitativo del raccolto stesso.

**Fisiologia** (Fisiologia generale). — *Azione biologica a distanza dei metalli attraverso il vetro*. Nota di V. RIVERA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio E. CARANO.

Nelle precedenti ricerche non apparve con evidenza se l'azione biologica a distanza dei metalli, di cui fu data una dimostrazione sperimentale per primo da chi riferisce, poi da Nadson e Stern e successivamente da tanti altri AA. italiani e stranieri <sup>(2)</sup>, si esplicasse anche interponendo, tra il metallo e il soggetto biologico in esperimento, una sostanza più o meno spessa e più o meno opaca per le diverse radiazioni conosciute: questa incertezza rappresentava la principale difficoltà per l'attribuzione ed il riconoscimento della natura dell'agente, che gli effetti biologici era capace di indurre.

Fin dai primissimi esperimenti <sup>(3)</sup> io feci notare che l'effetto biologico dei metalli si esplicava pur essendo ricoperta con carta nera da fotografo la parete interna degli schermi di piombo, nei quali i semi in germinazione erano stati rinchiusi e feci anche rilevare che <sup>(4)</sup> schermi di piombo tappezzati di carta dimostravano una influenza biologica minore di quelli non rivestiti di carta, ma maggiore dei controlli in legno.

Fu anche tentato di riconoscere se la interposizione di vetro sottile o spesso tra le piantine vegetanti ed il metallo avesse una influenza sopra l'azione biologica di questo, ma si concluse così: « Dalle prove surriportate può desumersi che una certa differenza di sviluppo può determinarsi, in schermi diversi, anche interponendo, tra la parete dello schermo e la pianta vegetante, una o due pareti di vetro sottile di un tubo chiuso con tappo di sughero, ma il risultato apparisce incerto di per sè... ». Un anno dopo, da Nadson e Stern <sup>(5)</sup> venne reso noto che un foglio di carta bianca sottile e compatta, posta tra metallo e coltura, *diminuisce o annulla* l'azione dei metalli e questo risultato si ottiene pure interponendo sottili lastre di vetro o di quarzo.

Neppure da queste prove dunque si ha il responso chiaro e preciso, che era atteso sia da biologi che da fisici, se cioè codesta azione dei metalli sia sicuramente annullata dalla interposizione di vetro, oppure se essa si esplichi

(1) Nella seduta del 18 dicembre 1938.

(2) Vedere *Radiobiologia vegetale*, Roma, Bardi, 1936.

(3) Ved. « Rendic. R. Accad. Naz. Lincei », 1° sem., fasc. 7, Roma, aprile, 1930, p. 719.

(4) Ved. « Rivista di Biologia » vol. XIII, fasc. I-III, 1931.

(5) NADSON e STERN, « Compt-rend. des seances de l'Acad. des Sciences », 18 maggio 1932, pp. 1597-1600.

attraverso questo ed il medesimo rilievo si può fare sui risultati delle ricerche di Lombardi<sup>(1)</sup> su semi bachi e di Marotta<sup>(2)</sup> su apici radicali, perchè, sulla tecnica usata da questi e da altri AA., non si può escludere completamente che, tra il metallo ed il soggetto biologico, l'aria possa agire da veicolo di particelle del metallo...

D'altra parte tutti i tentativi sperimentali, fatti da chi riferisce, o dalla sua scuola, di ottenere una azione biologica dal metallo, mantenendo lastre di piombo di diverso spessore fuori della cameretta di sviluppo di funghi o di allevamenti di piante superiori, anche aderenti al vetro della coltura, non hanno dato risultati chiari e costanti, oppure non hanno fornito dati aventi spiccate differenze.

Occorreva trovare un altro artificio sperimentale che fosse capace di cimentare l'azione biologica del metallo attraverso il vetro, mantenendo il metallo fuori della cameretta di allevamento (ovviando con ciò anche all'inconveniente, che costantemente si rileva, della formazione di incrostazioni di ossidi e carbonati sulla superficie del metallo, quando esso si trovi nell'ambiente stesso, necessariamente umido, in cui si sviluppa il vegetale in studio, incrostazioni che attenuano e possono anche annullare l'azione del metallo sul vivo).

Ed un altro punto interrogativo di notevole importanza per il fisico ed il biologo era rimasto sospeso: fin dalle prime ricerche avremo voluto stabilire se una influenza sull'accrescimento di germogli di piante superiori fosse esercitata dallo spessore del metallo e conducemmo una sperimentazione lunga e meticolosa, potendo in conclusione solo affermare: «Il comportamento delle specie vegetali in studio non presenta spiccate differenze nei riguardi dei due schermi di pb, rispettivamente di cent. 16 e di mm. 1.5, come si poteva supporre: piccole differenze si rilevavano però costantemente nei due casi ed hanno uno stesso riferimento alla specie in studio...»<sup>(3)</sup>.

Il paragone del comportamento biologico dei due spessori di pb., così diversi e lontani, era tuttavia evidentemente da completare, sperimentando con una serie adeguata di spessori intermedi tra i due estremi, non essendo affatto pacifico che gli effetti biologici debbano verificarsi a scala, parallelamente agli spessori del metallo.

Ispirandosi a codesti diversi e vari rilievi, si è perciò organizzata una nuova serie sperimentale nella quale non più il metallo costituisse le camere di sviluppo del vegetale ed alle lastre ed ai blocchi fosse sostituita limatura di metallo, in masse più o meno importanti, applicate esternamente alla cameretta di allevamento delle piante, direttamente sul vetro di copertura di essa.

Le prove furono cioè organizzate nel seguente modo:

(1) LOMBARDI, «Bollett. R. Staz. Gelsicolt. e Bachicolt. di Ascoli Piceno», 1935.

(2) MAROTTA, «Rendic. R. Accad. Naz. Lincei», aprile, 1936.

(3) Ved. «Rivista di Biologia», 1931.



Vasche di vetro spesso delle dimensioni interne di cm.  $7.5 \times 5.5 \times 3.5$  venivano adoperate come germinatoi di semi di lenticchia ponendo, sul fondo di esse vasche, cotone e, su di esso, carta bibula, convenientemente inumidite: quindi la scatola veniva coperta con un vetro molto sottile, dello spessore cioè di una piccola frazione di mm. (vetrini coprioggetti da microscopia delle dimensioni di cm.  $9 \times 7$ ) e questo vetro veniva con cura saldato sui bordi della scatola con paraffina. Si otteneva così lo sviluppo delle piantine in ambiente ermeticamente chiuso, senza possibilità di scambio d'aria tra l'interno della cameretta e l'esterno di essa, dove, sul vetrino sottile, che copriva la scatola di vetro, era stata accumulata, per spessori differenti, ad esempio circa mm. 1, mm. 9 e mm. 18, limatura ottenuta da piombo del commercio; tra il vetrino ed i semi vi era uno spazio di cent. 2.

Lo sviluppo delle diverse popolazioni fu notevolmente diverso e cioè massimo sotto mm. 18 di limatura, e decrescente sotto mm. 9, mm. 1 e controllo senza limatura (con differenze tuttavia piccole e talora contraddittorie in questi due ultimi casi).

La regolarità dello sviluppo delle piantine si rileva dai valori dell'accrescimento in lunghezza delle radici e dei fusticini in sviluppo dai semi, valori di cui qui riportiamo un esempio:

Sviluppo delle radici di lenti ad ore 88 dalla semina (T. 11° a 14°), sotto l'influenza della limatura di piombo dello spessore di

Piombo mm. 18		9	1	0
mm.	12	8	6	7
»	11	7	5	6
»	9	7	5	5
»	8	6	4	4
»	8	6	4	4
»	8	5	4	3
»	8	5	4	3
»	7	4	4	3
»	7	3	4	3
»	7	3	4	3
»	7	2	3	2
»	6	2	1	0
Totali mm.	98	58	48	40
media »	8,1	4,8	4	3,3

Come è facile rilevare dalla tabella, il piombo in limatura ha influito sullo sviluppo delle radici, pur attraverso il vetro di copertura della scatola, non tanto per la sua presenza, quanto per lo *spessore dello strato*, ottenendosi però valori vicini a quelli del controllo per lo spessore 1, valori che sono straordinariamente maggiori invece per lo spessore 18 ed intermedi per lo spessore 9.

Nelle ore successive l'influenza del metallo attraverso il vetro si è fatta parimenti sentire sull'accrescimento, tanto delle radici, che hanno all'incirca mantenuto le differenze rilevate per le prime 88 ore di sviluppo, quanto dei fusticini, essendosi rilevato lo sviluppo dei fusti fin dalle 110 ore successive alla semina in *tutte* le piantine sotto 18 mm. di pb., in 9 piantine sotto mm. 9, in sole due piantine sotto 1 mm. ed in 3 nel controllo.

Lo sviluppo in mm. delle radici delle diverse popolazioni, a 110 ore dalla semina, è espresso dai valori che seguono:

Piombo mm. 18	9	1	0
mm. 22	16	14	15
» 17	15	11	11
» 17	14	11	9
» 15	12	10	9
» 15	12	10	8
» 14	12	10	8
» 14	11	10	8
» 13	11	9	7
» 13	9	9	7
» 12	8	8	7
» 12	9	8	6
» 11	7	7	4
Totale mm. 175	135	117	99
medie » 14.5	11.2	9.7	8.2

Lo sviluppo delle radici a 158 ore dalla semina è dato dalla tabella III.

Lo sviluppo in mm. dei fusticini delle diverse popolazioni a 110 ed a 158 ore dalla semina è espresso dai valori che sono riportati nella tabella IV.

TABELLA III.

Piombo mm. 18		9	1	0
mm.	29	27	23	28
»	27	27	22	25
»	27	26	22	24
»	25	25	21	23
»	25	25	21	22
»	25	24	21	20
»	25	23	18	21
»	24	23	18	19
»	24	23	18	18
»	21	21	17	18
»	21	21	16	15
»	20	20	16	14
Totale mm.	293	285	223	256
Media »	24.4	23.8	18.5	21.2

Queste prove, ripetute per una decina di volte, hanno dato risultati equivalenti, tuttavia notandosi un apprezzabile indebolimento dell'azione biologica del metallo della limatura con il trascorrere del tempo.

Altre prove, che qui per brevità non si riportano, stabiliscono che, diminuendo la distanza tra metallo e semi, agli effetti eccitativi subentrano quelli depressivi dell'accrescimento.

Le prove si sono limitate al primissimo periodo dello sviluppo della piantina da seme, sino alla emissione ed all'accrescimento del fusticino per circa mm. 7 a 15, non oltre il 6° giorno dalla semina (T. media 12°).

Si deduce che:

a) Una eccitazione notevolissima è indotta sopra l'accrescimento (delle radici e dei fusticini) dalla presenza di uno spessore opportuno di limatura di Pb., posta esternamente al vetrino che ricopre le vegetazioni, da queste distante da cm. 2 a 3, e senza possibilità di comunicazione tra l'aria della scatola, che chiude queste vegetazioni, e l'atmosfera esterna, nella quale si trova la limatura di Pb.

TABELLA IV.

Piombo mm. 18			9		1		0	
mm.	4	16	2	12	1	11	1	12
»	3	16	2	12	0	11	1	12
»	3	16	2	12	0	11	0	11
»	3	15	1	12	0	8	0	8
»	2	14	1	11	0	8	0	6
»	2	14	1	11	0	6	0	6
»	2	12	1	11	0	6	0	4
»	2	12	1	10	0	6	0	4
»	2	12	1	10	0	6	0	3
»	1	10	0	9	0	5	0	3
»	1	10	0	8	0	5	0	3
»	1	8	0	8	0	3	0	9
Totale mm.	26	155	12	126	1	86	2	72
Media »	2.1	12,9	1	10,5	0.08	7.1	0.16	6

Agendo invece ad una distanza minore, da mm. 10 a mm. 0,2 (spessore del vetrino), il piombo deprime apprezzabilmente lo sviluppo dei germogli aerei e radicali della specie vegetale indicata.

b) L'influenza sul vivo della limatura di Pb. che in opportuno spessore sovrasti su questo e si trovi fuori dell'ambiente di sviluppo e da questo totalmente separato, apparisce persino *più intensa* di quella rilevata quando il Pb. costituisca la scatola contenente le vegetazioni (in realtà la limatura di Pb., trovandosi fuori dell'ambiente umido, sottoposto alla influenza del vivo, più difficilmente si incrosta e si ricopre di ossidi e di carbonati).

c) L'effetto biologico del Pb. non è dunque dipendente tanto dalla *presenza* di esso in prossimità della scatola di allevamento, esternamente ad essa, ma invece più strettamente legato *allo spessore* dello strato di limatura che sovrasta l'allevamento vegetale, ciò a parità di distanza del metallo della coltura.

d) Il principio nuovo dell'azione biologica a distanza dei metalli si ricollega dunque a fattori fisici dell'ambiente, potendosi oramai escludere i

fattori chimici, cui non danno assolutamente diritto di cittadinanza i risultati di codesta recentissima sperimentazione.

e) Questa tappa notevole, conseguita dalla nostra sperimentazione quasi decennale, ci riporta a dar valore e credito tanto maggiore alla ipotesi primogenita, che fu fatta da noi quando i fatti secondari della radiazione penetrante erano poco o punto conosciuti e dimostrati dai fisici: oggi alcune conoscenze, particolarmente quelle dovute al fisico Hess, cui si deve la scoperta che l'*optimum* di emissione degli «sciame» corrisponde allo spessore di mm. 18 di Pb., ci servono ad attribuire, con ipotesi che apparisce di maggiore probabilità, alla primitiva interpretazione i risultati biologici da noi messi in evidenza.

f) Resterebbe da stabilire a che cosa si debba la maggiore efficacia biologica che sembra dimostrata dalla limatura di Pb. al confronto di lastre di Pb. di equivalente spessore, ma su questo argomento dobbiamo richiamare l'attenzione e le ricerche dei fisici.

U. A.



## INDICE DEL VOLUME XXVIII, SERIE VI. — RENDICONTI

Secondo Semestre 1938.

---

### INDICE PER AUTORI

---

#### A

AGOSTINELLI. -- « Integrali primi delle equazioni del moto di un corpuscolo elettrizzato, in presenza di  $N$  ennpoli magnetici cogli assi sovrapposti ». 88.

ID. — « Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico », Nota I. 183.

ID. — « Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico », Nota. II. 189.

ALIBRANDI A. — Vedi MARTINO G.

AMERIO L. — « Un esempio tipico nella teoria della trasformazione di Laplace ». 85.

ARMELLINI. — « I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton ». Nota III. 117.

ARNAUDI C. — « Ricerche sui microrganismi acidificanti dei foraggi insilati ». 157.

#### B

BALLI A. — « Ancora sul rapporto tra peso del fegato e peso corporeo in un mammifero: "Mus decumanus" Pall ». 402.

BINAYENDRA N. S. — « Sulla formazione di precipitati periodici in seno ad altri precipitati ». 388.

BISCONCINI G. — « Sopra un caso particolare di moto incipiente, che trova espressiva applicazione al giroscopio ». 93.

BLANC A. C. — « Nuovo giacimento paleolitico e mesolitico ai Balzi Rossi (Bàussi Russi) di Grimaldi ». 107.

ID. — « Una serie di nuovi giacimenti pleistocenici e paleolitici in grotte litoranee del Monte Circeo ». 201.

BLANC G. A., in collaborazione di MANTOVANI T. — « Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). II. - I complessi colloidali ». 75.

BOGDAN C. P. — « Alcune determinazioni di una superficie di Veronese ». 349.

BOMPIANI E. — « Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea. — I. Classificazione delle quasi-asintotiche ». 223, 283.

ID. — « Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea. — II. Sistemi invarianti associati ad un sistema di quasi-asintotiche ». 224, 292.

BONINO G. B. e MANZONI ANSIDEI R. — « Spettro Raman dell'aldeide orto-deuterossi-benzoica ». 259.

BORTOLOTTI E. — «Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche». 224.

## C

- CACCIAPUOTI B. N. e FERLA F. — «Il radiocobalto impiegato come indicatore per la determinazione della solubilità del  $\text{Co}(\text{OH})_3$ ». Nota I. 385.
- CALAPSO R. — «Sulla deformazione delle reti di Voss di un  $\text{S}_4$  euclideo». 231.
- CASTELNUOVO GINA. — «Ulteriori ricerche circa l'influenza degli ormoni sessuali sulla maturazione delle carpe». 56.
- CHECCHIA-RISPOLI G. — «Osservazioni sulla struttura del guscio dei Clipeastri». Nota I. 221.
- CIMMINO G. — «Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta». 354.
- COLONNETTI G. — «Alla ricerca dei fondamenti sperimentali della teoria dell'equilibrio elasto plastico». 254.
- CORRADETTI A. — «Tentativo di ricostruzione del ciclo generale dei Plasmodi nell'ospite vertebrato». 164.
- CURATOLO A. — «Metodo per la determinazione volumetrica di piccole quantità di argento in tessuti e liquidi dell'organismo». 42.

## F

- FALLERONI D. — «Differenziazione di razze di "Anopheles maculipennis" e sua importanza per la soluzione del problema malarico». 70.
- FENOGLIO M. — «Sopra due "minettes" della Val Nambrone (Gruppo dell'Adamello)». 100.
- FERLA F. — Vedi CACCIAPUOTI B. N.
- FRANCAVIGLIA A. — «Contributo alla conoscenza della costituzione geologica del ciglione dell'altipiano Etiopico». 26.
- FULCHIGNONI E. — «Sul comportamento del cuore nell'epilessia da faradizzazione corticale». 38.

## G

- GHERARDELLI G. — «Un'osservazione sui complessi lineari di spazi». 142.
- GIALANELLA L. — «Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico». 14.
- ID. — «Fotometria eterocromatica ed indice di colore dei pianeti Nettuno e Vesta». 325.
- GOIDANICH G. — «Influenza del portainnesto sulla recettività della marza alle infezioni parassitarie». Nota preventiva. 265.

## M

- MAJORANA Q. — «Ulteriori ricerche sull'azione della luce su sottili lamine metalliche». 132.
- ID. — «Azione della luce periodica su sottili lamine d'oro». 137.
- ID. — «Teoria termica della "fotoresistenza metallica"». 177.
- ID. — «Confronto fra teoria termica ed esperienze di fotoresistenza metallica». 217.
- MANZONI ANSIDEI R. — Vedi BONINO G. B.
- MARIOTTI E. — «Sulla composizione chimica delle proteine muscolari della trota iridea in rapporto alla maturazione sessuale». 61.
- MARTINO G. e ALIBRANDI A. — «Nuove osservazioni sui riflessi condizionati dell'ammiccamento (per stimoli acustici)». 168.
- MAZZA F. P. e MIGLIARDI C. — «Alcuni p-aminobenzenzolfonil- $\alpha$ -aminoacidi e loro derivati». 152.
- MEZZADROLI G. — «Azione delle microonde sul ciclo vegetativo di alcuni vegetali». 408.
- MIGLIARDI C. — Vedi MAZZA F. P.
- MIRANDA C. — «Su di un problema di geometria differenziale in grande, posto dal Minkowski». 237.
- MITOLO M. — «Di una possibilità di sintesi della vitamina antiscorbutica nella cavia». 31.
- MONTI L. — «Sull'azione ossidante del biossido di selenio». Nota III. 96.

P

PICONE M. — « Nuove formule di maggiorazione per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine ellittico-paraboliche ». 331.

ID. — « Nuove determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali ». 339.

POSSIO C. — « L'azione aerodinamica su una superficie portante in moto oscillatorio ». 194.

R

RIVERA V. — « Azione biologica a distanza dei metalli attraverso il vetro ». 412.

ROSENBLATT A. — « Sulle funzioni univalenti dispari nel cerchio unitario ». 144.

RUSSO A. — « Adattamenti biologici di alcuni Echinodermi nel Canale di Suez ». 348, 391.

S

SALINI U. — « Applicazioni del metodo di Minding per la deformazione delle rigate ». 240.

SALVATORI A. — « Sull'effetto di iniezioni endomuscolari di estratti acquosi di fegato, rene e intestino, sul tasso cloroemico del ratto albino ». 47.

SCORZA DRAGONI G. — « Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti ». 317.

SILVA G. — « Moti kepleriani e teoria dell'aberrazione annua della luce ». 124.

SOBRERO L. — « Sollecitazioni elastiche di un sistema piano con foro rinforzato ». 378.

SOLAINI L. — « Influenza degli errori di orientamento interno nella restituzione fotogrammetrica ». 147.

T

TOLOTTI C. — « Equilibrio dei solidi e trasformazioni affini ». 13.

TONOLO A. — « Estensione d'un teorema trigonometrico del Legendre ». 244.

TOSATTI E. — « Sulla funzione respiratoria di fibre dirette e crociate decorrenti nel cordone anteriore del midollo cervicale ». 114.

V

VATOVA A. — « Notizie idrografiche sui laghi dell'A. O. I. ». Nota preliminare. 172.

VILLA M. — « Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare ». 3.

ID. — « Ricerche sulle curve quasi-asintotiche ». Nota I. 246.

ID. — « Ricerche sulle curve quasi-asintotiche ». Nota II. 253, 302.

ID. — « Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$  ». Nota I. 365.

ID. — « Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$  ». Nota II. 370, 395.

VIOLA T. — « Sulle estremanti di un integrale in forma ordinaria, dipendente da funzioni a derivate prime equi-uniformemente lipschitziane ». 254, 311.

ID. — « Curve di massima lunghezza, rappresentatrici di funzioni  $y = f(x)$  a derivate uniformemente lipschitziane ». 371.

VOLTERRA E. — « Ricerche sugli archi elastici: Risoluzione coi metodi dell'« elasticità vincolata » di uno speciale tipo di arco ». 22.

Z

ZAGAMI V. — « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — VII. Sul comportamento della conduttività elettrica del liquido seminale in funzione della temperatura ». 210.

ID. — « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — VIII. Sul valore del pH del liquido seminale di coniglio ». 270.

## INDICE PER MATERIE

---

### A

- Astronomia.** — « I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton », Nota III. ARMELLINI G. 117.  
— « Fotometria eterocromatica ed indice di colore dei pianeti Nettuno e Veneta », GIALANELLA L. 325.  
— « Moti kepleriani e teoria dell'aberrazione annua della luce », SILVA G. 124.

### B

- Biologia.** — « Ancora sul rapporto tra peso del fegato e peso corporeo in un mammifero: "Mus decumanus" Pall », BALLI A. 402.  
— « Azione delle microonde sul ciclo vegetativo di alcuni vegetali », MEZZADROLI G. 408.  
**Bollettino bibliografico.** — 275.  
**Botanica.** — « Ricerche sui microrganismi acidificanti dei foraggi insilati », ARNAUDI C. 157.  
— « Influenza del portainnesto sulla reattività della marza alle infezioni parassitarie », Nota preventiva, GOIDANICH G. 265.

### C

- Chimica.** — « Sulla formazione di precipitati periodici in seno ad altri precipitati », BINAYENDRA N. S. 388.

- Chimica.** — « Spettro Raman dell'aldeide orto-deuterossi-benzoica », BONINO G. B. e MANZONI ANSIDEI R. 259.  
— « Alcuni p-aminobenzenzolfonil- $\alpha$ -aminoacidi cloro derivati », MAZZA F. P. e MIGLIARDI C. 152.  
— « Sull'azione ossidante del biossido di selenio », Nota III. MONTI L. 96.  
**Comunicazioni varie.** — 274, 389.

### F

- Fisica.** — « Ulteriori ricerche sull'azione della luce su sottili lamine metalliche », MAJORANA Q. 132.  
— « Azione della luce periodica su sottili lamine d'oro », ID. 137.  
— « Teoria termica della "fotoresistenza metallica" », ID. 177.  
— « Confronto fra teoria termica ed esperienze di fotoresistenza metallica », ID. 217.  
**Fisiologia.** — « Ulteriori ricerche circa l'influenza degli ormoni sessuali sulla maturazione delle carpe », CASTELNUOVO GINA. 56.  
— (Chimica biologica). « Metodo per la determinazione volumetrica di piccole quantità di argento in tessuti e liquidi dell'organismo », CURATOLO A. 42.  
— « Sul comportamento del cuore nell'epilessia da faradizzazione corticale », FULCHIGNONI E. 38.  
— « Sulla composizione chimica delle proteine muscolari della trota iridea »



in rapporto alla maturazione sessuale ». MARIOTTI E. 61.

**Fisiologia.** — «Nuove osservazioni sui riflessi condizionati dell'ammiccamento (per stimoli acustici) ». MARTINO G. e ALIBRANDI A. 168.

— «Di una possibilità di sintesi della vitamina antiscorbutica nella cavia ». MITOLO M. 31.

— « Azione biologica a distanza dei metalli attraverso il vetro ». RIVERA V. 412.

— (Chimica biologica). « Sull'effetto di iniezioni endomuscolari di estratti acquosi di fegato, rene e intestino, sul tasso cloroemico del ratto albino ». SALVATORI A. 47.

— « Sulla funzione respiratoria di fibre dirette e crociate decorrenti nel cordone anteriore del midollo cervicale ». TOSATTI E. 114.

— « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — VII. Sul comportamento della conduttività elettrica del liquido seminale in funzione della temperatura ». ZAGAMI V. 210.

— « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — VIII. Sul valore del pH del liquido seminale di coniglio ». ID. 270.

## G

**Geodesia.** — « Influenza degli errori di orientamento interno nella restituzione fotogrammetrica ». SOLAINI L. 147.

**Geografia.** — « Notizie idrografiche sui laghi dell'A. O. I. ». Nota preliminare. VATOVA A. 172.

**Geologia.** — « Una serie di nuovi giacimenti pleistocenici e paleolitici in grotte litoranee del Monte Circeo ». BLANC A. C. 201.

— « Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli (Terra d'Otranto). II. — I complessi colloidali ». BLANC G. A. in collaborazione di MANTOVANI T. 75.

**Geologia.** — « Contributo alla conoscenza della costituzione geologica del ciglione dell'altipiano Etiopico ». FRANCAVIGLIA A. 26.

**Geometria.** — « Un'osservazione sui complessi lineari di spazi ». GHERARDELLI G. 142.

## M

**Matematica.** — « Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico ». Nota I. AGOSTINELLI C. 183.

— « Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico ». Nota II. ID. 189.

— « Un esempio tipico nella teoria della trasformazione di Laplace » AMERIO L. 85.

— « Alcune determinazioni di una superficie di Veronese ». BOGDAN C. P. 349.

— « Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea. — I. Classificazione delle quasi-asintotiche ». BOMPIANI E. 223, 283.

— « Geometria proiettiva di una equazione a derivate parziali, lineare omogenea. — II. Sistemi invarianti associati ad un sistema di quasi-asintotiche ». ID. 224, 292.

— « Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche ». BORTOLOTTI E. 224.

— « Sulla deformazione delle reti di Voss di un  $S_4$  euclideo ». CALAPSO R. 231.

— « Estensione dell'identità di Picone alla più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta ». CIMMINO G. 354.

— « Su di un problema di geometria differenziale in grande, posto dal Minikowski ». MIRANDA C. 237.

— « Nuove formule di maggiorazione per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali del second'or-



dine ellittico-paraboliche ». PICONE M. 331.

**Matematica.** — « Nuove determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali », ID. 339.

— « Sulle funzioni univalenti dispari nel cerchio unitario », ROSENBLATT A. 144.

— « Applicazioni del metodo di Minding per la deformazione delle rigate », SALINI U. 240.

— « Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti » SCORZA DRAGONI G. 317.

— « Estensione d'un teorema trigonometrico del Legendre », TONOLO A. 244.

— « Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare », VILLA M. 3.

— « Ricerche sulle curve quasi-asintotiche », Nota I. ID. 246.

— « Ricerche sulle curve quasi-asintotiche », Nota II. ID. 253, 302.

— « Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$  », Nota I. ID. 365.

— « Sulle varietà situate sui coni proiettanti la  $V_r^{2r}$  che rappresenta la totalità delle quadriche di  $S_r$  », Nota II. ID. 370, 395.

— « Sulle estremanti di un integrale in forma ordinaria, dipendente da funzioni a derivate prime equiuniformemente lipschitziane », VIOLA T. 254, 311.

— « Curve di massima lunghezza, rappresentatrici di funzioni  $y = f(x)$  a derivate uniformemente lipschitziane », ID. 371.

**Meccanica.** — « Integrali primi delle equazioni del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di  $N$  ennepoli magnetici cogli assi sovrapposti », AGOSTINELLI C. 88.

— « Sopra un caso particolare di moto incipiente, che trova espressiva applicazione al giroscopio », BISCONCINI G. 93.

**Meccanica.** — « Alla ricerca dei fondamenti sperimentali della teoria dell'equilibrio elasto plastico », COLONNETTI G. 254.

— « Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico », GIALANELLA L. 14.

— « L'azione aerodinamica su una superficie portante in moto oscillatorio », POSSIO C. 194.

— « Sollecitazioni elastiche di un sistema piano con foro rinforzato », SOBRERO L. 378.

— Equilibrio dei solidi e trasformazioni affini », TOLOTTI C. 13.

— « Ricerche sugli archi elastici: Risoluzione coi metodi dell'"elasticità vincolata" di uno speciale tipo di arco », VOLTERRA E. 22.

**Mineralogia.** — « Sopra due "minettes" della Val Nambrone (Gruppo dell'Adamello) », FENOGLIO M. 100.

## P

**Paleontologia.** — « Nuovo giacimento paleolitico e mesolitico ai Balzi Rossi (Bàussi Russi) di Grimaldi », BLANC A. C. 107.

— « Osservazioni sulla struttura del guscio dei Clipeastri », Nota I. CECCHIA-RISPOLI G. 221.

**Patologia** (Malariologia). — « Differenziazione di razze di "Anopheles maculipennis" e sua importanza per la soluzione del problema malarico », FALLERONI D. 70.

**Personale accademico.** — 273, 389.

**Presentazione di libri.** — 273, 389.

**Presentazione di Note e Memorie.** — 273, 389.

**Presentazione di plichi suggellati.** — 273, 389.

## R

**Radioattività.** — « Il radiocobalto impiegato come indicatore per la determinazione della solubilità del  $\text{Co}(\text{OH})_3$  », Nota I. CACCIAPUOTI B. N. e FERLA F. 385.

Relazioni di Commissioni. — 274.

**Z**

**Zoologia.** — « Tentativo di ricostruzione  
del ciclo generale dei Plasmodi nel-

l'ospite vertebrato ». CORRADETTI A.  
164.

— « Adattamenti biologici di alcuni Echi-  
nodermi nel Canale di Suez ». RUSSO  
A. 348, 391.

U. A.

---

